NOM :
Prénom :

Mardi 16 Décembre 2025

Interrogation 12

Applications Linéaires

Correction

Exercice 1 :
Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Définition d'une application linéaire.

Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev et $f : E \to F$. On dit que f est linéaire si $\forall x, y \in E$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

2. Définition du rang d'une application.

Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev, au moins l'un des deux de dimensions finies. On appelle rang de f, noté $\mathrm{rg}(f)$, par $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f))$.

3. Théorème d'isomorphisme.

Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies et $n = \dim(E) = \dim(F)$, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Alors $f \in \mathrm{GL}(E, F) \iff f$ injective $\iff f$ surjective $\iff \mathrm{rg}(f) = n \iff \exists g \in \mathcal{L}(F, E),\ f \circ g = \mathrm{Id}_F \iff \exists h \in \mathcal{L}(F, E),\ h \circ f = \mathrm{Id}_E$. De plus, dans ce cas, $f^{-1} = g = h$.

4. Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$.

Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies. Alors $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie et $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E)\dim(F)$.

5. Caractérisation des projecteurs.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $p \in \mathcal{L}(E)$. Alors p est un projecteur si, et seulement si, $p^2 = p$. Dans ce cas, $E = \ker(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$ et p est le projecteur sur $\mathrm{Im}(p) = \ker(p - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\ker(p)$.

6. Théorème du rang.

Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev, E de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \mathrm{rg}(f)$.

7. Caractérisation de l'inj/surj par le rang.

Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies, $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $\mathrm{rg}(f) \leq \dim(E)$ et f est injective si, et seulement si, $\mathrm{rg}(f) = \dim(E)$. Et $\mathrm{rg}(f) \leq \dim(F)$ et f est surjective si, et seulement si, $\mathrm{rg}(f) = \dim(F)$.

Exercice 2 :
Soit $f : (x, y, z) \mapsto (x + 2y + z, 2x + y - z)$. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$. Déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Soit $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
& f(\lambda(x, y, z) + \mu(x', y', z')) & \\
=& f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z') & \text{opé } \mathbb{R}^3 \\
=& ((\lambda x + \mu x') + 2(\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z'), 2(\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y') - (\lambda z + \mu z')) & \text{def } f \\
=& (\lambda(x + 2y + z) + \mu(x' + 2y' + z'), \lambda(2x + y - z) + \mu(2x' + y' - z')) & (\mathbb{R}, +, \times) \text{ anneau} \\
=& \lambda(x + 2y + z, 2x + y - z) + \mu(x' + 2y' + z', 2x' + y' - z') & \text{opé } \mathbb{R}^2 \\
=& \lambda f(x, y, z) + \mu f(x', y', z') & \text{def } f
\end{aligned}
$$

Donc $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$.

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$
\begin{aligned}
(x, y, z) \in \ker(f) &\iff f(x, y, z) = 0 & \text{def } \ker(f) \\
&\iff (x + 2y + z, 2x + y - z) = 0 & \text{def } f \\
&\iff \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases} & \text{liberté base canon } \mathbb{R}^2 \\
&\iff \begin{cases} 3x + 3y = 0 \\ 3y + 3z = 0 \end{cases} & \begin{array}{r} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_2 \leftarrow 2L_1 - L_2 \end{array}
\end{aligned}
$$

$$\iff \begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \end{cases}$$

Donc $\ker(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x=-y=z\} = \{(x,-x,x),\ x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1,-1,1))$. Donc f est non injective, par caractérisation de l'injectivité par le noyau.

Et par théorème du rang, $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\ker(f)) = 3-1 = 2$. Or $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}^2$. Donc $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$. Et donc f est surjective.