



Interrogation 13

Limites, Continuité

Correction

Exercice 1 :

Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Définition de la continuité en un point.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in I$. f est continue en a ssi $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$, $\forall x \in I$, $(|x - a| \leq \eta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon)$

2. Définition d'une limite finie en un point $a \in \mathbb{R}$.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \bar{I} \cap \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f converge vers ℓ en a (i.e. $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a), et on note $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ si, et seulement si, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$, $\forall x \in I$, $(0 < |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$.

3. Théorème des bornes atteintes.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. Alors f est bornée et atteint ses bornes, i.e. $\exists c, d \in [a, b]$, $f([a, b]) = [f(c), f(d)]$ (i.e. $\exists c, d \in [a, b]$, $\forall x \in [a, b]$, $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$).

4. Théorème de la limite monotone.

Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ monotone. Alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$ existent. Et de plus, si f est croissante, alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \inf_{t \in]a, b[} f(t)$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow b} \sup_{t \in]a, b[} f(t)$.

5. Caractérisation séquentielle de la continuité.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. f est continue en a si, et seulement si, $\forall (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$, $(u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \implies f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(a))$.

6. Continuité d'une composée sur un intervalle.

Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, J)$ et $g \in \mathcal{C}^0(J, \mathbb{R})$. Alors $g \circ f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.

7. Théorème de la bijection.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue et strictement monotone.

Alors f établit une bijection de I sur $f(I)$, $f^{-1} \in \mathcal{C}^0(f(I), I)$ et f^{-1} est strictement monotone de même monotonie que f .

8. Théorème des valeurs intermédiaires (pas le cas général).

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors $f(I)$ est un intervalle. Donc $\forall a, b \in I$, $a < b$, $[\min(f(a), f(b)), \max(f(a), f(b))] \subset f([a, b])$.

Exercice 2 :

Montrer que $f : x \mapsto \frac{\arcsin(x)}{x}$ est prolongeable par continuité en 0 et prolonger f .

$f \in \mathcal{C}^0([-1, 1] \setminus \{0\}, \mathbb{R})$ par quotient de fonctions continue dont le dénominateur ne s'annule pas.

De plus, $\arccos \in \mathcal{D}^1(]-1, 1[, \mathbb{R})$ et $\arccos'(0) = 1$. Donc, par définition de la dérivabilité, $\frac{\arccos(x) - \arccos(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$.

Donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$. Donc f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.

On pose

$$\tilde{f} : \begin{matrix} [-1, 1] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{\arcsin(x)}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \end{matrix}$$

Alors $\tilde{f} \in \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ est LE prolongement de f par continuité en 0.