NOM :
Prénom :

Mardi 13 Janvier 2025

# Interrogation 14

## Dérivabilité

## Correction

**Exercice 1 :**
Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Définition de la dérivabilité.
Soit $f : I \to \mathbb{C}$, $a \in I$. On dit que $f$ est dérivable en $a$ si $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est fini. Dans ce cas, on appelle nombre dérivé de $f$ en $a$, noté $f'(a)$, cette limite.

2. Définition d'une fonction lipschitzienne.
Soit $f : I \to \mathbb{C}$. On dit que $f$ est lipschitzienne sur $I$, si $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x, y \in I$, $|f(x) - f(y)| \leq \lambda|x - y|$.

3. Théorème de Rolle.
Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}) \cap \mathcal{D}^1(]a, b[, \mathbb{R})$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors $\exists c \in ]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

4. Théorème des accroissements finis.
Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}) \cap \mathcal{D}^1(]a, b, \mathbb{R})$. Alors $\exists c \in ]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

5. Inégalités des accroissements finis.
Soit $f \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$ tel que $\exists m, M \in \mathbb{R}$, $\forall x \in I$, $m \leq f(x) \leq M$. Alors $\forall a, b \in I$, $a \leq b$, $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$.

6. Définition d'une fonction convexe.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que $f$ est convexe sur $I$ si $\forall x, y \in I$, $\forall t \in [0, 1]$, $f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y)$.

7. Théorème de recherche d'extremums.
Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$, $a \in I$ qui n'est pas une borne de $I$. Si $f$ est dérivable en $a$ et admet un extremum en $a$, alors $f'(a) = 0$.

8. Inégalité de Jensen.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe. Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x_1, \dots, x_n \in I$, $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n$ tel que $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$,
$$f\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(x_j).$$

**Exercice 2 :**
Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $\forall x \neq 0$, $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$. Étudier $f$ en $0$.

On a

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} & & & & \mathcal{C}^\infty \\
x & \mapsto & -\frac{1}{x^2} & & & & \\
 & & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} & & \mathcal{C}^\infty \\
 & & y & \mapsto & e^y & & \\
\mathbb{R}^* & \longrightarrow & & \longrightarrow & \mathbb{R} & & \mathcal{C}^\infty \\
x & \longrightarrow & & \longrightarrow & e^{-\frac{1}{x^2}} & & \text{par composition}
\end{array}$$

Donc $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$ par composition.
D'autre part $-\frac{1}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} -\infty$ et $e^y \xrightarrow[y\to 0]{} 0$. Donc, par composition de limite,
$$f(x) = e^{-1/x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0 = f(0).$$
Donc $f$ est continue en $0$ par caractérisation de la continuité par les limites. Donc $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$.
De plus,
$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \ f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}.$$
Or par croissance comparée, $y^{3/2}e^{-y} \xrightarrow[y\to +\infty]{} 0$. Donc $f'(x) = 2(1/x^2)^{3/2}e^{-1/x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ par composition de limites.

D'où $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$ et $f'(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$. Donc, par théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$ (aka théorème satanique), $f$ est dérivable en $0$ et $f'(0) = 0$ et $f'$ continue en $0$ (car $f'(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0 = f'(0)$). Donc $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.