DM 5
Applications Linéaires
Correction

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Pour le Mardi 16 Décembre 2025

Problème 1 (Applications Linéaires) :

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f = \alpha \operatorname{Id}_E$. Alors $f^2 = f \circ f = (\alpha \operatorname{Id}_E) \circ (\alpha \operatorname{Id}_E) = \alpha^2 \operatorname{Id}_E \circ \operatorname{Id}_E = \alpha^2 \operatorname{Id}_E$ et $f + \operatorname{Id}_E = (\alpha+1) \operatorname{Id}_E$. Donc $\alpha^2 \operatorname{Id}_E = \frac{\alpha+1}{2} \operatorname{Id}_E$. Ce qui implique bien sûr $2\alpha^2 = \alpha + 1$ (puisque $\mathcal{L}(E)$ est un ev, par exemple, ou en calculant sur un vecteur non nul si on préfère). On aboutit alors à $\alpha \in \{1, -1/2\}$.

   Il est facile de vérifier que Id_E et $-\frac{1}{2} \operatorname{Id}_E$ sont bien des homothéties qui vérifient la relation.

2. Retour au cas général.

   (a) On a $2f^2 = f + \operatorname{Id}_E$, donc $f \circ (2f - \operatorname{Id}_E) = \operatorname{Id}_E$. Or E est de dimension finie, donc, par théorème d'isomorphisme, f est un automorphisme de E et $f^{-1} = 2f - \operatorname{Id}_E \in \mathcal{L}(E)$ puisque $\mathcal{L}(E)$ est un $\mathbb{R}$-ev (ou alors par que c'est l'inverse d'une application linéaire, ça fonctionne aussi).

   (b) Comme $\mathcal{L}(E)$ est $\mathbb{R}$-ev, on sait que $f - \operatorname{Id}_E, f + \frac{1}{2} \operatorname{Id}_E \in \mathcal{L}(E)$. Et les noyaux d'applications linéaire sont des sous-espaces vectoriels de l'espaces de départs (ce sont des pré-images du sev trivial de l'espace d'arrivée). Autrement dit, $\ker(f - \operatorname{Id}_E) = (f - \operatorname{Id}_E)^{-1}(\{0\})$ et $\{0\}$ est un sev de E, donc $\ker(f - \operatorname{Id}_E)$ est sev de E. De même pour $\ker(f + 1/2 \operatorname{Id}_E)$.

   (c) Soit $x \in \ker(f - \operatorname{Id}_E) \cap \ker(f + 1/2 \operatorname{Id}_E)$. Alors $f(x) = x$ et $f(x) = -x/2$. On a donc $x = -x/2$, ce qui entraîne immédiatement $x = 0$. Donc $\ker(f - \operatorname{Id}_E) \cap \ker(f + 1/2 \operatorname{Id}_E) \subset \{0\}$. Or les noyaux sont des sev de E, donc $\ker(f - \operatorname{Id}_E) \cap \ker(f + 1/2 \operatorname{Id}_E) = \{0\}$.

   Soit $x \in E$. Alors $x = \frac{2}{3}\left(f(x) + \frac{1}{2}x\right) - \frac{2}{3}(f(x) - x)$. Et

$$\begin{aligned} f\left(f(x) + \frac{1}{2}x\right) &= f^2(x) + \frac{1}{2}f(x) \\ &= \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}f(x) \\ &= f(x) + \frac{1}{2}x \end{aligned}$$

   Donc $f(x) + 1/2x \in \ker(f - \operatorname{Id}_E)$. Et

$$\begin{aligned} f(f(x) - x) &= f^2(x) - f(x) \\ &= \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}x - f(x) \\ &= -\frac{1}{2}(f(x) - x) \end{aligned}$$

Donc $f(x) - x \in \ker(f + 1/2\,\mathrm{Id}_E)$. On a donc

$$x = \frac{2}{3}\underbrace{\left(f(x) + \frac{1}{2}x\right)}_{\in\ker(f-\mathrm{Id}_E)} - \frac{2}{3}\underbrace{(f(x) - x)}_{\in\ker(f+\frac{1}{2}\mathrm{Id}_E)}$$

Donc $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) + \ker(f + 1/2\,\mathrm{Id}_E)$ puisque ce sont des sev de E, et donc $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + 1/2\,\mathrm{Id}_E)$.

(d) On a

$$\left(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right) \circ (f - \mathrm{Id}_E) = f^2 - \frac{1}{2}f - \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E = 0$$

On a donc

$$\begin{aligned}\{0\} = \left(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right) \circ (f - \mathrm{Id}_E)(E) &= \left(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)((f - \mathrm{Id}_E)(E)) \\ &= \left(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)(\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E))\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E) \subset \ker(f + 1/2\,\mathrm{Id}_E)$.

Mais par ailleurs, par théorème du rang, on sait que

$$\mathrm{rg}(f - \mathrm{Id}_E) = n - \dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) = \dim(\ker(f + 1/2\,\mathrm{Id}_E))$$

puisque $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f + 1/2\,\mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires dans E.

Donc $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E)$ est un sev de $\ker(f + 1/2\,\mathrm{Id}_E)$ de même dimension que $\ker(f + 1/2\,\mathrm{Id}_E)$ et donc $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E) = \ker(f + 1/2\,\mathrm{Id}_E)$.

(e) On a toujours $(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E) \circ (f - \mathrm{Id}_E) = 0 = (f - \mathrm{Id}_E) \circ (f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E)$. Donc $\mathrm{Im}(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E) \subset \ker(f - \mathrm{Id}_E)$. D'autre part, par la question précédente, $\mathrm{rg}(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E) = \dim(E) - \dim(\ker(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E)) = \dim(E) - \mathrm{rg}(f - \mathrm{Id}_E) = \dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E))$ par théorème du rang. Et donc $\mathrm{Im}(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E) = \ker(f - \mathrm{Id}_E)$.

3. On suppose f et Id_E linéairement indépendants.

(a) On sait $f^2 = \frac{1}{2}f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E$. Donc

$$\begin{aligned}f^3 &= f \circ f^2 \\ &= f \circ \left(\frac{1}{2}f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= \frac{1}{2}f^2 + \frac{1}{2}f \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right) + \frac{1}{2}f \\ &= \frac{3}{4}f + \frac{1}{4}\mathrm{Id}_E\end{aligned}$$

Et en rcomposant par f, on obient

$$\begin{aligned}f^4 &= f \circ f^3 \\ &= f \circ \left(\frac{3}{4}f + \frac{1}{4}\mathrm{Id}_E\right) \\ &= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right) + \frac{1}{4}f \\ &= \frac{5}{8}f + \frac{3}{8}\mathrm{Id}_E\end{aligned}$$

(b) On vient de montrer que $\forall p \in \{0,1,2,3,4\}$, $\exists (a_p, b_p) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f^p = a_p f + b_p\,\mathrm{Id}_E$. Supposons que $\exists p \in \mathbb{N}$ tel que $\exists a_p, b_p \in \mathbb{R}$ tel que $f^p = a_p f + b_p\,\mathrm{Id}_E$. Alors

$$f^{p+1} = f \circ f^p$$

$$
\begin{aligned}
&= f \circ (a_p f + b_p \operatorname{Id}_E) \\
&= a_p \left(\frac{1}{2} f + \frac{1}{2} \operatorname{Id}_E\right) + b_p f \\
&= \frac{a_p + 2b_p}{2} f + \frac{a_p}{2} \operatorname{Id}_E
\end{aligned}
$$

On pose alors $a_{p+1} = \frac{a_p+2b_p}{2} \in \mathbb{R}$ et $b_{p+1} = \frac{a_p}{2} \in \mathbb{R}$. Et donc $f^{p+1} = a_{p+1} f + b_{p+1} \operatorname{Id}_E$.

Donc, par principe de récurrence, $\forall p \in \mathbb{N}$, $\exists a_p, b_p \in \mathbb{R}$ tels que $f^p = a_p f + b_p \operatorname{Id}_E$.

(c) On a $f^0 = \operatorname{Id}_E = 0 \times f + 1 \times \operatorname{Id}_E$ et $f = 1 \times f + 0 \times \operatorname{Id}_E$. Donc $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $b_0 = 1$ et $b_1 = 0$. Et on a

$$\forall p \in \mathbb{N},\ a_{p+1} = \frac{a_p + 2b_p}{2} \qquad \text{et} \qquad b_{p+1} = \frac{a_p}{2}$$

d'après la question précédente.

(d) Soit $p \in \mathbb{N}$. On a

$$a_{p+2} = \frac{a_{p+1} + 2b_{p+1}}{2} = \frac{a_{p+1} + a_p}{2}$$

Donc la suite $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ vérifier une relation de récurrence d'ordre 2 à coefficients constants d'équation caractéristique $r^2 - r/2 - 1/2 = 0$, de discriminant $\Delta = 1/4 + 2 = 9/4 > 0$, de racines réelles distinctes $r_1 = -1/2$ et $r_2 = 1$. On en déduit donc $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\forall p \in \mathbb{N}$, $a_p = \mu + \lambda \frac{(-1)^p}{2^p}$. Or $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$, donc

$$\begin{cases} \mu + \lambda = 0 \\ \mu - \frac{\lambda}{2} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = -\frac{2}{3} \\ \mu = \frac{2}{3} \end{cases}$$

On a donc

$$\forall p \in \mathbb{N},\ a_p = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{(-1)^p}{2^p}\right)$$

Et la relation $\forall p \in \mathbb{N}$, $b_{p+1} = a_p/2$ avec $b_0 = 1$ nous fournit alors

$$\forall p \in \mathbb{N},\ b_p = \begin{cases} \frac{1}{3}\left(1 + \frac{(-1)^p}{2^{p-1}}\right) & p \geq 1 \\ 1 & p = 0 \end{cases}$$

(On remarquera que les formules nous donne bien le bons coefficients qu'on a obtenu par le calul pour f^2, f^3 et f^4. Il est bon de vérifier rapidement : une erreur de calcul peut vite arriver).

La suite $((-1)^p/2^p)$ est une suite géométrique de raison $-1/2 \in]-1, 1[$ donc convergente de limite nulle. Puis, comme l'espace des suites convergentes est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que les suites constantes sont convergentes, on en déduit que (a_p) et (b_p) sont convergentes. Par ailleurs, la limite est une forme linéaire sur l'espace des suites convergentes, donc elle est linéaire et donc

$$a_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} \frac{2}{3}(1-0) = \frac{2}{3} \qquad \text{et} \qquad b_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} \frac{1}{3}(1+0) = \frac{1}{3}$$

(e) On pose $q = \frac{2}{3} f + \frac{1}{3} \operatorname{Id}_E$. Alors

$$
\begin{aligned}
q^2 &= \left(\frac{2}{3} f + \frac{1}{3} \operatorname{Id}_E\right) \circ \left(\frac{2}{3} f + \frac{1}{3} \operatorname{Id}_E\right) \\
&= \frac{4}{9} f^2 + \frac{4}{9} f + \frac{1}{9} \operatorname{Id}_E \\
&= \frac{4}{9}\left(\frac{1}{2} f + \frac{1}{2} \operatorname{Id}_E\right) + \frac{4}{9} f + \frac{1}{9} \operatorname{Id}_E \\
&= \frac{2}{3} f + \frac{1}{3} \operatorname{Id}_E \\
&= q
\end{aligned}
$$

Et comme $\mathcal{L}(E)$ est un $\mathbb{R}$-ev, $q \in \mathcal{L}(E)$. C'est donc un projecteur de E. C'est même le projecteur de E sur $\mathrm{Im}(q) = \ker(q - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\ker(q)$.

Mais

$$\begin{aligned} x \in \ker(q) &\iff q(x) = 0 \\ &\iff \frac{2}{3}f(x) + \frac{1}{3}x = 0 \\ &\iff f(x) + \frac{1}{2}x = 0 \\ &\iff x \in \ker(f + \frac{1}{2}\,\mathrm{Id}_E) \end{aligned}$$

et donc $\ker(q) = \ker(f + 1/2\,\mathrm{Id}_E)$.

De même,

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Im}(q) &\iff x \in \ker(q - \mathrm{Id}_E) \\ &\iff q(x) = x \\ &\iff \frac{2}{3}f(x) + \frac{1}{3}x = x \\ &\iff f(x) + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}x = 0 \\ &\iff f(x) - x = 0 \\ &\iff x \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \end{aligned}$$

et donc $\mathrm{Im}(q) = \ker(f - \mathrm{Id}_E)$.

Finalement, q est la projection de E sur $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\ker(f + 1/2\,\mathrm{Id}_E)$.

4. On pose $\mathcal{M} = \{\lambda f + \mu\,\mathrm{Id}_E, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

(a) On a donc $\mathcal{M} = \mathrm{Vect}(f, \mathrm{Id}_E) \subset \mathcal{L}(E)$. C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Soit $g, h \in \mathcal{M}$. Donc $\exists a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $g = af + b\,\mathrm{Id}_E$ et $h = cf + d\,\mathrm{Id}_E$. Alors

$$\begin{aligned} g \circ h &= (af + b\,\mathrm{Id}_E) \circ (cf + d\,\mathrm{Id}_E) \\ &= acf^2 + (ad + bc)f + bd\,\mathrm{Id}_E \\ &= (ad + bc + ac/2)f + (bd + ac/2)\,\mathrm{Id}_E \in \mathcal{M} \end{aligned}$$

Et aussi

$$\begin{aligned} h \circ g &= (cf + d\,\mathrm{Id}_E) \circ (af + b\,\mathrm{Id}_E) \\ &= caf^2 + (da + cb)f + db\,\mathrm{Id}_E \\ &= (ca/2 + da + cb)f + (db + ca/2)\,\mathrm{Id}_E \\ &= g \circ h \end{aligned}$$

puisque le produit est commutatif dans $\mathbb{R}$ et l'addition aussi.

(b) On a vu $\mathcal{M} = \mathrm{Vect}(f, \mathrm{Id}_E)$. Donc $\dim(\mathcal{M}) \leq 2$. Par ailleurs, $\mathrm{Id}_E \neq 0$, donc $\dim(\mathcal{M}) \geq 1$.

Mais par hypothèse, on a supposé que f et Id_E sont linéairement indépendants, donc la famille (f, Id_E) est une famille libre. Elle est donc libre et génératrice de $\mathcal{M}$, c'est donc une base de $\mathcal{M}$ et donc $\mathcal{M}$ est de dimension 2.

Dans le cas de la première question où f est une homothétie, f est donc proportionnelle à Id_E et donc la famille (f, Id_E) est liée. Ce qui entraîne que $\dim \mathcal{M} = 1$ (et donc $\mathcal{M} = \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E)$.

Problème 2 (BONUX (Dimension de $\mathcal{L}(E,F)$)) :
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, $n = \dim(E)$, $p = \dim(F)$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ une base de F.

1. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k^* = 0$. Donc :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^n \lambda e_k^* = 0 \\
\iff &\forall j \in \{1, \dots, n\},\ \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k^*(e_j) = 0 \\
\iff &\forall j \in \{1, \dots, n\},\ \sum_{k=1}^n \lambda_k \delta_{k,j} = 0 \\
\iff &\forall j \in \{1, \dots, n\},\ \lambda_j = 0.
\end{aligned}$$

Donc, par définition, la famille $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ est libre.

On ne peut pas utiliser la dimension de E^* pour conclure. Ça reviendrais à utiliser la dimension de $\mathcal{L}(E,F)$, qui est précisément ce qu'on veut trouver. On est donc contrait de montrer que $\mathcal{B}^*$ est aussi une famille génératrice de E^*.

Soit $f \in E^*$. On pose $g = \sum_{k=1}^n f(e_k) e_k^* \in E^*$. Alors

$$\forall j \in \{1, \dots, n\},\ g(e_j) = \sum_{k=1}^n f(e_k) e_k^*(e_j) = f(e_j).$$

Donc $f(\mathcal{B}) = g(\mathcal{B})$. Or, en dimension finie, une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base. Donc $f = g$. Et donc $f \in \mathrm{Vect}(\mathcal{B}^*)$. Donc $E^* \subset \mathrm{Vect}(\mathcal{B}^*)$. Or $\mathrm{Vect}(\mathcal{B}^*) \subset E^*$, donc $E^* = \mathrm{Vect}(\mathcal{B}^*)$.

Finalement, $\mathcal{B}^*$ est une famille libre et génératrice de E^*. Donc $\mathcal{B}^*$ est une base de E^* (et donc aussi $\dim(E^*) = n$).

2. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, p\}$. Alors $\forall x \in E$, $e_i^*(x) \in \mathbb{K}$. Donc $\forall x \in E$, $e_i^*(x)\varepsilon_j$ est bien définie. On peut donc définir une application

$$e_i^* \varepsilon_j : \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & e_i^*(x)\varepsilon_j \end{array}$$

De plus, comme e_i^* est linéaire et que le LCE de E est bilinéaire, on en déduit que $e_i^* \varepsilon_j$ est linéaire. Donc $e_i^* \varepsilon_j \in \mathcal{L}(E,F)$.

3. Soit $(a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ des scalaires tels que $\sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}} a_{i,j} e_i^* \varepsilon_j = 0$. En particulier, on en déduit

$$\begin{aligned}
&\forall k \in \{1, \dots, n\},\ \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}} a_{i,j} e_i^*(e_k) \varepsilon_j = 0 \\
\iff &\forall k \in \{1, \dots, n\},\ \sum_{j=1}^p a_{k,j} \varepsilon_j = 0 \\
\iff &\forall k \in \{1, \dots, n\},\ a_{k,1} = \dots = a_{k,p} = 0 && \text{car } \mathcal{C} \text{ libre} \\
\iff &\forall k \in \{1, \dots, n\},\ \forall j \in \{1, \dots, p\},\ a_{k,j} = 0
\end{aligned}$$

Donc $(e_1^* \varepsilon_j)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ est libre.

4. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors $\forall i \in \{1,\dots,n\}$, $f(e_i) \in F$. Or $\mathcal{C}$ est une base de F. Donc $\forall i \in \{1,\dots,n\}$, $\exists a_{i,1},\dots,a_{i,p} \in \mathbb{K}$ tels que $f(e_i) = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\varepsilon_j$. On pose alors $g = \sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} a_{i,j}e_i^*\varepsilon_j$.

   Alors

$$\begin{aligned}\forall k \in \{1,\dots,n\},\ g(e_k) &= \sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} a_{i,j}e_i^*(e_k)\varepsilon_j\\ &= \sum_{j=1}^{p} a_{k,j}\varepsilon_j\\ &= f(e_k).\end{aligned}$$

   Donc $g(\mathcal{B}) = f(\mathcal{B})$. Or une application linéaire, en dimension finie, est entièrement déterminée par l'image d'une base. Donc $f = g$. Et donc $(e_i^*\varepsilon_j)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ engendre $\mathcal{L}(E,F)$.

5. D'après les deux dernières questions, on vient donc de montrer que $(e_i^*\varepsilon_j)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ est une base de $\mathcal{L}(E,F)$. D'où, par définition de la dimension,

$$\dim(\mathcal{L}(E,F)) = np = \dim(E)\dim(F).$$