Chapitre 13
Dérivabilité

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

16 décembre 2025

$$\frac{d\,\text{Optimus}}{dx} =$$

Dans le chapitre précédent, on a vu la notion de continuité d'une fonction d'une variable réelle. Ici, on va continuer dans ce sens en allant un peu plus loin dans l'étude de la "lissitude" des fonctions.

Dans certains domaines des mathématiques (particulièrement en géométrie différentielle ou pour ceux qui font des EDP (équations aux dérivées partielles)), les "bonnes fonctions" sont les fonctions "lisses". On a vu un "premier niveau de lissitude pour les fonctions". C'est la continuité. Il est clair qu'une fonction qui a des discontinuité n'est pas lisse. Ça pique les doigts.

Mais il peut rester encore des points piquants dans le graphe de f. Typiquement, la fonction $x \mapsto |x|$ pique encore un peu. Et c'est là qu'intervient la notion de dérivabilité. Moralement, plus une fonction sera dérivable, plus elle sera lisse. On dit d'ailleurs *smooth* en anglais pour parler des fonctions dérivables. On va donc étudier les fonctions *smooth*, les fonctions lisses.

Historiquement, la naissance du calcul différentiel (que nous aborderons très rapidement cette année mais que vous avez déjà vaguement aperçus en physique (ou bientôt) avec les notions de dérivées partielles) est attribué à Newton et Leibniz au XVIIème siècle. Bien sûr, avec les moyens de l'époque et donc sans le formalisme que l'on a aujourd'hui. En réalité, la naissance historique des notions est assez différentes de l'ordre pédagogique que nous suivons.

En fait, c'est Blaise Pascal, au début du XVIIème, qui a initié le calcul différentiel avec l'étude de tangentes (qu'il appelait "touchantes"). Les travaux de Leibniz et Newton seront dans la lignée de ceux de Pascal.

Mais la formulation de l'époque est largement intuitive et sans grande rigueur, au sens où on l'entend aujourd'hui. Il faudra attendre d'Alembert au XVIIIème siècle pour exprimer le nombre dérivé d'une fonction en un point comme la limite du taux d'accroissement.

Mais D'Alembert est confronté à la définition même d'une limite, pas encore très claire à son époque. C'est parce qu'en son temps, l'ensemble des nombres réels n'était pas encore parfaitement identifié ni formalisé. Il faudra attendre Weierstrass au milieu du XIXème pour formalisé complètement la notion de dérivée pour avoir celle que nous avons aujourd'hui.

C'est donc une notion relativement récente en mathématique.

> Calculus destroys self-esteem on contact
>
> James Lileks

Table des matières

1 Nombres dérivées, Fonction dérivée

Dans toute cette partie, on ne considérera que des fonctions sur un intervalle ouvert $]a, b[$. Ce n'est pas vraiment nécessaire, mais ça permet d'éviter tout un tas de problèmes "aux bords". C'est toujours aux bords qu'apparaissent les problèmes. Comme il n'y a pas de bords dans un intervalle ouvert, il n'y a pas (ou plutôt moins) de problème. On fera une petite extension pour intégrer les problèmes au bords un peu plus tard dans le chapitre.

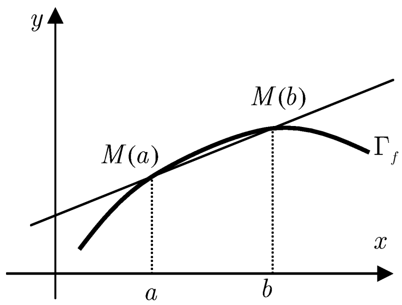
1.1 Nombre dérivée

La première définition de la dérivation est, bien sûr, la plus fondamentale. C'est de celle-là que tout le reste dépend. Et on aura besoin de revenir régulièrement à cette définition.

Définition 1.1 (Taux de variations) :
Soit $\alpha < \beta$ et $f :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ et $a \neq b \in]\alpha, \beta[$. On appelle *taux de variations de f entre a et b* le réel :

$$\tau_f(a, b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Remarque :
$\tau_f(a, b)$ est la pente (donc le coefficient directeur) de la droite passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. Pour le montrer, il suffit de calculer le coefficient directeur.



On peut définir un paramétrage du graphe de f :

$$\forall t \in]\alpha, \beta[, \; M(t) = (t, f(t))$$

Donc la fonction M est une fonction de $]\alpha, \beta[$ dans $\mathbb{R}^2$ et plus précisément dans $\mathrm{Gr}(f)$ qui va parcourir tous le graphe de f.

Donc $\tau_f(a, b)$ est le coefficient directeur de la droite $(M(a)M(b))$ (à démontrer).

Définition 1.2 (Nombre dérivé [✓]) :
Soit $\alpha < \beta$ et $f :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$. On dit que f *est dérivable en* $a \in]\alpha, \beta[$ si le taux de variations entre x et a converge quand $x \to a$ avec $x \neq a$, *i.e.* si $\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie (ce qui revient égalemet à dire que $\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et est finie).

Cette limite est appelé le nombre dérivé de f en a et est notée $f'(a)$.

On a donc, si le taux de variations converge quand $x \to a$,

$$f'(a) := \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

!!! ATTENTION !!!

⚠ On ne peut pas utiliser cette écriture tant qu'on a pas vérifier que la limite existait, c'est à dire que le taux de variations était convergent.

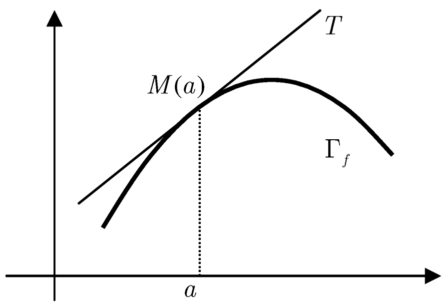
Il faut aussi bien comprendre que l'écriture $f'(a)$ est une notation pour parler d'une limite. Et cette notation n'a de sens que pour une fonction donnée.

Voir le chapitre précédent et toutes les recommandations et précautions qui y sont présentées.

Proposition 1.1 (Tangente) :
Soit $\alpha < \beta$ et $f :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ et $a \in]\alpha, \beta[$.

Si f est dérivable en a, alors $\mathrm{Gr}(f)$ admet une tangente $\mathcal{T}_a$ au point $M(a) = (a, f(a))$ d'équation :

$$\mathcal{T}_a : y = f'(a)(x - a) + f(a)$$



Démonstration (Esquisse) *:*
Si $x \neq a$, le taux de variation $\tau_f(x,a)$ est le coefficient directeur de la droite $(M(x)M(a))$. Mais les droites $(M(x)M(a))$ tendent vers la tangente $\mathcal{T}_a$ à la courbe de f en a. Et donc les coefficients directeurs des droites $(M(x)M(a))$ tendent vers le coefficient directeur de $\mathcal{T}_a$. Or $\tau_f(x,a)$ tend vers $f'(a)$ quand $x \to a$, par définition de la dérivabilité. Donc l'équation de $\mathcal{T}_a$ est $y = f'(a)x+\gamma$ pour un certain $\gamma \in \mathbb{R}$ constant bien choisis. Or $\mathcal{T}_a$ passe par le point $M(a)(a, f(a))$. Donc $f(a) = f'(a)a+\gamma$. Et donc $\mathcal{T}_a : y = f'(a)(x-a) + f(a)$. □

⚠ Attention ! Dire "f admet une tangente en a" est un abus de langage. En réalité, une fonction n'a pas de tangente. Une tangente est une droite qui frôle quelque chose. Mais une fonction ne frôle personne ni rien du tout. C'est l'assimilation (abusive), la confusion d'une fonction avec son graphe qui cause cet abus de langage. Donc cette formule veut dire en réalité "le graphe de f a une tangente au point $M(a)$".

Définition 1.3 (Tangente verticale) :
Soit $\alpha < \beta$ et $f :]\alpha,\beta[\to \mathbb{R}$ et $a \in]\alpha,\beta[$. Si f est continue en a et

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[\substack{x\to a\\ x\neq a}]{} \pm\infty$$

alors f n'est pas dérivable en a mais son graphe $\mathrm{Gr}(f)$ admet une tangente verticale d'équation $x = a$. rebroussement.

Exemple 1.1 :
La fonction $x \mapsto \sqrt{|x|}$ est continue en 0, non dérivable en 0 et admet une tangente verticale en 0.

Théorème 1.2 (Dérivabilité $\Longrightarrow$ continuité [✓]) :
Soit $\alpha < \beta$ et $f :]\alpha,\beta[\to \mathbb{R}$ et $a \in]\alpha,\beta[$.
Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Inutile d'insister sur ce théorème.

Démonstration :
Supposons f dérivable en a. On a donc $\forall x \in]\alpha, \beta[$, $x \neq a$,

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a)$$

Or $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ converge vers $f'(a) \in \mathbb{R}$ quand $x \to a$. Donc $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est bornée au voisinage de a et $x \mapsto (x - a)$ converge vers 0 quand $x \to a$. Donc le produit de ces deux fonctions est donc une fonction convergente vers 0, *i.e.* $f(x) - f(a) \xrightarrow[x \to a]{} 0$ et donc f est continue en a. $\square$

!!! ATTENTION !!!

On notera que pour qu'une fonction soit dérivable en un point, elle DOIT y être définie. Avec le théorème précédent, c'est même "pire" que ça : elle doit y être continue. Une fonction ne peut pas être dérivable en un point où elle n'existe pas. Plus précisément, si on note $\mathcal{D}$ le domaine de définition d'une fonction f, $\mathcal{D}_c$ son domaine de continuité et $\mathcal{D}_d$ son domaine de dérivabilité, alors $\mathcal{D}_d \subset \mathcal{D}_c \subset \mathcal{D}$. Et les inclusions peuvent être strictes.

Café philo

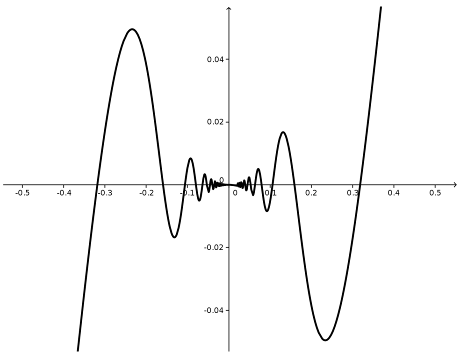
On a vu dans le chapitre précédent, qu'on pouvait étendre une fonction. Donc la rendre existante en un endroit où elle n'existait initialement pas. On a même vu qu'on pouvait le faire (sous certaines conditions) de façon à conserver la continuité. On va donc pouvoir maintenant se poser la question de la dérivabilité de la fonction une fois prolongée en ce point.

Attention, ce n'est donc pas la fonction qui est dérivable. Pas la fonction initiale. On l'a modifiée entre temps. La fonction n'est pas définie partout. On l'étend, donc on la modifie, donc ce n'est plus vraiment la fonction de base. Puis, on regarde si cette nouvelle fonction, cette extension, est dérivable au point d'extension.

C'est un peu comme une prothèse que l'on rajoute à la fonction. Ce n'est pas vraiment la fonction. Elle n'existe pas à cet endroit. Mais on l'étend par une prothèse. On change alors de fonction. Et on se demande qu'elles sont les nouvelles propriétés de cette nouvelle fonction, avec prothèse intégrée.

Exemple 1.2 :

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 \sin(1/x)$. Montrer que f peut être prolongée en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et qu'une fois prolongée, cette fonction est dérivable en 0.



!!! ATTENTION !!!

Le théorème précédent n'est QUE une implication. Ce n'est PAS une équivalence. Il ne suffit pas d'être continue pour être dérivable. Même si vous le désirez très fort. Ça ne fonctionne pas. Penser à la valeur absolue comme contre-exemple ou aux fonctions de Weiertrass (voir un peu plus bas).

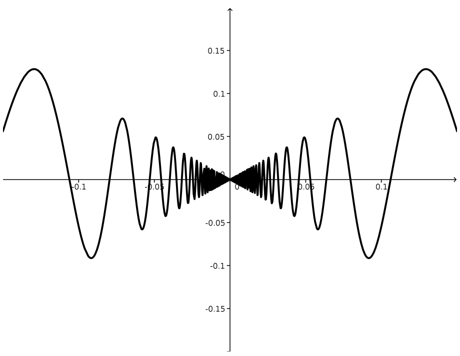
Toute fonction continue n'est pas nécessairement dérivable ! Ça ne fonctionne pas dans ce sens.

Exemple 1.3 ([✓]) :

La fonction

$$x \mapsto \begin{cases} x\sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

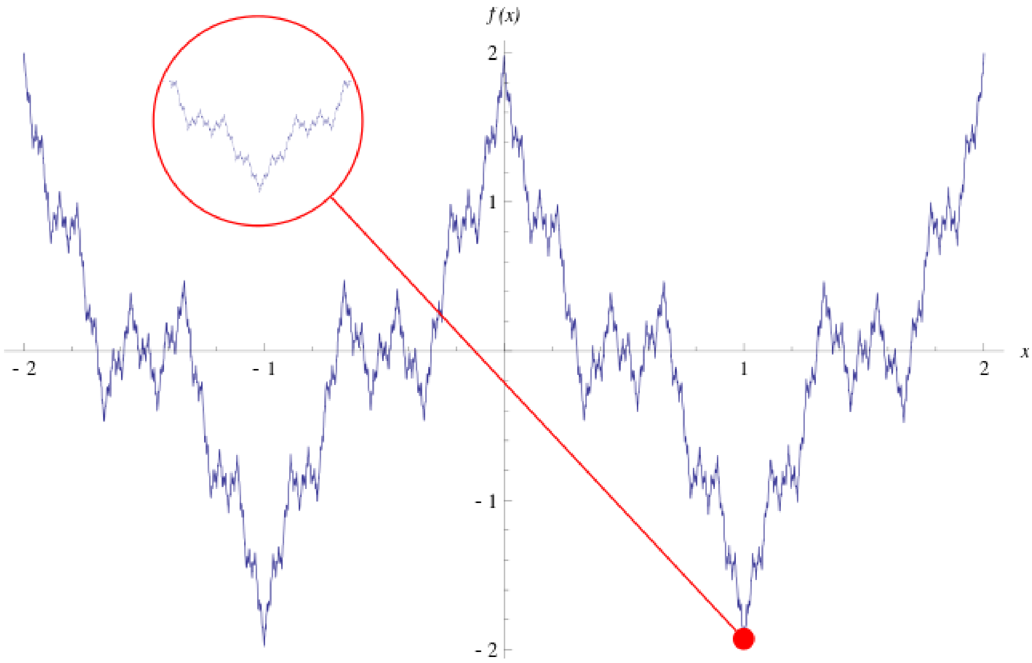
est continue en 0 mais pas dérivable en 0.



Remarque :
En fait, il existe même des fonctions qui sont continues partout mais dérivables nulle part. On peut tout faire en maths. Mais ce sont de vrais monstres. On va tâcher d'éviter d'avoir envie de les étudier, même si ça ne va pas être facile.

Un bon exemple de telles fonctions sont les fonctions de Weierstrass définies par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(\pi b^n x) \qquad \text{avec} \qquad 0 < a < 1 \text{ et } ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$$



Fonction de Weierstrass

1.2 Fonction dérivée

Définition 1.4 (Fonction dérivable sur un intervalle) :
Soit $\alpha < \beta$, $f :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$.

- On dit que f *est dérivable sur* $]\alpha, \beta[$ si f est dérivable en tout point de $]\alpha, \beta[$.
- On note $\mathcal{D}^1(]\alpha, \beta[, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur $]\alpha, \beta[$.

Proposition 1.3 (Les fonctions dérivables sont continues) :
Soit $\alpha < \beta$

$$\mathcal{D}^1(]\alpha, \beta[, \mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{C}(]\alpha, \beta[, \mathbb{R})$$

Donc les fonctions dérivables sont continues. Mais la réciproque est fausse. Et il existe des fonctions continues non dérivables.

!!! ATTENTION !!!

Les fonctions continues ne sont pas forcément dérivables. Ce n'est qu'une inclusion qui n'est pas une égalité. Pensez aux fonctions de Weierstrass !

!!! ATTENTION !!!

Le domaine de dérivabilité (l'endroit où f est dérivable) est toujours inclus dans l'ensemble de continuité. Et pas l'inverse ! Autrement dit, si f est définie sur $I\mathcal{D}$, continue sur $\mathcal{D}_c$, dérivable sur $\mathcal{D}_d$, alors $\mathcal{D}_d \subset \mathcal{D}_c \subset \mathcal{D}$.

Définition 1.5 (Fonction dérivée) :
Soit $\alpha < \beta$, $f \in \mathcal{D}^1(]\alpha, \beta[, \mathbb{R})$.

On définit la fonction dérivée de f notée f', par

$$f' : \begin{array}{ccc}]\alpha, \beta[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \end{array}$$

!!! ATTENTION !!!

On ne peut pas faire ce qu'on veut avec les notations. Et nous entrons ici dans les problèmes fins et délicats qui seront développés dans la suite du cours.

La fonction dérivée n'est pas vraiment une fonction, du moins pas au sens où nous l'entendons. On a pas accès à la fonction, on ne peut pas la traiter de la même manière qu'une "vraie fonction". La dérivée est une sorte d'ombre associée, collée à la fonction dès qu'elle dérivable. Elle n'a pas d'existence en elle-même, elle n'a pas d'existence propre. Et son nom doit impérativement rappeler de quelle "vraie" fonction elle est tirée.

La notation prime est là pour ça. On accole au nom d'une fonction un petit supplément pour spécifier d'où elle provient, de quelle fonction elle est la dérivée.

⚠ Il faut s'appuyer sur le sens des mots. La dérivée est un produit dérivée de la fonction un peu comme un mug est un produit dérivé de la licence Star Wars (ou tout autre licence cinématographique). Et on ne peut pas décider que cotre mug préféré licorne fasse partie intégrante de la licence Star Wars. Même si les licornes ont tout pour être du côté lumineux de la Force. Elle n'en font pas partie. Votre mug-licorne n'a pas le tampon Star Wars. Le seul moyen de faire en sorte que ce le soit, serait de modifier l'histoire de Star Wars, de modifier les films pour y inclure une planète à licornes. Et dans ce cas, votre mug préféré pourrait alors faire partie de la licence.

Vous ne pouvez pas décider qu'un objet choisis soit partie intégrante de la licence Star Wars. On ne peut pas faire rentrer n'importe quoi dans la licences Star Wars. Il faudrait modifier l'histoire pour que l'objet devienne alors un produit dérivé de la licence.

On ne peut donc pas utiliser la notation prime n'importe comment. Elle n'a de sens seulement accolé au nom d'une fonction et dans en aucun autre cas.

On rappelle les dérivées que vous connaissez tous par cœur :

$f(x)$	$\rightsquigarrow$	$f'(x)$	$]\alpha, \beta[$	Paramètre
e^x		e^x	$\mathbb{R}$	
$\ln x$		$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	
x^n		nx^{n-1}	$\mathbb{R}$	$n \in \mathbb{N}$
$\frac{1}{x^n}$		$\frac{-n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$	$n \in \mathbb{N}$
x^α		$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\alpha \in \mathbb{R}$
$\sqrt{x}$		$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$	$(\alpha = 1/2)$
$\cos(x)$		$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$	
$\sin(x)$		$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	
$\tan(x)$		$1 + \tan(x)^2 = \frac{1}{\cos(x)^2}$	$\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$	$k \in \mathbb{Z}$
$\arccos(x)$		$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1, 1[$	
$\arcsin(x)$		$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1, 1[$	
$\arctan(x)$		$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	
$\mathrm{ch}(x)$		$\mathrm{sh}(x)$	$\mathbb{R}$	
$\mathrm{sh}(x)$		$\mathrm{ch}(x)$	$\mathbb{R}$	
$\mathrm{th}(x)$		$\frac{1}{\mathrm{ch}(x)^2} = 1 - \mathrm{th}(x)^2$	$\mathbb{R}$	

!!! ATTENTION !!!

Attention aux notations. On ne peut utiliser la notation $'$ que sur le nom d'une fonction. On donne un nom à une fonction et obtient un nom canonique pour la dérivée : il suffit d'accoler un $'$ au nom de la fonction. Mais on ne peut le faire que pour une fonction qui a un nom. Ça n'a pas de sens autrement. Ce n'est pas une opération. Il ne faut surtout pas le faire comme vous le faites en physique. f' est la fonction dérivée de f.

Définition 1.6 (Primitive) :
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.
On dit que $F : I \to \mathbb{R}$ *est une primitive de* f, si $F \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$ et $F' = f$.

On a ici la notion de primitive. Mais on ne sait pas encore caractérisé les fonctions qui admettent des primitives. On ne peut pas encore savoir à l'avance si une fonction admet une primitive ou non. Il va falloir attendre le cours sur l'intégration pour le savoir. Patience.

!!! ATTENTION !!!

⚠ Ne pas confondre dérivée et la fonction qui est égale à la dérivée ! Une dérivée n'a pas de domaine de définition. Ce n'est pas une "vraie" fonction, elle n'existe pas en elle-même. La dérivée n'est que l'ombre d'une fonction et n'a de sens qu'à l'endroit où la fonction dont elle est la dérivée, est dérivable.

Exemple 1.4 :
On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$. Déterminer le domaine de définition de f, son domaine de dérivabilité et le domaine de définition de la fonction égale à la fonction dérivée.

!!! ATTENTION !!!

Il faut être TRÈS précis. Il existe de véritable monstre (au sens dégoulinant, effrayant du terme) en mathématique. Il existe des fonctions continues non dérivables [a]; des fonctions continues partout dérivables nulle part [b]; des fonctions dérivables partout de dérivées non continues [c]; des fonctions dérivables partout et de dérivées continues en presque aucun points [d]; des fonctions dérivables en 0 avec $f'(0) > 0$ et pourtant qui ne sont pas croissantes au voisinages de 0 [e]; etc

a. la valeur absolue par exemple

b. les fonctions de Weierstrass

c. $x \mapsto x^2 \sin(1/x)$

d. avec des séries de fonctions bien choisies, la dérivée sera continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et discontinue en tout point de $\mathbb{Q}$

e. $f(x) = x^2 \sin(1/x) + x/4$ prolongée par continuité aura $f'(0) = 1/4$ mais ne sera pas croissante sur aucun voisinage de 0

!!! ATTENTION !!!

Il faut prendre beaucoup de gants en analyse, beaucoup des propriétés "naturelles" ou "intuitives" ne sont vraies en réalité que sur des intervalles.

Par exemple, a strictement parlé, $x \mapsto 1/x$ n'est pas continue sur l'ensemble ouvert $\mathbb{R}^*$; la fonction $x \mapsto -1/x$ a une dérivée strictement positive et pourtant n'est pas croissante sur l'ensemble $\mathbb{R}^*$. Les propriétés ne fonctionnent bien (en général) que sur des intervalles!

1.3 Opérations

À ce stade, il faudrait montrer que l'on peut définir des opérations sur les fonctions dérivables en un point a. Mais comme vous connaissez déjà la suite de l'histoire, vous savez qu'ensuite on va dire qu'on peut le faire sur des intervalles entiers et refaire toutes ces opérations sur les intervalles. Donc on va sauter l'étape des opérations sur les dérivées ponctuelles et passer directement à la notion sur un intervalle. De toute façon, la démonstration des opérations de dérivabilité sur des intervalles nécessite de repasser par la définition et donc de démontrer les opérations sur les dérivées ponctuelles. Donc on va tout faire d'un coup. On va énoncer les propositions sur les intervalles et la démo va constituer à démontrer les énoncés ponctuelles en tous points.

1.3.1 Opérations classiques

Proposition 1.4 (Opérations classiques [✓]) :
Soit $\alpha < \beta,\ f, g \in \mathcal{D}^1(]\alpha,\beta[,\mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors

(i) $\mathcal{D}^1(]\alpha,\beta[,\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-ev et la dérivation est une application linéaire de $\mathcal{D}^1(]\alpha,\beta[,\mathbb{R})$ dans $\mathcal{F}(]\alpha,\beta[,\mathbb{R})$ (donc $\lambda f + \mu g \in \mathcal{D}^1(]\alpha,\beta[,\mathbb{R})$ et $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$).

(ii) $fg \in \mathcal{D}^1(]\alpha,\beta[,\mathbb{R})$ et $(fg)' = f'g + fg'$. [*Formule de Leibniz*]

Démonstration :
Soit $a \in]\alpha,\beta[$ et $x \in]\alpha,\beta[\setminus\{a\}$.

$$\frac{(f+\lambda g)(x) - (f+\lambda g)(a)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \lambda\frac{g(x)-g(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} f'(a) + \lambda g'(a)$$

$$\frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(x) + f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

□

Remarque :
On notera que la dérivation est une applications linéaire à valeur dans $\mathcal{F}(]\alpha,\beta[,\mathbb{R})$. Une dérivée peut très bien ne pas être continue. Par exemple, $f(x) = x^2\sin(1/x)$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pourtant $f'(x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x)$ qui n'a donc pas de limite en 0. Elle n'est pas continue en 0.

Corollaire 1.5 (Avec une récurrence) :
Soit $\alpha < \beta$, $n \in \mathbb{N}$ et $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{D}^1(]\alpha,\beta[,\mathbb{R})$.

Alors $\sum_{k=1}^n f_k = f_1 + \cdots + f_n$ et $\prod_{k=1}^n f_k = f_1 \times \cdots \times f_n$ sont dérivables sur $]\alpha,\beta[$ et

$$\left(\sum_{k=1}^n f_k\right)' = \sum_{k=1}^n f_k'$$

et

$$\left(\prod_{k=1}^n f_k\right)' = \sum_{k=1}^n (f_1 \times \cdots \times f_{k-1} \times f_k' \times f_{k+1} \times \cdots \times f_n) = \sum_{k=1}^n \left(f_k' \prod_{\substack{1\leq i\leq n \\ i\neq k}} f_i\right)$$

Démonstration :
Il suffit de faire une récurrence sur les opérations avec seulement deux fonctions. □

En particulier

$$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$$

Exemple 1.5 :
Les fonctions polynomiales sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Proposition 1.6 (Dérivée de l'inverse d'une fonction [✓]) :
Soit $\alpha < \beta$ et $f \in \mathcal{D}^1(]\alpha, \beta[, \mathbb{R})$ ne s'annulant pas sur $]\alpha, \beta[$.

Alors $1/f$ est dérivable et

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$$

Démonstration :
Soit $a \in]\alpha, \beta[$.

$$\frac{(1/f)(x) - (1/f)(a)}{x - a} = \frac{f(a) - f(x)}{x - a} \frac{1}{f(x)f(a)} \xrightarrow[x \to a]{} \frac{-f'(a)}{f(a)^2}$$

car f est continue en a. □

Corollaire 1.7 :
Soit $\alpha < \beta$ et $f, g \in \mathcal{D}^1(]\alpha, \beta[, \mathbb{R})$.

Si g ne s'annule pas sur $]\alpha, \beta[$, alors $f/g \in \mathcal{D}(]\alpha, \beta[, \mathbb{R})$ et

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Démonstration :
$f/g = f \times 1/g$ et on applique ce qui précède. □

1.3.2 Composition

Théorème 1.8 (Dérivée d'une composée [✓]) :
soit $\alpha < \beta$ et $\gamma < \delta$, $f \in \mathcal{D}^1(]\alpha, \beta[, \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{D}^1(]\gamma, \delta[, \mathbb{R})$ tel que $f(]\alpha, \beta[) \subset]\gamma, \delta[$.
Alors $g \circ f \in \mathcal{D}^1(]\alpha, \beta[, \mathbb{R})$ et

$$(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$$

Démonstration (Esquisse) *:*
Soit $a \in]\alpha, \beta[$. Supposons que f ne prend pas la valeur $f(a)$ sur un voisinage de a épointé. Autrement, supposons $\exists \eta \in]0, \min(a - \alpha, \beta - a)[$ tel que $\forall x \in]a - \eta, a + \eta[\subset]\alpha, \beta[$, $x \neq a \implies f(x) \neq f(a)$. Alors

$$\forall x \in]a - \eta, a + \eta[\setminus \{a\}, \; \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} = \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Or f est dérivable en a, donc f est continue en a donc $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$, par caractérisation de la continuité par les limites. Et par composition de limites $\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \xrightarrow[x \to a]{} g'(f(a))$. Donc, par dérivabilité de f en a,

$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} \xrightarrow[x \to a]{} f'(a) g'(f(a)).$$

□

On donne quelques formules de dérivées de composées classique à connaître (attention, on ne précise pas l'ensemble de dérivabilité, donc c'est sous condition de l'existence des formules) :

$f \circ u$	$\rightsquigarrow$ $u' f \circ u$	paramètre
e^u	$u'e^u$	
$\ln \circ u$	$\frac{u'}{u}$	
u^α	$\alpha u' u^{\alpha-1}$	$\alpha \in \mathbb{R}$
$\cos \circ u$	$-u' \sin \circ u$	
$\sin \circ u$	$u' \cos \circ u$	
$\tan \circ u$	$(1 + (\tan \circ u)^2)u' = \frac{u'}{(\cos \circ u)^2}$	
$\arccos \circ u$	$-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	
$\arcsin \circ u$	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	
$\arctan \circ u$	$\frac{u'}{1+u^2}$	
$\mathrm{ch} \circ u$	$u' \,\mathrm{sh} \circ u$	
$\mathrm{sh} \circ u$	$u' \,\mathrm{ch} \circ u$	

Exemple 1.6 :
On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\arcsin(x)}$. Déterminer le domaine de définition de f, de dérivabilité de f et la dérivée de f.

Proposition 1.9 (Dérivée ponctuelle d'une réciproque) :
Soit $\alpha < \beta$, $\gamma < \delta$, $f \in \mathcal{D}^1(]\alpha, \beta[,]\gamma, \delta[)$ et bijective.

Si f est dérivable en $a \in]\alpha, \beta[$ et $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ et

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

En d'autres termes,

$$\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Démonstration :
D'après le chapitre sur la continuité, on sait que f^{-1} est continue sur $]\gamma, \delta[$ et

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} f'(a) \quad \text{et} \quad f^{-1}(y) \xrightarrow[y\to b]{} a$$

Soit $x \in]\alpha, \beta[$ et $y \in]\gamma, \delta[$ tels que $y = f(x)$. Par bijectivité de f, $x \neq a \iff y \neq b$ et $x \to a \iff y \to b$. On a donc

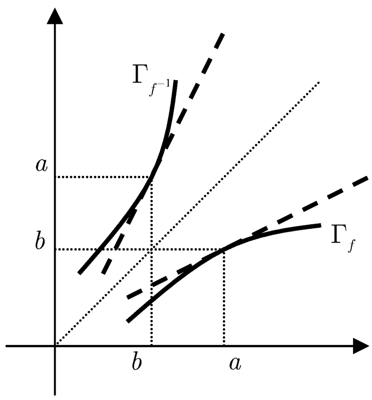
$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(b))}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)} = \frac{y-b}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)} \xrightarrow[y\to b]{} f'(a)$$

Et $f'(a) \neq 0$ donc $\frac{y-b}{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)}$ est non nul sur tout un voisinage de b. Et donc

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y-b} \xrightarrow[y\to b]{} \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

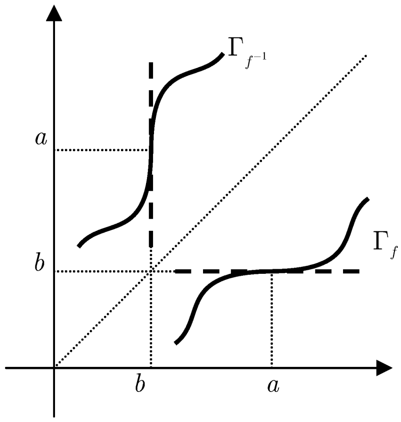
□

Remarque :
Comme les graphes de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la première diagonale, la tangente à $\mathrm{Gr}(f)$ en a de pente α est transformé, géométriquement par symétrie, en une tangente à $\mathrm{Gr}(f^{-1})$ en $b = f(a)$ de pente $1/\alpha$.



!!! ATTENTION !!!

La condition $f'(a) \neq 0$ est indispensable. Si $f'(a) = 0$, f a une tangente horizontale en a qui devient alors une tangente verticale pour f^{-1} en $b = f(a)$.



Corollaire 1.10 (Dérivabilité d'une réciproque [✓]) :
Soit $\alpha < \beta$ et $\gamma < \delta$.

Si $f \in \mathcal{D}^1(]\alpha, \beta[,]\gamma, \delta[)$ est une bijection telle que $\forall x \in]\alpha, \beta[,\ f'(x) \neq 0$, alors $f^{-1} \in \mathcal{D}^1(]\gamma, \delta[,]\alpha, \beta[)$ et

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

La formule qu'on obtient peut également être retrouvé en dérivant la relation $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_{]\gamma,\delta[}$. Attention toutefois, ce n'est pas une preuve de la dérivabilité de la réciproque ! Mais ça permet simplement de pouvoir retrouver la formule facilement et rapidement.

Exemple 1.7 :
Soit la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} + x + 1 \end{array}$$

Montrer que c'est une bijection et étudier la dérivabilité de sa réciproque.

1.4 Dérivée à droite et à gauche

Nous allons définir la version dérivabilité des semi-continuités définies dans le chapitre précédente. Et nous allons ensuite faire le lien entre les semi-dérivabilités et la dérivabilité. Exactement comme pour la continuité.

Définition 1.7 (Semi-dérivée) :
Soit $\alpha < \beta$ et $f :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$. Soit $a \in]\alpha, \beta[$.

- On dit que f *est dérivable à droite en* a si $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ converge quand $x \to a^+$, et dans ce cas, on note
$$f'_d(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
- On dit que f *est dérivable à gauche en* a si $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ converge quand $x \to a^-$, et dans ce cas, on note
$$f'_g(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Remarque :
Grâce à cette définition, on pourrait maintenant se placer sur des intervalles quelconques I de $\mathbb{R}$ et donc étudier les semi-dérivabilité (à droite ou à gauche) sur les bornes de l'intervalle si elles sont contenues dans l'intervalle. Mais pour des raisons de praticité, de simplicité de théorèmes dans certains cas etc, il est plus agréable de continuer à se placer dans des intervalles ouverts.

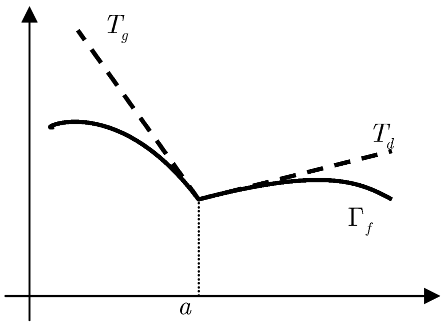
Évidemment, dans le cas où l'on aura une fonction définie sur un intervalle contenant ses bornes, il faudra, évidemment étudier les semi-dérivabilités aux bornes de l'intervalle et pas les dérivabilités.

Exemple 1.8 :
La fonction $f(x) = |x|$ est dérivable à gauche et à droite en 0 et $f'_d(0) = 1$ et $f'_g(0) = -1$. Mais elle n'est pas dérivable en 0.

Définition 1.8 (Demi-tangente) :
Soit $\alpha < \beta$ et $f :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ et $a \in]\alpha, \beta[$.

- Si f est dérivable à droite en a, on définit *la demi-tangente à* $\mathrm{Gr}(f)$ *en* a *à droite* par
$$\mathcal{T}_a^+ : y = f'_d(a)(x - a) + f(a)$$
définie seulement pour $x \geq a$.

- De la même manière, si f admet une dérivée à gauche en a, on définit *la demi-tangente à* $\mathrm{Gr}(f)$ *à gauche en* a par
$$\mathcal{T}_a^- : y = f'_g(a)(x-a) + f(a)$$
définie pour $x \leq a$.



Proposition 1.11 (Caractérisation dérivabilité par semi-dérivabilité [✓]) :
Soit $\alpha < \beta$ et $f :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ et $a \in]\alpha, \beta[$. On a équivalence :

(i) f est dérivable en a

(ii) f admet une dérivée à droite et à gauche en a et $f'_g(a) = f'_d(a)$.

Et dans ce cas, $f'_g(a) = f'(a) = f'_d(a)$.

Démonstration :
Le taux de variations $\tau_f(x, a)$ converge en a ssi il admet une limite à droite et une limite à gauche en a et ces limites sont égales. Ça vient des résultats sur les limites. □

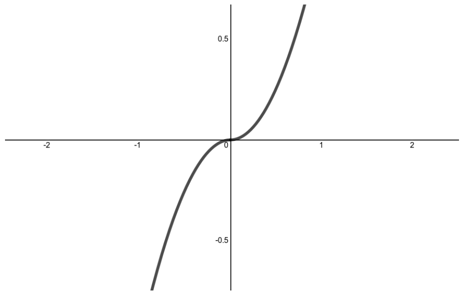
Remarque :
Ce théorème est la version dérivabilité de la caractérisation de la continuité par les semi-continuités. La semi-dérivabilité est à la dérivabilité ce que la semi-continuité est à la continuité.

Exemple 1.9 :

Étudier la dérivabilité de la fonction f définie par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array}$$

et calculer sa dérivée.



Exemple 1.10 :
On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \sqrt{x} & x \in [0,1] \\ ax^2 + bx + c & x > 1 \end{cases} \end{array}$$

Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ pour que f soit continue sur $\mathbb{R}_+$ puis pour que f soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

1.5 Fonctions de Classe $\mathcal{C}^k$

Définition 1.9 (Fonctions k fois dérivables [✓]) :
Soit $]\alpha < \beta[$, $f :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

- On dit que f *est k-fois dérivable sur* $]\alpha, \beta[$ (ou admet une dérivée d'ordre k, notée $f^{(k)}$), si $f^{(k-1)}$ est dérivable. Et dans ce cas $f^{(k)} = (f^{(k-1)})'$.
  Par convention, $f^{(0)} = f$ et $f^{(1)} = f'$. On note ensuite $f'' = f^{(2)}$ et parfois $f''' = f^{(3)}$.
  On note $\mathcal{D}^k(]\alpha, \beta[, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions k-fois dérivables sur $]\alpha, \beta[$.
- On note $\mathcal{C}^k(]\alpha, \beta[, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{D}^k(]\alpha, \beta[, \mathbb{R})$ dont la k-ème dérivée est continue.
- On dit que f est infiniment dérivable si f est k-fois dérivable pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. On notera $\mathcal{C}^\infty(]\alpha, \beta[, \mathbb{R})$ les fonctions infiniment dérivables sur $]\alpha, \beta[$.

Proposition 1.12 (Lien $\mathcal{C}^k$ et $\mathcal{D}^k$ [✓]) :
Soit $\alpha < \beta$. Alors

$$\ldots \subsetneq \mathcal{D}^{k+1} \subsetneq \mathcal{C}^k \subsetneq \mathcal{D}^k \subsetneq \mathcal{C}^{k-1} \subsetneq \ldots \subsetneq \mathcal{C}^1 \subsetneq \mathcal{D}^1 \subsetneq \mathcal{C}^0.$$

Et donc

$$\mathcal{C}^\infty(]\alpha, \beta[, \mathbb{R}) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{C}^k(]\alpha, \beta[, \mathbb{R}) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} \mathcal{D}^k(]\alpha, \beta[, \mathbb{R}).$$

Démonstration :
On va montrer $\mathcal{D}^{k+1} \subset \mathcal{C}^k \subset \mathcal{D}^k$ et il suffira de faire une récurrence pour montrer la relation. Les premiers relations (pour $k = 0, 1$) ont déjà été montré plus haut sans le dire (une fonction dérivable est continue).

Si $f \in \mathcal{D}^{k+1}(]\alpha, \beta[, \mathbb{R})$. Alors $f^{(k+1)}$ existe donc $f^{(k)}$ est dérivable, donc $f^{(k)}$ est continue. Donc $f \in \mathcal{C}^k(]\alpha, \beta[, \mathbb{R})$. Et donc $f^{(k)}$ existe donc f est k-fois dérivable donc $f \in \mathcal{D}^k(]\alpha, \beta[, \mathbb{R})$.

L'expression de $\mathcal{C}^\infty$ s'obtient par passage à l'intersection et les inclusions. □

Il faudrait démontrer que ce sont des inclusions strictes. C'est à dire, pour chaque $k \in \mathbb{N}$, trouver une fonction est k-fois dérivable mais donc la dérivée k-ème n'est pas continue ; une fonction k-fois dérivable de dérivée k-ème continue mais non dérivable etc. Il y a des contre-exemples. Mais ils sont un peu compliqués. Trop pour que ce soit raisonnable de les mettre dans un cours. Mais vous devez commencer à avoir l'intuition que tout ne fonctionne pas comme on veut.

On pourra construire ces contre-exemples plus facilement dès que le cours sur l'intégration aura été fait.

Exemple 1.11 :
Montrer que la fonction

$$f \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

et dans $\mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mais n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.

Remarque :
Dans les rédactions, il ne faut pas oublier que $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ est un ensemble. Ce n'est pas un adjectif. Donc, "f est de classe $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$" ne peut pas avoir de sens. En revanche, on peut extraire le caractère $\mathcal{C}^k$ de cette notion. Et donc une fonction f peut être de classe $\mathcal{C}^k$ sur I. Mais une fonction ne peut pas être un ensemble.

Proposition 1.13 (Caractérisation des applications k fois dérivables) :
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ avec I un intervalle non vide et non réduit à un point. On a équivalence entre

1. f est $k+1$ fois dérivable
2. f est dérivable et f' est k fois dérivable.

De plus $(f^{(k)})' = f^{(k+1)} = (f')^{(k)}$

Démonstration :
Ce résultat provient simplement de l'associativité de la composition pour les endomorphismes d'un ev. Ici, on considère la dérivation qui est une application linéaire et l'associativité de la composition dans $\mathcal{L}\Big(\mathcal{D}^{k+1}(]\alpha,\beta[,\mathbb{R}),\mathcal{F}(]\alpha,\beta[,\mathbb{R})\Big)$. □

Ce théorème peut paraître évident, mais c'est important. En gros, l'ordre dans lequel on dérive n'importe pas. Que l'on dérive d'abord f, puis la dérivée k fois, ou que l'on dérive k fois f puis la dérivée k-ème encore une fois, c'est la même chose. C'est intuitivement relativement naturel. Mais l'intuition a tendance a être mise à rude épreuve.

Exemple 1.12 :
$\arccos$, $\arcsin$ et $\arctan$ sont infiniment dérivable sur leur domaines de dérivabilité respectifs.

Proposition 1.14 ($\mathcal{D}^n$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) :
Soit $\alpha < \beta$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Alors $\mathcal{D}^n(]\alpha,\beta[,\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et la dérivation est une application linéaire de $\mathcal{D}^n(]\alpha,\beta[,\mathbb{R}) \to \mathcal{D}^{n-1}(]\alpha,\beta[,\mathbb{R})$.

En particulier, $\forall f,g \in \mathcal{D}^n(]\alpha,\beta[,\mathbb{R})$, $\forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}$,

$$(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$$

Ce n'est encore que la composition d'applications linéaires.

Théorème 1.15 (Formule de Leibniz [✓]) :
Soit $\alpha < \beta$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f,g \in \mathcal{D}^n(]\alpha,\beta[,\mathbb{R})$.

Alors $fg \in \mathcal{D}^n(]\alpha,\beta[,\mathbb{R})$ et

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Démonstration :
On va le montrer par récurrence. On a déjà vu que c'était vrai pour $n = 1$.

Supposons que le théorème soit vrai pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons dans ce cas que si f et g sont $(n+1)$-fois dérivable, le produit l'est également et la formule est correcte.

On sait, par hypothèse de récurrence, $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$. Mais chacune des fonction $f^{(k)}$, $g^{(n-k)}$ est dérivable pour tout les $k \in \{0, \ldots, n\}$. Par opérations sur les fonctions dérivables, on en déduit que $(fg)^{(n)}$ est dérivable. Donc fg est $(n+1)$-fois dérivable. Et alors

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} &= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \right)' \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k)} g^{(n-k)} \right)' && \text{par linéarité de la dérivation} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n-k+1)} \right) && \text{dérivée d'un produit} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n-k+1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) f^{(k)} g^{(n-k+1)} + f^{(n+1)} g + f g^{(n+1)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)} + f^{(n+1)} g + f g^{(n+1)} && \text{Pascal} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}
\end{aligned}$$

□

Proposition 1.16 (Dérivée n-ème de l'inverse) :
Soit $\alpha < \beta$, $n \in \mathbb{N}^*$, $g \in \mathcal{D}^n(]\alpha, \beta[, \mathbb{R})$.

Si g ne s'annule pas sur $]\alpha, \beta[$, alors $1/g \in \mathcal{D}^n(]\alpha, \beta[, \mathbb{R})$.

Remarque :
On pourrait donner une formule pour la dérivée n-ème de f/g, mais la formule est beaucoup plus compliqué, dans le cas général, que la formule de Leibniz.

Le plus simple est d'utiliser la formule de Leibniz dans un cas particulier en espérant que les dérivées successives soient relativement faciles à calculer.

Proposition 1.17 (n-dérivabilité des fonctions composées) :
Soit $\alpha < \beta$, $\gamma < \delta$, $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{D}^n(]\alpha,\beta[,\mathbb{R})$, $g \in \mathcal{D}^n(]\gamma,\delta[,\mathbb{R})$ et $f(]\alpha,\beta[) \subset]\gamma,\delta[$.
Alors $g \circ f \in \mathcal{D}^n(]\alpha,\beta[,\mathbb{R})$.

Remarque (Formule de Faà di Bruno) :
Il existe une formule pour la dérivée n-ème d'une composée. Mais elle est très compliqué pour pas grand chose. Elle n'est donc pas à connaître. Elle est attribué à Faà di Bruno en 1855. Il en existe plusieurs versions dont la plus simple est probablement :

$$(f \circ g)^{(n)}(x) = \sum_{\substack{m_1,\dots,m_n \in \mathbb{N} \\ m_1+2m_2+\dots+nm_n=n}} \frac{n!}{\prod_{k=1}^{n} m_k!} f^{(m_1+\dots+m_n)}(g(x)) \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{g^{(j)}(x)}{j!}\right)^{m_j}.$$

Proposition 1.18 (Dérivée n-ème d'une réciproque) :
Soit I, J deux intervalles non vides et no réduit à un point. Soit $f : I \to J$ une bijection.
Si $f \in \mathcal{D}^n(I,J)$ et si f' ne s'annule pas sur I, alors $f^{-1} \in \mathcal{D}^n(J,I)$.

Là non plus, on ne donnes pas de formule générale pour la dérivée n-ème de f^{-1}, mais ce serait possible. Il faudrait utiliser l'expression de la dérivée n-ème d'un quotient. Et c'est là que ça coince.

Remarque :
Toutes les fonctions de référence sont de classes $\mathcal{C}^\infty$ sur leur ensemble de dérivabilité.

Exemple 1.13 :
On considère $f(x) = (x^2 + 2x - 3)e^x$. Montrer que f est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer la dérivée n-ème, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque :
Il est souvent nécessaire de faire une récurrence en calculer les dérivées successives. Ce qui est assez naturel.

2 Étude globale des fonctions dérivables

Pour simplifier les notations et parce que maintenant on sait dériver à droite seulement ou à gauche, on va se replacer sur un intervalle quelconque I de $\mathbb{R}$. En plus, ce qui va nous intéresser ici est des études de f sur des intervalles. Si besoin est, on précisera la forme de l'intervalle que l'on considère.

Donc I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point (pour qu'il se passe quelque chose et qu'on ait la place de travailler).

2.1 Extremum

Définition 2.1 (Minimum local, Maximum local, Extremum local) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point, $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.

- On dit que f *admet un minimum local en* a si

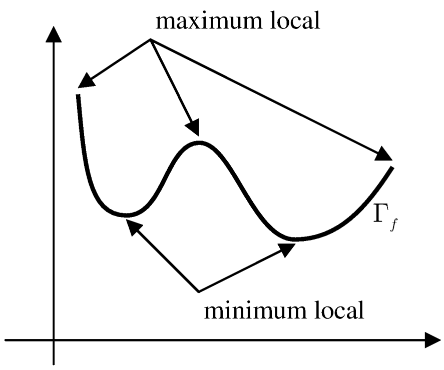
$$\exists \eta > 0,\ \forall x \in I \cap [a-\eta, a+\eta],\ f(x) \geq f(a)$$

- On dit que f *admet un maximum local en* a si

$$\exists \eta > 0,\ \forall x \in I \cap [a-\eta, a+\eta],\ f(x) \leq f(a)$$

- On dit que f *admet un extremum local en* a si f admet soit un maximum, soit un minimum local en a.

Les notions d'extremums sont des notions locales. Comme toutes les notions locales, elles ne sont valables que dans un (petit) voisinage autour du point que l'on considère.



Remarque :
Attention ! Dans le cas où a est une borne de l'intervalle, le voisinage que l'on considère n'est qu'un demi-voisinage. Il faut rester dans l'intervalle où la fonction est définie.

Ce points seront à manipuler avec plus de précautions qu'à l'intérieur de l'intervalle.

Définition 2.2 (Minimum global, Maximum global, Extremum global) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$.

- On dit que f *admet un minimum global en* $a \in I$ si f admet un minimum sur tous l'intervalle I, *i.e.* si

$$\forall x \in I,\ f(x) \geq f(a)$$

- On dit que f *admet un maximum global en* $a \in I$ si f admet un maximum sur tous l'intervalle I, *i.e.* si

$$\forall x \in I, \; f(x) \leq f(a)$$

- On dit que f *admet un extremum global en* $a \in I$ si f admet soit un maximum global, soit un minimum global en a.

Les notions d'extremums globaux sont des notions globales. Elles ne dépendent d'aucun voisinage. Si c'est global, c'est que c'est valable pour la fonction entière, globalement.

Remarque :
On retrouve alors la notion de maximum et minimum définit dans le chapitre sur les relations d'ordres. Le minimum de la fonction est donc $\min_I f$ et est atteint en un point a. Idem pour le maximum.

Proposition 2.1 (Lien entre extremum global et extremum local) :
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $a \in I$.

Si a est un extremum global de f alors c'est un extremum local de f.

Démonstration :
C'est facile. Il suffit de considérer I comme voisinage de a. Et boum. □

Théorème 2.2 (Recherche d'extremums [✓]) :
Soit $\alpha < \beta$ et $f :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ et $a \in]\alpha, \beta[$.

Si a est un extremum local de f et si f est dérivable en a, alors

$$f'(a) = 0$$

Démonstration :
On ne va traiter que le cas où a est un minimum local. Si c'est un maximum, il suffira d'appliquer ce qu'on aura fait à $-f$ pour qui a deviendra un minimum.

On pose $I =]\alpha, \beta[$ pour se simplifier les écritures.

On sait donc $\exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in I \cap [a - \eta, a + \eta]$, $f(x) \geq f(a)$. Alors, pour $h \in]0, \eta]$, on a $\tau_f(a, a+h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \geq 0$. En passant à la limite (que l'on sait exister par hypothèse), on obtient $f'_d(a) = f'(a) \geq 0$ (on vient de faire la dérivée à droite).

Symétriquement, on considérant la dérivée à gauche, on trouve $\forall h \in [-\eta, 0[$, $\tau_f(a, a+h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \leq 0$ et donc, par passage à la limite, $f'_g(a) = f'(a) \leq 0$.

Finalement, on vient donc de montrer que $f'(a) \leq 0$ et $f'(a) \geq 0$. Donc $f'(a) = 0$. □

Remarque :
Ce théorème est INDISPENSABLE dans la recherche des extremums (locaux et/ou globaux) de f. Il faut donc, dans la pratique déterminer les zéros de la dérivée de f (qu'on appelle des points critiques). Ces points sont alors les extremums locaux potentiels. Il n'y a plus qu'à éliminer parmi cette liste les points qui ne sont pas des extremums. Il faut donc simplement vérifier. On obtient alors la liste des extremums locaux.

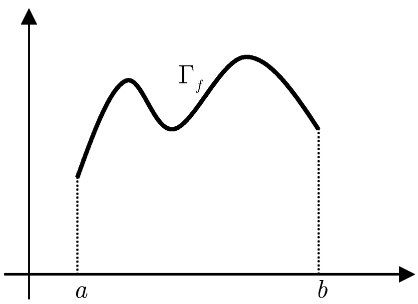
Si l'on veut les extremums globaux, il faut alors encore réduire la liste qu'on a à cette étape. C'est encore une simple histoire de vérification.

!!! ATTENTION !!!

Ce n'est PAS une équivalence. Ce n'est QUE une condition nécessaire. Donc chercher le lieux des zéros ne suffit pas. Ça fait une grosse partie du travail mais pas tout. Il faut encore travailler un peu après. Il faut éliminer les éléments perturbateurs. Typiquement, les points selles de la fonctions, c'est à dire les points où la fonction fait comme une sorte de petit plateau sans pour autant changer de variations (penser à la fonction $x \mapsto x^3$ en 0).

!!! ATTENTION !!!

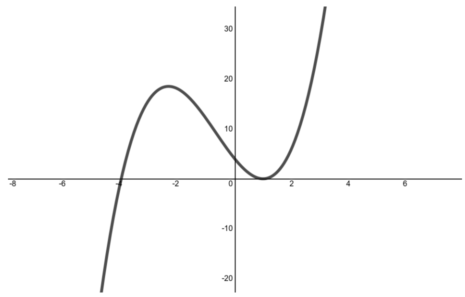
Il ne faut pas non plus que le point a que l'on considère soit une borne de l'intervalle. On peut très bien avoir un maximum local en une borne et pourtant ne pas avoir de dérivée nulle :



Cette fonction a un minimum en a qui est une borne mais où la dérivée ne s'annule clairement pas.

Exemple 2.1 :

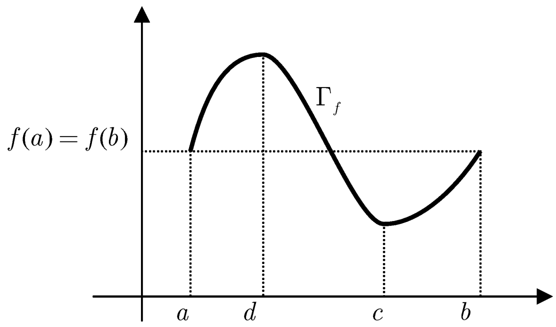
Déterminer les extremums de la fonction f définie par $f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 4$ sur $\mathbb{R}$.



Remarque :
La recherche d'extremums est surtout intéressantes pour des fonctions de plusieurs variables, mais ça, c'est une autre histoire...

2.2 Théorème de Rolle

Théorème 2.3 (Théorème de Rolle [✓]) :
Soit $a < b$ et $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}) \cap \mathcal{D}^1(]a,b[,\mathbb{R})$.
Si $f(a) = f(b)$, alors $\exists c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.



Démonstration :
La fonction f est continue sur $[a,b]$, donc elle admet un maximum et un minimum par théorème des bornes atteintes. Donc $\exists c, d \in [a,b]$ tels que $\forall x \in [a,b],\ f(c) \leq f(x) \leq f(d)$.

On pose $\alpha = f(a) = f(b)$. Si c et d sont les extrémités de $[a,b]$, alors $\forall x \in [a,b]$, $\alpha \leq f(x) \leq \alpha$. Et donc f est constante. Donc f' est nulle sur $]a,b[$ et donc n'importe que $c \in]a,b[$ vérifie $f'(c) = 0$.

Si c ou d n'est pas une borne de l'intervalle $[a,b]$, alors c'est (c ou d, celui qui n'est pas une borne) un extremum local de f sur $]a,b[$ et donc la dérivée de f s'y (en c ou d, celui qui est un extremum et pas une borne de l'intervalle) annule par le théorème de recherche d'extremum. □

Exemple 2.2 (Classique) :
Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \geq 3$. Montrer que la fonction $f(x) = x^n + ax + b$ admet au plus 3 racines réelles.

2.3 Accroissements finis

Théorème 2.4 (Théorème des accroissements finis (TAF) [✓]) :
Soit $a < b$ et $f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R}) \cap \mathcal{D}^1(]a,b[, \mathbb{R})$.
Alors
$$\exists c \in]a,b[,\ f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Démonstration :
On pose $\gamma = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. On considère la fonction

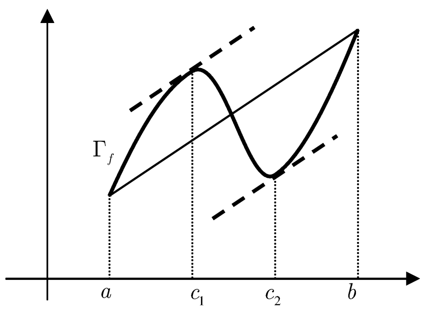
$$\varphi\ :\ \begin{array}{ccc} [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - \gamma(x-a) \end{array}$$

Par opérations sur les fonctions continues et dérivable, φ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. On a, par construction, $\varphi(a) = f(a)$ et $\varphi(b) = f(b) - \gamma(b-a) = f(b) - (f(b) - f(a)) = f(a)$. On peut donc appliquer le théorème de Rolle à φ et donc : $\exists c \in]a,b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$.

Mais $\forall x \in]a,b[,\ \varphi'(x) = f'(x) - \gamma = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Or $\varphi'(c) = 0$, donc $f'(c)(b-a) = f(b) - f(a)$. □

Remarque :

L'égalité $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ signifie que la tangente en c à f est parallèle à la droite joignant $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. Les deux droites ont le même coefficients directeurs.



Remarque :
En fait, le théorème de Rolle et le TAF sont équivalents. Ils ne sont que la reformulation l'un de

l'autre. On vient de voir que le TAF était un corollaire de Rolle. Mais Rolle est également un corollaire du TAF. En appliquant le TAF avec les hypothèses de Rolle, on a directement $f'(c) = 0$.

Ils s'impliquent donc mutuellement. Ils sont donc équivalents. Ce sont donc les mêmes théorèmes. Rolle étant formulé dans le cas particulier où $f(a) = f(b)$ et le TAF étant la formulation plus générale. Mais par un petit changement de variable astucieux (voir démo TAF), on peut se ramener de l'un à l'autre.

φ D'un point de vue cinématique, le TAF dit que la vitesse moyenne sur $[a, b]$ est égale à la vitesse instantanée pour un instant c entre a et b bien choisi. Tout le problème étant, bien entendu, de bien choisir l'instant.

Exemple 2.3 :
Résoudre sur $\mathbb{R}_+$ l'équation $5^x + 2^x = 3^x + 4^x$.

Théorème 2.5 (Inégalités des accroissements finis (IAF) [✓]) :
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle.

Si
$$\exists m, M \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ m \leq f'(x) \leq M$$
alors
$$\forall a, b \in I,\ a < b,\ m \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq M$$

Démonstration :
Soit $a < b$ dans I. On sait que f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Donc par le TAF, $\exists c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Et d'autre part, on a aussi $m \leq f'(c) \leq M$ ce qui termine la démonstration. □

φ D'un point de vue cinématique, l'IAF signifie que la vitesse moyenne est comprise entre le min et le max des vitesses instantanée (en prenant m le min et M le max).

Exemple 2.4 :
Montrer que $\forall x > 0$,

$$\frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x$$

Remarque :
Il est possible de reformuler l'IAF (et le TAF mais c'est moins intéressant) sans utiliser la condition $a \neq b$. Il suffit de multiplier par le dénominateur. Et lorsque $a = b$, on obtient 0 partout, ce qui reste valable. Autrement dit, si f est dérivable sur I, f' bornée sur I, alors $\forall a, b \in I$, avec $a \leq b$, $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$.

Il existe une autre formulation de l'IAF un peu plus symétrique et plus facile à retenir, équivalente mais un peu moins précise :

Théorème 2.6 (IAF (Reformulation)[✓]) :
Soit I un intervalle non vide et non réduit à un point, $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable.
Si $\exists M \geq 0$ tel que $\forall x \in I$, $|f'(x)| \leq M$, alors $\forall a, b \in I$, $|f(b) - f(a)| \leq M|b-a|$.

On notera que dans cette version, on impose pas $a \neq b$. On pourrait tout à fait le faire, et alors on pourrait diviser par $b - a$ ce qui ferait intervenir le taux d'accroissement entre a et b de f : $\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right| \leq M$.
On notera également qu'il n'est plus nécessaire de supposer que a et b sont dans un certain ordre. Le problème du signe qui pouvait changer le sens des inégalités est compensé par la valeur absolue.

Cette reformulation donne naissance à la définition plus générale :

Définition 2.3 (Fonction Lipschitzienne) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$.
On dit que f *est Lipschitzienne* (ou λ-Lipschitzienne) si $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x, y \in I$,

$$|f(x) - f(y)| \leq \lambda |x - y|$$

La constante λ est appelée constante de Lipschitz de f.

Corollaire 2.7 (Corollaire de l'IAF) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable.
Si $\exists M \geq 0$ tel que $|f'| \leq M$, alors f est M-Lipschitzienne.

Démonstration :
Il suffit d'appliquer l'IAF. □

Exemple 2.5 :
Les fonctions $\cos$, $\sin$ sont 1-Lipschitzienne.

Exemple 2.6 :
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \geq -2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$. Montrer (u_n) converge vers 2.

!!! ATTENTION !!!

Toutes fonctions dérivables de dérivée bornée est Lipschitzienne (et même toute fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment est Lipschitzienne par le théorème des bornes atteintes), mais toute fonction Lipschitzienne n'est pas forcément dérivable.

Contre-exemple :
La fonction $f(x) = \arccos\left(\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$ (cf un exo du TD sur les fonctions usuelles) mais n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$. Et pourtant f est $3/2$-Lipschitzienne.

La fonction $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$ mais 1-Lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, par inégalité triangulaire renversée.

Proposition 2.8 (Les fonctions Lipschitziennes sont continues) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction λ-Lipschitzienne.
Alors f est continue sur I.

Démonstration :
Soit $\lambda \geq 0$ la constante de Lipschitz de f.
D'abord, si $\lambda = 0$, alors la fonction f est constante, et donc continue. On suppose donc désormais que $\lambda > 0$. Soit $a \in I$ et $\varepsilon > 0$. On pose alors $\eta = \varepsilon/\lambda > 0$. Alors $\forall x \in I \cap [a-\eta, a+\eta]$, on a $|f(x) - f(a)| \leq \lambda|x-a| \leq \lambda\eta = \varepsilon$, par Lipschitziannité. □

!!! ATTENTION !!!

⚠ Évidemment, ce n'est qu'une implication. La réciproque est fausse. Toute application continue n'est pas forcément Lipschitzienne !

Exemple 2.7 :
La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ mais n'est pas Lipschitzienne. En effet, supposons qu'elle le soit. Donc, par définition, $\exists k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x, y \in \mathbb{R}_+$, $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq k|x-y|$. D'où en particulier, avec $y = 0$, $\forall x > 0$, $\sqrt{x} \leq kx$ et donc $\forall x > 0$, $1 \leq k\sqrt{x}$. Ce qui contredit la continuité en 0.

!!! ATTENTION !!!

⚠ La notion de Lipschitziannité dépend de l'intervalle considéré ! Une fonction peut ne pas être Lipschitzienne sur un intervalle mais l'être sur un autre.
En particulier, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas Lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$ mais l'est sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ avec $a > 0$ (cf IAF).

2.4 Dérivée et monotonie

Théorème 2.9 (Lien signe de la dérivée et monotonie) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. Alors :

(i) f est croissante sur $I \iff \forall x \in I,\ f'(x) \geq 0$

(ii) f est décroissante sur $I \iff \forall x \in I,\ f'(x) \leq 0$

(iii) f est constante sur $I \iff \forall x \in I,\ f'(x) = 0$.

On connaît ce théorème depuis longtemps, on en use et abuse, mais maintenant, on aura le droit de le faire.

Démonstration :
On ne traite bien sûr que le cas de la croissance. La décroissance étant l'opposé de la croissance et l'autre est les deux en même temps.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons f est croissante sur I. Soit $x \in I$. Donc $\forall h \geq 0$ tel que $x+h \in I$, $f(x+h)-f(x) \geq 0$. Mais $f'(x)$ est la limite de $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ quand $h \to 0^+$ (il suffit de regarder la dérivée à droite). Et $\forall h \geq 0$ tel que $x+h \in I$, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$ donc par passage à la limite, $f'(x) \geq 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit $a < b$ dans I. La fonction f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Donc, par le TAF, $\exists c \in]a,b[$ tel que $f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$. Mais $f'(c) \geq 0$ par hypothèse et $b-a \geq 0$ par choix de a et b. Donc $f(b)-f(a) \geq 0$ c'est à dire f croissante. $\square$

Je pense qu'il n'est pas nécessaire de donner un exemple ...

Théorème 2.10 (Monotonie stricte et signe de la dérivée) :
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ tel que $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$).

Alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur $[a,b]$.

Démonstration :
On refait pareil mais avec $f'(c) > 0$ au lieu de l'inégalité large dans le sens indirecte dans la proposition précédente. $\square$

On en donne une version un peu plus large, moins stricte :

Corollaire 2.11 :
Soit $a < b$ et $I \subset \mathbb{R}$ tel que $\overline{I} = [a, b]$.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable sur $]a, b[$ tel que $f' > 0$ (resp. $f' < 0$) sur $]a, b[$ sauf éventuellement en un nombre fini de points où f' s'annule ou n'est pas défini, alors f est strictement croissante (resp. décroissante).

Exemple 2.8 :
La fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exemple 2.9 :
Soit $f \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b \implies f'(c) \neq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Montrer que $f''(c) = 0$.

2.5 Théorème de classe $\mathcal{C}^1$ par prolongement

Théorème 2.12 (Théorème de la limite de la dérivée.) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ et $a \in I$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

Si f est continue sur I (donc en a en particulier) et dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et si $\exists \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $f'(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$, alors

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow[x \to a]{} \ell$$

Démonstration :
On suppose $f'(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

Pour tout $x \in I \setminus \{a\}$ tel que $x > a$, f est continue sur $[a, x]$ et dérivable sur $]a, x[$. Donc, on peut appliquer le TAF et on obtient : $\forall x \in I \cap]a, +\infty[$, $\exists c_x \in]a, x[$ tel que $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c_x)$.

Mais par encadrement, $c_x \xrightarrow[\substack{x \to a \\ x > a}]{} a$ et alors, comme $f'(y) \xrightarrow[y \to a]{} \ell$, par composition de limite, on a $f'(c_x) \xrightarrow[\substack{x \to a \\ x > a}]{} \ell$.

De même, $\forall x \in I \cap]-\infty, a[$, f est continue sur $[x, a]$ et dérivable sur $]a, x[$, donc par le TAF, $\forall x \in I \cap]-\infty, a[$, $\exists c_x \in]x, a[$ tel que $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c_x)$. On applique la même fin du raisonnement. Et donc, par caractérisation des limites par les demi-limites, on en déduit

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow[x \to a]{} \ell.$$

□

Corollaire 2.13 (Théorème de dérivabilité par prolongement [✓]) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$, $a \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$.
Si $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) \cap \mathcal{D}^1(I \setminus \{a\}, \mathbb{R})$ et si $f'(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.

Démonstration :
Il suffit d'utiliser la définition de la dérivabilité. □

Théorème 2.14 (Théorème de classe $\mathcal{C}^1$ par prolongement (aka théorème satanique) [✓]) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. Soit $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$.
Si $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^1(I \setminus \{a\}, \mathbb{R})$ et si $f'(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \in \mathbb{R}$, alors $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ et $f'(a) = \ell$.

Démonstration :
On a en particulier, $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) \cap \mathcal{D}^1(I \setminus \{a\}, \mathbb{R})$ et $f'(x) \to \ell \in \mathbb{R}$. Donc, par le théorème de la limite de la dérivée, f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$. Alors, $f'(x) \to \ell = f'(a)$. Donc, par caractérisation de la continuité par les limites, f' est continue en a et donc $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$. □

Théorème 2.15 (Théorème de classe $\mathcal{C}^1$ par prolongement [✓]) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point. Soit $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$.
Si $f \in \mathcal{C}^1(I \setminus \{a\}, \mathbb{R})$ et si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell_0 \in \mathbb{R}$ et $f'(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell_1$, alors f est prolongeable en a en posant $f(a) = \ell_0$ en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Et dans ce cas, $f'(a) = \ell_1$.

Démonstration :
C'est un mélange de tous les théorèmes précédents : on peut prolonger f par continuité en a en posant $f(a) = \ell_0$. On renomme f le prolongement. Alors f vérifie les hypothèses sur théorème précédent et donc f est dérivable en a et $f'(a) = \ell_1$ par le théorème de la limite de la dérivée. Et

donc, par caractérisation de la continuité par les limites, f' est continue en a et donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. □

!!! ATTENTION !!!

⚠ Attention, le terme de prolongement $\mathcal{C}^1$ induit en erreur. Il faut être extrêmement vigilant lors de l'utilisation de ce théorème. On prolonge f par continuité, mais certainement pas f'. On ne peut pas prolonger f'. On n'a pas accès à f'.

Exemple 2.10 :
Montrer que la fonction

$$f\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \ln x \end{array}$$

peut être prolongée en une fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ qui n'est pas $\mathcal{D}^2$.

Remarque :
Le titre est (doublement) abusif. D'abord, on ne prolonge pas la dérivée. Mais aussi, a strictement parlé, le théorème ne donne pas la continuité de la dérivée au point problématique. Il faut recoller avec les théorèmes de continuité (et plus particulièrement les définitions) pour s'apercevoir que la dérivée est continue.

!!! ATTENTION !!!

⚠ Dans le théorème de classe $\mathcal{C}^1$ par prolongement, f' vérifie les hypothèses du théorème de prolongement par continuité, mais on ne prolonge pas la dérivée. On ne peut jamais prolonger une dérivée. On n'a pas accès à une dérivée. Elle est obtenue comme limite des taux de variations d'une fonction. On ne peut pas décider, imposer une limite.

Dans l'exemple précédent, on a prolongé la fonction f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$ MAIS on n'a pas prolongé f' par continuité. Étendre la fonction par continuité la rend automatiquement de classe $\mathcal{C}^1$. C'est à dire qu'en la poussant un tout petit peu en un point supplémentaire, on la rend continue. C'est notre intervention, notre fait. Mais chaque acte ayant des conséquences dramatiques (l'effet papillon, on pourrait dire), ça rend automatiquement la dérivée continue aussi. On étend pas la dérivée par continuité. On ne touche même pas la dérivée. On ne peut pas accéder à la dérivée et on ne peut donc pas l'étendre. On ne peut accéder qu'à la fonction. Il faut seulement se rendre compte que la fonction est déjà dérivable, avant qu'on arrive.

Donc ne JAMAIS dire dans ce genre de cas qu'on étend la dérivée par continuité. C'est faux. On ne fait rien sur la dérivée. On observe seulement qu'elle se comporte bien. C'est tout. On ne l'a pas touché ; on ne lui a rien fait. On ne peut pas l'attraper d'ailleurs. Elle dépend uniquement de f et c'est tout. On ne peut modifier que f et ensuite observer les conséquences de notre acte. La dérivée n'est que l'ombre de f.

Remarque :
Il faudra donc se méfier des énoncés qui peuvent induire en erreur en incitant à utiliser le théorème de prolongement par continuité sur la dérivée (ce qui serait un blasphème !). Par exemple, on peut très bien imaginer un énoncé, avec une fonction un peu compliquée qui n'est pas définie en un point a. On montre qu'elle est continue sauf en a. On la prolonge par continuité en a. On montre qu'elle est dérivable partout sauf en a. On calcule la dérivée. On montre que la dérivée (elle même un peu compliqué si non ce n'est pas très intéressant) est continue sauf en a. On calcul la limite (pas trop simple) de la dérivée en a. Et on demande alors de montrer que la fonction est dérivable en a (on peut même trouver des formulations plus insidieuse encore). Il faut alors résister à la tentation de prolonger par continuité ce qu'on ne peut pas prolonger.

Remarque :
Ce théorème mène à de lourdes considérations métaphysiques, philosophiquement perturbantes. Par exemple, en prenant $f(x) = x^2 \ln(x)$, cette fonction n'est pas définie en 0. On la prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$ facilement. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'(x) = x + 2x\ln(x)$. f' est facilement continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Donc, par théorème satanique f est dérivable en 0 et on ne peut pas prolonger la dérivée.

En revanche, si on pose $g(x) = x + 2x\ln(x)$, alors g une fonction à part entière qui peut être prolongée par continuité en 0.

Mais si on pose $h = f'$, alors h n'est toujours pas prolongeable par continuité. On a fait que renommer la dérivée. Mais c'est toujours une dérivée.

De plus, on a beau avoir $g = f'$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on ne peut pas utiliser le prolongement de g pour dire que f' est prolongeable aussi. Les deux fonctions proviennent, ont une genèse différente, ce qui influe sur la façon dont elles se comportent et aussi la façon de les manipuler.

Théorème 2.16 (Théorème de classe $\mathcal{C}^n$ par prolongement) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point. Soit $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Si $f \in \mathcal{C}^n(I \setminus \{a\}, \mathbb{R})$ et si $\forall k \in \{0, \dots, n\}$, $\exists \ell_k \in \mathbb{R}$ tel que $f^{(k)}(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell_k$, alors f est prolongeable en a en posant $f(a) = \ell_0$ en une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I. Et une fois prolongée, $\forall k \in \{0, \dots, n\}$, $f^{(k)}(a) = \ell_k$.

Démonstration :
Il suffit d'appliquer le théorème satanique à chaque étage : f est prolongeable par continuité en a en posant $f(a) = \ell_0$. On renomme f la fonction ainsi prolongée. Alors $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^1(I \setminus \{a\}, \mathbb{R})$ et $f'(x) \to \ell_1$. Donc $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ et $f'(a) = \ell_1$. Alors $f' \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^1(I \setminus \{a\}, \mathbb{R})$ et $f''(x) \to \ell_2$. Et donc $f' \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ et $f''(a) = \ell_2$. Donc $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$.

En itérant le processus, on trouve $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ une fois prolongée et $\forall k \in \{0, \dots, n\}$, $f^{(k)}(a) = \ell_k$. $\square$

3 Convexité

Définition 3.1 (Fonction convexe, concave) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point. Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

- f est dite *convexe sur I*, si

$$\forall (x, y) \in I^2,\ \forall t \in [0, 1],\ f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$$

- f est dite *concave sur I*, si

$$\forall (x, y) \in I^2,\ \forall t \in [0, 1],\ f((1-t)x + ty) \geq (1-t)f(x) + tf(y).$$

!!! ATTENTION !!!

⚠ La notion de convexité et concavité ne sont pas des notions contraires l'une de l'autre. Une fonction qui n'est pas convexe, n'a aucune raison d'être concave. Et inversement. Il existe des fonctions qui ne sont ni convexes, ni concaves. Et il existe des fonctions qui sont les deux en même temps.

Exemple 3.1 :
Déterminer les fonctions qui sont à la fois convexe et concave sur un intervalle de $\mathbb{R}$.

Remarque :
On notera que si $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, alors $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = tb + (1-t)a$ est une fonction affine non constante (donc bijective) et $\varphi([0,1]) = [a,b]$. Donc $\{tb + (1-t)a,\ t \in [0,1]\} = \varphi([0,1]) = [a,b]$. On appelle cette écriture de $[a,b]$ un *paramétrage affine* de $[a,b]$.

Proposition 3.1 (Inégalité de Jensen) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe.
Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x_1, \dots, x_n \in I$, $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$,

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

Remarque :
On a une inégalité analogue (mais dans l'autre sens), pour les fonctions concaves.

Démonstration :
Pour $n = 1$, il n'y a rien à faire et $n = 2$ correspond à la définition de la convexité.

Supposons qu'il existe un $n \in \mathbb{N}^*$ tel que l'inégalité soit vraie pour tout n-uplet de points de I. Soit donc $x_1, \dots, x_{n+1} \in I$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \geq 0$ tels que $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$.

Si $\lambda_{n+1} = 1$, alors $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\lambda_i = 0$ et il n'y a pas grande chose à faire : $f(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i) = f(x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i)$. On suppose donc $\lambda_{n+1} < 1$.

En remarquant que $1 - \lambda_{n+1} = \sum_{i=1}^n \lambda_i$, on note

$$y_1 = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} x_i.$$

Alors
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} = 1.$$
Donc $y \in I$ (facile à montrer à partir de la définition d'un intervalle et d'une petite récurrence). Puis, par convexité,
$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) = f((1-\lambda_{n+1})y_1 + \lambda_{n+1}x_{n+1}) \leq (1-\lambda_{n+1})f(y_1) + \lambda_{n+1}f(x_{n+1}).$$
Puis, par hypothèses de récurrence,
$$f(y_1) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} f(x_i).$$
D'où
$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i).$$
D'où la propriété par principe de récurrence. $\square$

Remarque :
On notera que ni dans l'inégalité de Jensen, ni dans la définition de la convexité (ce qui revient au même en prenant $n = 2$), on ne demande des points distincts de I. Autrement dit, l'inégalité de Jensen est encore vraie même en prenant tout le temps le même élément. Et ça correspond à un cas trivial.

Exemple 3.2 (Inégalité arithmético-géométrique [✓]) :
Montrer (sans récurrence) que
$$\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*, \ \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k.$$
Montrer le cas $n = 2$ directement.

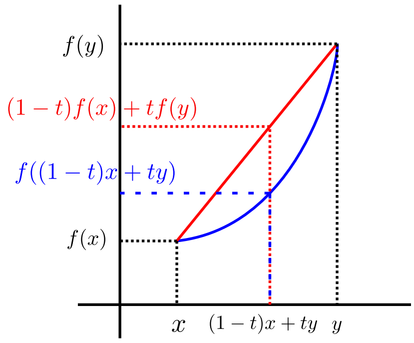
Proposition 3.2 (Fonction convexe et cordes) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point. Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
f est convexe sur I si, et seulement si, le graphe de f est en dessous de toutes ses cordes.

Remarque :
Bien sûr, une version analogue existe pour les fonctions concaves : les fonctions concaves sont au-dessus de leur cordes.

Démonstration :
La corde d'un graphe est le segment reliant deux points du graphes. Autrement dit, si $x, y \in I$, la corde entre le point $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$ est donc

$$\{(1-t)(x, f(x)) + t(y, f(y)),\ t \in [0,1]\}.$$

Donc, si f est convexe, on a donc $\forall x, y \in I$, $\forall t \in [0,1]$, $f((1-t)x+ty) \leq (1-t)f(x)+tf(y)$. Or $((1-t)x+ty, f((1-t)x+ty))$ est un point du graphe de f et $((1-t)x+ty, (1-t)f(x)+tf(y))$ est un point de la corde reliant $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$. Donc le graphe de f est bien en dessous de ses cordes.
Réciproquement, supposons que le graphe de f est en dessous de ses cordes. Soit $x, y \in I$ et $t \in [0,1]$. Et donc au point $(1-t)x+ty$, on a $f((1-t)x+ty) \leq (1-t)f(x)+tf(y)$. Donc f est convexe.



□

Proposition 3.3 (Caractérisation de la convexité par la croissance des taux de variations) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point. Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
f est convexe sur I si, et seulement si, $\forall a \in I$, $\tau_a : x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$.
En particulier,

$$\forall a, b, c \in I,\ a < b < c,\ \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

Démonstration :
Supposons f convexe. Soit $a \in I$ et $x, y \in I \setminus \{a\}$ avec $x < y$. On va faire une disjonction de cas selon la position relative de a, x et y.

- Si $a < x < y$. On pose $t = \frac{x-y}{a-y}$. Alors $t \in]0,1[$ et $x = ta + (1-t)y$. Donc, par convexité,

$$f(x) = f(a + (1-t)y) \leq tf(a) + (1-t)f(y)$$

et donc $f(x) - f(a) \leq (1-t)(f(y) - f(a))$. Or $x - a = (1-t)(y-a) > 0$ et donc $\tau_a(x) \leq \tau_a(y)$.

- Si $x < a < y$. On pose $t = \frac{a-x}{y-x} \in]0,1[$. Et donc $a = (1-t)x + ty$. Toujours par convexité :

$$f(a) = f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$$

donc $(1-t)(f(a) - f(x)) \leq t(f(y) - f(a))$. En divisant par $(1-t)(a-x) = t(y-a) > 0$, on a l'inégalité voulue $\tau_a(x) \leq \tau_a(y)$ voulue.

- Si $x < y < a$. On pose $t = \frac{y-x}{a-x} \in]0,1[$. Alors $y = (1-t)x + ta$. En utilisant encore la convexité,

$$f(y) \leq (1-t)f(x) + tf(a)$$

et donc $f(y) - f(a) \leq (1-t)(f(x) - f(a))$. D'où l'on déduit de nouveau $\tau_a(x) \leq \tau_a(y)$ car $y - a < 0$.

Reste à étudier le cas où $x = y$. Mais ce cas est trivial.

Supposons que les taux de variations de f sont croissants. Soit $x, y \in I$ et $t \in [0,1]$. Clairement, si $t = 0$ ou $t = 1$ ou $x = y$, il est clair que l'inégalité de convexité est vérifiée. Supposons donc $x \neq y$ et $t \in]0,1[$. Sans perte de généralité, quitte à renommer, on peut supposer $x < y$. Posons $a = (1-t)x + ty$. Alors $x < a < y$. Par croissance du taux de variations en a, on a donc

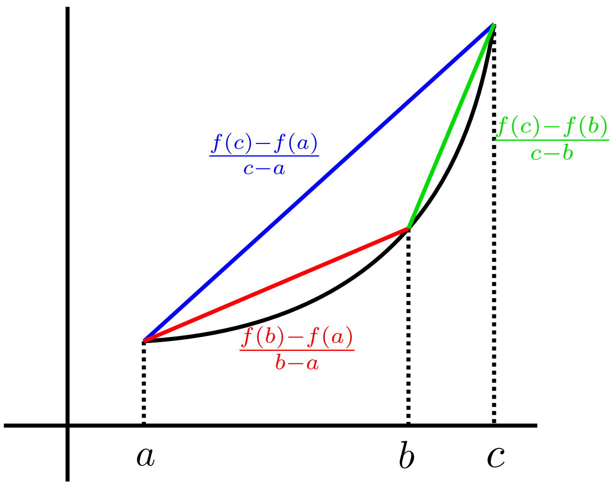
$$\tau_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \tau_a(y) = \frac{f(y) - f(a)}{y - a}.$$

D'où

$$f((1-t)x + ty) = f(a) \leq \frac{x-a}{x-y} f(y) - \frac{y-a}{x-y} f(x).$$

Or $t = \frac{a-x}{y-x}$ et $1 - t = \frac{y-a}{y-x}$. Donc $f((1-t)x + ty) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$. Donc f est convexe.

On a le dernier résultat facilement en comparant les croissances du taux de variations de f en a et en b. □



Proposition 3.4 (Caractérisation de la convexité par les dérivées) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point. Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

(i) Si f est $\mathcal{D}^1$, alors (f convexe $\iff$ f' croissante).

(ii) Si f est $\mathcal{D}^2$, alors (f convexe $\iff$ f'' positive).

Démonstration :

(i) Supposons f convexe sur I.

Soit $x, y \in I$ avec $x < y$. Alors, par croissance des taux de variations, $\forall a \in]x, y[$, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ et $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(y)-f(a)}{y-a}$. Or f est dérivable, donc en faisant $a \to x$ dans la première inégalité et $a \to y$ dans la deuxième inégalité et en passant à la limite dans les inégalités, on a $f'(x) \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq f'(y)$.

Donc f' est croissante.

Réciproquement, supposons f' croissante. Soit $x, y \in I$ et $t \in [0,1]$. Si $x = y$ ou $t = 0$ ou $t = 1$, l'inégalité de convexité est évidemment vérifiée. On suppose donc $x < y$ (sans perte de généralité) et $t \in]0,1[$. On pose $a = (1-t)x + ty$. I étant un intervalle, on a $[x, a] \subset I$ et $[a, y] \subset I$.

Puis, par le TAF, $\exists b \in]x, a[$ et $\exists c \in]a, y[$ tel que $f'(b) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ et $f'(c) = \frac{f(y)-f(a)}{y-a}$. f' étant croissante, on a $f'(b) \leq f'(c)$. Et donc $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(y)-f(a)}{y-a}$. D'où

$$f(a) \leq \frac{y-a}{y-x} f(x) + \frac{a-x}{y-x} f(y).$$

Or, par définition de a, $a - x = t(y-x)$ et $y - a = (1-t)(y-x)$. On a donc l'inégalité de convexité. Et donc f est convexe.

(ii) Le second point est immédiat à partir du lien entre dérivée et variations.

$\square$

Proposition 3.5 (Convexité des fonctions de références) :
$\exp$ est convexe sur $\mathbb{R}$, $\ln$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

!!! ATTENTION !!!

Bien sûr, il est indispensable que f soit deux fois dérivable. On rappelle que toutes fonctions n'est pas automatiquement dérivable. Encore moins deux fois dérivable.

Exemple 3.3 :
La fonction f définie par morceaux par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 2 & x \leq 0 \\ 2+x & x > 0 \end{cases} \end{array}$$

est continue sur $\mathbb{R}$ mais pas dérivable sur $\mathbb{R}$ et pourtant elle est convexe.

En effet, sur $\mathbb{R}_-$ elle est constante donc trivialement convexe, sur $\mathbb{R}_+$ elle est affine, donc facilement convexe. Et si $x < 0$ et $y > 0$, alors

$$\begin{aligned} \forall t \in [0,1],\ f((1-t)x+ty) &= \begin{cases} 2 & (1-t)x+ty \leq 0 \\ 2+(1-t)x+ty & (1-t)x+ty > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2 & t \leq \frac{x}{x-y} \\ 2+(1-t)x+ty & t \geq \frac{x}{x-y} \end{cases} \end{aligned}$$

Or

$$\forall t \in [0,1],\ (1-t)f(x)+tf(y) = 2(1-t)+t(2+y) = 2+ty$$

Donc si $t \in [0, \frac{x}{x-y}]$, $f((1-t)x+ty) = 2 \leq 2+ty = (1-t)f(x)+tf(y)$ car $t \geq 0$ et $y \geq 0$. Et aussi, si $t \in [\frac{x}{x-y}, 1]$, $f((1-t)x+ty) = 2+(1-t)x+ty \leq 2+ty = (1-t)f(x)+tf(y)$ car $1-t \geq 0$ et $x \leq 0$.

Exemple 3.4 :
Étudier la convexité de la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x^2)$ définie sur $\mathbb{R}$.

Proposition 3.6 (Les fonctions convexes sont au dessus de leur tangentes) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Si f est convexe, alors $\forall a, x \in I,\ f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$.

Autrement dit, la courbe d'une fonction convexe est au dessus de ses tangentes.

Démonstration :
Supposons f convexe. Soit $x_0 \in I$. La tangente au graphe de f en x_0 est donc la droite d'équation $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$. Alors

$$\forall x \in I,\ f(x) - (f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)$$

Par le TAF, $\forall x \in I$, $\exists c_x \in I$ (avec même c_x entre x et x_0) tel que

$$f(x) - (f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)) = (x - x_0)f'(c_x) - f'(x_0)(x - x_0) = (f'(c_x) - f'(x_0))(x - x_0).$$

f étant convexe, sa dérivée est croissante. Donc si $x \geq x_0$, alors $c_x \geq x_0$ et donc $f'(c_x) \geq f'(x_0)$ et donc $(f'(c_x) - f(x_0))(x - x_0) \geq 0$. Et si $x \leq x_0$, alors $c_x \leq x_0$ et donc $f'(c_x) \leq f'(x_0)$ et donc $(f'(c_x) - f'(x_0))(x - x_0) \geq 0$. Donc le graphe de f est bien au dessus de ses tangentes. □

Proposition 3.7 (Régularité des fonctions convexes) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point. Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
Si f est convexe, alors :

(i) f est continue sur $\mathring{I}$

(ii) f est dérivable à droite et à gauche en tout point de $\mathring{I}$

Démonstration :

(i) Soit $x_0 \in \mathring{I}$. Soit $a, b \in I$ avec $a < x_0 < b$. Alors, par croissance du taux de variations en x_0, $\forall x \in]x_0, b[$, $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq \frac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0}$. Et donc

$$\forall x \in]x_0, b[,\ f(x) \leq f(x_0) + (x - x_0)\frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0}.$$

De même, on a

$$\forall x \in]a, x_0[,\ f(x_0) + (x - x_0)\frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} \leq f(x).$$

Et donc, par théorème des gendarmes, $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0)$. Donc f est continue en x_0.

(ii) Soit $x_0 \in \mathring{I}$. Soit $a, b \in I$ avec $a < b < x_0$. Les taux de variations étant croissants par convexité, en notant $\tau_{x_0} : x \mapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, on a donc $\tau_{x_0}(a) \leq \tau_{x_0}(b) = \tau_b(x_0) \leq \tau_b(a)$. Donc τ_{x_0} est croissante et majorée. Donc, par théorème de la limite monotone, $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \tau_{x_0}(x)$ existe et est fini. Donc, par définition de la dérivabilité à gauche, f est dérivable à gauche en x_0.

Par le même raisonnement, f est dérivable à droite en x_0. De plus, toujours par croissance des taux de variations, on a, avec $a, b \in I$ et $a < x_0 < b$,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} \leq \frac{f(x_0) - f(b)}{x_0 - b}.$$

Donc, par passage à la limite avec $a \to x_0$ et $b \to x_0$, on a $f'_g(x_0) \leq f'_d(x_0)$.

□

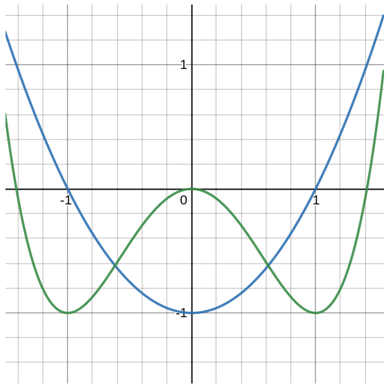
!!! ATTENTION !!!

Les fonctions convexes ne se comportent pas bien par les opérations usuelles entre fonctions. Si f et g sont convexes et si $\lambda \geq 0$, alors $\lambda f + g$ est convexe. Mais c'est faux si $\lambda < 0$. En particulier, $-f$ est concave. Et on ne peut rien dire de $f - g$.

La composition de deux fonctions convexes n'est pas forcément convexe non plus.

Contre-exemple :

La fonction $f : x \mapsto x^2 - 1$ est convexe sur $\mathbb{R}$ mais $f \circ f : x \mapsto x^4 - 2x^2$ n'est pas convexe sur $\mathbb{R}$.



4 Extension à $\mathbb{C}$

On se placera sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point (ce qu'on nommera par "non singulier")

Dans cette partie, on ne démontrera pas tout (voir peur de choses). Les démonstrations étant très similaires.

4.1 Dérivées

Définition 4.1 (Dérivée d'une fonction à valeurs complexe) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ non réduit à un point et $a \in I$. Soit $f : I \to \mathbb{C}$. On dit que f est dérivable en a si $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite quand $x \to a$.

La limite est alors appelée nombre dérivée de f en a et est noté $f'(a)$.

On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I. On note alors f' sa fonction dérivée.

Attention dans le taux de variations de la définition, seul le numérateur est complexe. Le dénominateur est un réel non nul. On rappelle que $x, a \in I \subset \mathbb{R}$.

Théorème 4.1 (Opérations) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ non singulier, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $f, g : I \to \mathbb{C}$ dérivables sur I.
Alors $f + \lambda g$, $\overline{f}$ et fg sont dérivables sur I et

$$(f + \lambda g)' = f' + \lambda g', \quad \left(\overline{f}\right)' = \overline{f'}, \quad (fg)' = f'g + fg'$$

Si g ne s'annule pas sur I, alors f/g est dérivable sur I et

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$$

En particulier les fonctions polynomiales et les fractions rationnelles sont dérivables sur leurs ensemble de définitions.

Donc la dérivation est toujours linéaire sur le $\mathbb{C}$-ev $\mathcal{D}^1(I, \mathbb{C})$ dans $\mathcal{F}(I, \mathbb{C})$. De plus, elle est compatible avec la conjugaison.

Corollaire 4.2 (Fonction partie réelle et partie imaginaire [✓]) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ non singulier et $f : I \to \mathbb{C}$. On équivalence entre

(i) f est dérivable sur I

(ii) Les fonctions (réelles) $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ sont dérivables sur I

De plus, dans ce cas, on a les relations

$$\mathfrak{Re}(f') = \mathfrak{Re}(f)' \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{Im}(f') = \mathfrak{Im}(f)'$$

Démonstration :
Il suffit d'utiliser dans un sens $\mathfrak{Re}(f) = \frac{f+\overline{f}}{2}$ et $\mathfrak{Im}(f) = \frac{f-\overline{f}}{2}$ et $f = \mathfrak{Re}(f) + i\,\mathfrak{Im}(f)$ dans l'autre sens. □

L'intérêt de cet énoncé est de comparer la dérivation réelle avec la dérivation complexe.

Proposition 4.3 (Dérivée d'une composée à valeurs dans $\mathbb{C}$) :
Soit $I, J \subset \mathbb{R}$ non vides et non réduits à un point. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{C}$ tel que $f(I) \subset J$.

Si f est dérivable sur I et g est dérivable sur J, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et

$$(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$$

ATTENTION ! Pour pouvoir composer, la première fonction doit être à valeurs réelles (et même à valeurs dans J).

Proposition 4.4 (Composition avec exponentielle complexe) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ non singulier.

Si $f : I \to \mathbb{C}$ est dérivable sur I, alors $t \mapsto e^{f(t)}$ est dérivable sur I et sa dérivée est

$$t \mapsto f'(t)e^{f(t)}$$

On pourra retenir $\left(e^{f(t)}\right)' = f'(t)e^{f(t)}$. Mais n'oubliez pas que cette notation n'est pas correcte. Il ne faut pas l'utiliser.

Démonstration :
On pose $a = \mathfrak{Re}(f)$ et $b = \mathfrak{Im}(f)$. Alors $e^{f(t)} = e^{a(t)}(\cos(b(t)) + i\sin(b(t)))$ où les fonctions a et b sont des fonctions à valeurs réelles. Comme f est dérivable, a et b le sont aussi. Et

$$\begin{aligned}\left(e^{f(t)}\right)' &= a'(t)e^{a(t)}(\cos(b(t)) + i\sin(b(t))) + e^{a(t)}(-b'(t)\sin(b(t)) + ib'(t)\cos(b(t))) \\ &= (a'(t) + ib'(t))e^{a(t)}(\cos(b(t)) + i\sin(b(t))) \\ &= f'(t)e^{f(t)}\end{aligned}$$

d'où la formule. □

4.2 Classe d'une fonction complexe

Définition 4.2 (Dérivée d'ordre n) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ non singulier et $f : I \to \mathbb{C}$.

On définit la dérivée d'ordre $n \in \mathbb{N}$ de f notée $f^{(n)}$ de la fonction $f^{(n-1)}$ lorsque tout ceci a un sens.

Proposition 4.5 (Dérivée d'ordre et partie réelle et imaginaire) :
soit $I \subset \mathbb{R}$ non singulier et $f : I \to \mathbb{C}$. On équivalence :

(i) La fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est n fois dérivable

(ii) Les fonctions à valeurs réelles $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ sont n fois dérivables.

De plus dans ce cas,

$$\mathfrak{Re}(f)^{(n)} = \mathfrak{Re}(f^{(n)}) \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{Im}(f)^{(n)} = \mathfrak{Im}(f^{(n)})$$

Là aussi, cet énoncé sert à pouvoir passer des dérivées complexes aux dérivées réelles.

Définition 4.3 (Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ non singulier et $f : I \to \mathbb{C}$.

- On dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ si f est n fois dérivables et $f^{(n)}$ est continue.
- On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si f est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- On note $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Proposition 4.6 (Classe et fonction partie réelle et imaginaire) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ non singulier et $f : I \to \mathbb{C}$. On équivalence entre

(i) f est de classe $\mathcal{C}^n$

(ii) les fonctions à valeurs réelles $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ sont de classes $\mathcal{C}^n$.

Proposition 4.7 (Opérations sur $\mathcal{C}^n$) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ non singulier, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $f, g \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{C})$.

$\mathcal{C}^n(I, \mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$-ev stable par conjugaison et par produit. De plus, si i g ne s'annule pas sur I, alors $1/g \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{C})$.

En particulier, les fonctions polynomiales sont de classes $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{C}$ et les fractions rationnelles sont de classes $\mathcal{C}^\infty$ sur leur ensemble de définition.

On a donc $fg \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{C})$ si $f, g \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{C})$.

Corollaire 4.8 :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

Si $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{C})$, alors $t \mapsto e^{f(t)} \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{C})$.

4.3 Théorèmes de dérivation

!!! ATTENTION !!!

⚠ Il n'y a pas de théorème de Rolle dans $\mathbb{C}$ et a fortiori pas de TAF dans $\mathbb{C}$ (on rappelle que le TAF se déduit de Rolle).

Pour pouvoir avoir Rolle (ou le TAF), il est nécessaire d'avoir une relation d'ordre. Et on a pas de relation d'ordre dans $\mathbb{C}$. D'où patatra.

Exemple 4.1 :
On considère la fonction $f : t \mapsto e^{it}$. Elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 2\pi]$. On a aussi $f(0) = f(2\pi) = 1$ et pourtant, sa dérivée ne s'annule par sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.

Théorème 4.9 (IAF / fonction Lipschitzienne [✓]) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point et $f : I \to \mathbb{C}$ dérivable.

Si

$$\exists M \geq 0,\ \forall t \in I,\ |f'(t)| \leq M$$

alors f est M-Lipschitzienne, *i.e.*

$$\forall a, y \in I,\ |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

Démonstration :
Soit $x, y \in I$. On note $f(y) - f(x) = re^{i\theta}$ avec $r \geq 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ (respectivement le module et l'argument de $f(y) - f(x)$).

L'astuce consiste à observer la fonction $g : I \to \mathbb{C}$ définie par $g(t) = f(t)e^{-i\theta}$. Donc g est simplement le produit de f par une constante (complexe) bien choisie (ici $e^{-i\theta}$ avec θ l'argument de $f(y) - f(x)$). La fonction g est donc dérivable sur I, donc $\mathfrak{Re}(g)$ aussi (mais est à valeurs réelles. On va pouvoir lui appliquer le IAF).

On a

$$g(y) - g(x) = (f(y) - f(x))e^{-i\theta} = |f(y) - f(x)| \in \mathbb{R}$$

en particulier $g(y) - g(x) = \mathfrak{Re}(g(y) - g(x)) = \mathfrak{Re}(g)(y) - \mathfrak{Re}(g)(x)$.

On va appliquer le IAF à $\mathfrak{Re}(g)$: $\forall t \in I$,

$$|\,\mathfrak{Re}(g)'(t)| = |\,\mathfrak{Re}(g')(t)| \leq |g'(t)| = |f'(t)| \leq M$$

donc la fonction $\mathfrak{Re}(g)$ est M-Lipschitzienne et donc en particulier,

$$|\mathfrak{Re}(g)(y) - \mathfrak{Re}(g)(x)| = |g(y) - g(x)| = |f(y) - f(x)| \leq M|x - y|$$

ce qui achève la preuve. $\square$

On notera que dans la dernière relation, les deux termes de droites sont des valeurs absolues, puis un module et de nouveau une valeur absolue. On utilise donc $|\cdot|$ dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$ sans prendre aucune précaution ni prévenir de quoi que ce soit. C'est la nature de l'objet à l'intérieur des deux barres verticales qui permet de distinguer les valeurs absolues des modules.

Théorème 4.10 (Théorème Satanique [✓]) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ non singulier, $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{C}$.
Si f est continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et si $f'(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \in \mathbb{C}$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.

Attention ! Là non plus on étend pas la fonction dérivée. Ça se fait tout seul. On n'a pas besoin d'intervenir.