



## Chapitre 15 - TD : Polynômes

Simon Dauguet  
*simon.dauguet@gmail.com*

13 janvier 2026

### 1 Généralités

#### Exercice 1 :

Quels sont les degrés, les coefficients dominants et les coefficients constants des polynômes suivants :

$$(X+1)^n - (X-1)^n, \quad (X^2+1)^n + (X^2-1)^n$$

#### Exercice 2 :

Trouver un polynôme  $P$  tel que  $\tilde{P}(1) = 3$ ,  $\tilde{P}'(1) = 4$ ,  $\tilde{P}''(1) = 5$  et  $\forall n \geq 3$ ,  $\tilde{P}^{(n)}(1) = 0$ .

#### Exercice 3 ([✓]) :

Soit  $n \geq 2$ . On définit une application sur  $\mathbb{R}[X]$  par

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], f(P)(X) = P(-X) - P(X)$$

1. Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
2. Déterminer  $\text{Im } f$ ,  $\text{rg } f$  et  $\ker f$ .
3. Soit  $Q \in \text{Im } f$ . Montrer alors qu'il existe un unique  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  tel que

$$f(P) = Q \quad \text{et} \quad \tilde{P}(1) = 0, P'(-X) = P'(X)$$

#### Exercice 4 :

Déterminer tous les polynômes  $P \in \mathbb{R}[X]$  tels que :

1.  $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$
2.  $P(2X) = P'(X)P''(X)$
3.  $X(X+1)P'' + (X+2)P' - P = 0$
4.  $18P = P'P''$

#### Exercice 5 :

Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un unique polynôme  $P_n \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $P_n(X) - P'_n(X) = X^n$ . Calculer  $P_n$ .

**Exercice 6 :**

Soit  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de polynômes définie par  $P_0(X) = 1$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1}(X) = XP_n(X) - P'_n(X).$$

1. Calculer  $P_1, P_2, P_3$  et  $P_4$ .
2. Calculer le degré de  $P_n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
3. Montrer que  $P_n$  a la même parité que  $n \in \mathbb{N}$ .
4. Déterminer le coefficient dominant de  $P_n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 7 :**

Soit  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de polynômes définie par  $P_0(X) = 1, P_1(X) = X$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+2}(X) = XP_{n+1}(X) - P_n(X).$$

1. Calculer  $P_2$  et  $P_3$ .
2. Calculer le degré de  $P_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
3. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P_n$  a la même parité que  $n$ .
4. Montre que  $\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1}^2 - P_n P_{n+2} = 1$ .
5. En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , les polynômes  $P_n$  et  $P_{n+1}$  sont premiers entre eux.

**Exercice 8 :**

Cet exercice propose de prouver l'existence de polynômes sous certaines conditions, de façons classique.

1. Soit  $a \in \mathbb{R}^*$  et  $A \in \mathbb{R}_n[X]$ .
  - (a) Montrer que  $\varphi(P) = P(X + a) + P(X)$  est une application linéaire.
  - (b) Montrer que  $\forall P \in \ker(\varphi), \forall p \in \mathbb{N}, \tilde{P}(pa) = (-1)^p \tilde{P}(0)$ .
  - (c) En déduire  $\ker(\varphi)$ .
  - (d) Montrer qu'il existe un unique  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  tel que

$$P(X + a) + P(X) = A(X)$$

2. Soit  $Q \in \mathbb{C}_3[X]$ . Montrer qu'il existe un unique polynôme  $P \in \mathbb{C}[X]$  tel que  $Q = P + P' + P''$ . Expliciter  $P$  lorsque  $Q(X) = 1 + X + X^2 + X^3$ .
3. Soit  $A, B \in \mathbb{R}[X]$  et  $a \in \mathbb{R}$ . Trouver tous les polynômes  $P \in \mathbb{R}[X]$  tels que

$$P(X) + \tilde{P}(a)A(X) = B(X)$$

**Exercice 9 :**

Soit  $n, m \in \mathbb{N}$ . En remarquant que  $(1 + X)^{n+m} = (1 + X)^n(1 + X)^m$ , montrer que

$$\forall k \in \{0, \dots, n + m\}, \sum_{i=0}^{\min(k, n)} \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}$$

**Exercice 10 :**

Soit  $f : x \mapsto xe^{x^2}$ .

1. Montrer que  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .
2. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, \exists P_n \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \widetilde{P}_n(x)e^{x^2}$ . Donner en plus une relation de récurrence vérifiée par la suite  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
3. Déterminer le degré et coefficient dominant de  $P_n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
4. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P_n$  a la parité contraire de  $n$ .

## 2 Arithmétique, Divisibilité

### Exercice 11 :

1. Soit  $P(X) = X^5 - X^3 + 5X - 2$ . Faire la division euclidienne de  $P$  par  $X + 2$ ,  $(X + 1)^2$ ,  $X^2 - 4X + 2$ .
2. Soit  $Q(X) = X^6 - 4X^3 + 2X^2 - 1$ . Effectuer la division euclidienne de  $Q$  par  $X^2 + 4$  et  $4X^3 + X^2$  par  $X + 1 + i$ .

### Exercice 12 (\*) :

Soit  $A, B \in \mathbb{Z}[X]$  avec  $B$  unitaire. Montrer que le quotient et le reste de la division euclidienne de  $A$  par  $B$  sont à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ .

### Exercice 13 ([✓]) :

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $P \in \mathbb{K}[X]$  avec  $\deg P = n$ . On pose  $E = \{A \in \mathbb{K}[X], P|A\}$ . Montrer alors que

$$\mathbb{K}[X] = E \oplus \mathbb{K}_{n-1}[X]$$

### Exercice 14 ([✓]) :

Soit  $A \in \mathbb{K}[X]$  dont les restes dans les divisions euclidienne par  $X - 1$ ,  $X - 2$ ,  $X - 3$  sont 3, 7, 13.

Déterminer le reste de la division de  $A$  par  $B(X) = (X - 1)(X - 2)(X - 3)$ .

### Exercice 15 :

Déterminer  $a \in \mathbb{R}$  pour que  $A(X) = X^4 - X + a$  et  $B(X) = X^2 - aX + 1$  aient au moins une racine commune.

### Exercice 16 ([✓]) :

Déterminer  $a_n$  et  $b_n$  pour que  $A_n(X) = a_n X^{n+1} + b_n X^n + 1$  soit divisible par  $B(X) = (X - 1)^2$ . Former alors le quotient  $Q_n$  de la division de  $A_n$  par  $B$ .

### Exercice 17 ([✓]) :

Montrer que  $(X - 1)^3 | A_n$  avec  $A_n(X) = (1 + X)(X^n - 1) + 2nX^n(1 - X) + n^2 X^{n-1}(X - 1)^2$ , pour tout  $n \geq 1$ .

### Exercice 18 :

Déterminer un polynôme  $A$  unitaire de degré 3 divisible par  $X - 1$  et ayant le même reste dans les divisions par  $X - 2$ ,  $X - 3$  et  $X - 4$ .

**Exercice 19 :**

Trouver un polynôme  $A$  de degré 5 sachant que le reste dans la division euclidienne par  $(X + 1)^3$  est  $-5$  et que le reste dans la division euclidienne par  $(X - 1)^3$  est 11.

**Exercice 20 (PGCD et Bézout) :**

Pour chacun des couples de polynômes  $(A, B)$  suivant, déterminer un PGCD et une relation de Bézout.

1.  $A(X) = X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1$ ,  $B(X) = X^4 + 2X^3 + X + 2$
2.  $A(X) = X^5 + X^3 - X^2 - 1$ ,  $B(X) = X^4 - 2X^3 - X + 2$

**Exercice 21 (Unicité de la relation de Bézout pour des polynômes premiers entre eux) :**

Soit  $A, B \in \mathbb{K}[X]$  non constants et premiers entre eux.

Montrer  $\exists!(U, V) \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $AU + BV = 1$  et  $\deg(U) < \deg(B)$  et  $\deg(V) < \deg(A)$ .

**Exercice 22 :**

Soit  $A, B \in \mathbb{K}[X]$  non nuls. Montrer

$$A \wedge B = 1 \iff (A + B) \wedge (AB) = 1$$

**Exercice 23 :**

Soit  $A, B \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $A^2 | B^2$ .

Montrer que  $A | B$ .

### 3 Racines

**Exercice 24 ([✓]) :**

Trouver  $\lambda$  pour que  $P(X) = X^3 - 3X + \lambda$  ait une racine double. Factoriser  $P(X)$ .

**Exercice 25 :**

Soit  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Factoriser le polynôme  $P(X) = (X + 1)^n - e^{2i\alpha}(X - 1)^n$  dans  $\mathbb{C}$ .

**Exercice 26 ([✓]) :**

Montrer que  $P_n(X) = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + \dots + \frac{X^n}{n!}$  n'a que des racines simples dans  $\mathbb{C}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Exercice 27 ([✓]) :**

Factoriser les polynômes

$$A(X) = X^4 + X^2 + 1 \quad \text{et} \quad B(X) = X^8 + X^4 + 1$$

et

$$P_n(X) = 1 + \frac{1}{1!}X + \frac{1}{2!}X(X+1) + \dots + \frac{1}{n!}X(X+1)(X+2)\dots(X+n-1)$$

**Indic : Récurrence**

**Exercice 28 (\*\*)** :

Soit  $a \in \mathbb{C}$  et  $P, Q \in \mathbb{C}[X]$  premiers entre eux et tels que  $P^2 + Q^2$  admette  $a$  pour racine double. Montrer que  $a$  est racine de  $P'^2 + Q'^2$ .

*Indic* : Penser à la factorisation de  $a^2 + b^2$  dans  $\mathbb{C}$

**Exercice 29** :

Développer

$$P(X) = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \omega_k X)$$

où les  $\omega_k$  sont les racines  $n$ -ème de l'unité.

**Exercice 30 ([✓])** :

Soit  $a, b, c \in \mathbb{K}$  deux à deux distincts et non nuls. On pose

$$A(X) = \frac{X(X-b)(X-c)}{a(a-b)(a-c)} + \frac{X(X-c)(X-a)}{b(b-c)(b-a)} + \frac{X(X-a)(X-b)}{c(c-a)(c-b)}$$

et

$$B(X) = 1 + \frac{1}{abc}(X-a)(X-b)(X-c)$$

Montrer que  $A = B$  sans développer ni factoriser quoi que ce soit.

**Exercice 31 (\*\*\*)** :

Soit  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  deux complexes distincts et  $P, Q \in \mathbb{C}[X]$  non constants tels que  $\tilde{P}^{-1}(\{z_1\}) = \tilde{Q}^{-1}(\{z_1\})$  et  $\tilde{P}^{-1}(\{z_2\}) = \tilde{Q}^{-1}(\{z_2\})$ .

Montrer que  $P = Q$ .

**Exercice 32** :

Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $\deg(P) = 2026$  et  $\forall k \in \{0, \dots, 2026\}, \tilde{P}(k) = \frac{k}{k+1}$ .

Calculer  $\tilde{P}(2027)$ .

## 4 Relations coefficients/Racines

**Exercice 33** :

On considère deux cercles tels que la somme de leurs périmètres est  $22\pi$  et la somme de leur aires est  $65\pi$ . Déterminer les rayons des deux cercles.

**Exercice 34 ([✓])** :

Résoudre le système

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ xy + xz + yz = 1 \\ xyz = 1 \end{cases}$$

**Exercice 35 :**

Résoudre le système

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \end{cases}$$

**Exercice 36 ([✓]) :**Soit  $a, b, c \in \mathbb{C}$  distincts.

1. En utilisant le polynôme  $P(X) = X^3 - (x + yX + zX^2)$ , résoudre le système

$$\begin{cases} x + ay + a^2z = a^3 \\ x + by + b^2z = b^3 \\ x + cy + c^2z = c^3 \end{cases}$$

2. Faire de même avec

$$\begin{cases} x + ay + a^2z = a^4 \\ x + by + b^2z = b^4 \\ x + cy + c^2z = c^4 \end{cases}$$

**Exercice 37 :**Soit  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$  les racines complexes de  $P(X) = X^3 + X + 1$ .Calculer  $z_1^4 + z_2^4 + z_3^4$ .**Exercice 38 (\*\*) :**Calculer  $\sum \left( \frac{\alpha+2}{2\alpha+5} \right)^2$  où  $\alpha$  décrit l'ensemble des racines de  $X^3 + 2X^2 - X + 1$ .**Exercice 39 (\*) :**

Le but de cet exercice est de fournir une preuve au problème 6 des Olympiades Mathématiques Internationales de 1988 :

Si  $a, b \in \mathbb{N}^*$  tels que  $ab + 1 \mid a^2 + b^2$ , montrer que  $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$  est un carré.

Soit  $a, b \in \mathbb{N}^*$  tel que  $ab + 1 \mid a^2 + b^2$ . Sans perte de généralité, on peut supposer que  $a \leq b$ . On pose  $c = \frac{a^2+b^2}{ab+1} \in \mathbb{N}$ . On pose  $P(X) = X^2 - caX - c + a^2$ .

1. Montrer que  $P$  admet deux racines réelles. On appelle  $x \in \mathbb{R}$  la racine non triviale.
2. Montrer que  $\frac{a^2+x^2}{ax+1} = \frac{a^2+b^2}{ab+1}$ .
3. Montrer que  $x \leq a$ .
4. Justifier qu'on peut supposer alors que  $a$  est minimum.
5. Montrer que  $x < a$ .
6. Montrer que  $x \in \mathbb{Z}$ .
7. En déduire que  $x \leq 0$ .
8. Justifier que  $(b+1)(x+1) \geq 1$ .
9. En déduire que  $x > -1$ .
10. Conclure.

## 5 Exercices complets

### Exercice 40 (Polynôme de Laguerre (extrait CAPES 2011) [✓][✓]) :

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On définit la fonction  $h_n$  sur  $\mathbb{R}$  par

$$h_n(x) = x^n e^{-x}$$

Justifier que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $h_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et calculer sa dérivée  $n$ -ème.

2. Montre que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $x \mapsto \frac{e^x}{n!} h_n^{(n)}(x)$  est une fonction polynômiale. Donner le polynôme  $L_n$  qui correspond.
3. Calculer  $L_0$ ,  $L_1$ ,  $L_2$ .
4. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , déterminer le degré de  $L_n$ .
5. Soit  $n \in \mathbb{N}$ .
- Calculer  $h_n^{(n)}$  et  $h_n^{(n+1)}$  en fonction de  $L_n$  et  $L'_n$ .
  - Donner une relation simple entre  $h_n$  et  $h_{n+1}$ .
  - En déduire que  $(n+1)L_{n+1} = XL'_n + (n+1-X)L_n$ .
6. En remarquant que  $(h'_{n+1})^{(n+1)} = (h_{n+1}^{(n+1)})'$ , montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, L'_{n+1} = L'_n - L_n$$

7. À l'aide de tout ce qui précède, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, XL''_n + (1-X)L'_n + nL_n = 0$$

et que

$$\forall n \geq 1, (n+1)L_{n+1} + (X-2n-1)L_n + nL_{n-1} = 0$$

#### Remarque :

On pourrait faire plein de choses sur les polynômes de Laguerre. Ils vérifient une autre équation fonctionnelle qui mêle équation différentielle et relation de récurrence :

$$L'_{n+1} - (n+1)L'_n + (n+1)L_n = 0$$

On peut également les exprimer à l'aide d'intégrale :

$$\widetilde{L}_n(x) = \frac{1}{2i\pi} \oint \frac{e^{-\frac{xz}{1-z}}}{(1-z)z^{n+1}} dz$$

où le contour se fait sur le cercle trigonométrique parcouru dans le sens direct une seule fois, i.e.  $z = e^{i\theta}$  avec  $\theta \in [0, 2\pi[$ . Il y a encore beaucoup de choses à faire avec les polynômes de Laguerre, mais on se contentera de ça pour le moment.

### Exercice 41 (Théorème de D'Alembert-Gauss (\*\*\*)) :

Le but de cet exercice est de démontrer le théorème de D'Alembert-Gauss.

Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$ ,  $n = \deg(P) \geq 1$ . On pose  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$  tels que  $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ .

- Montrer que  $|\tilde{P}(z)| \xrightarrow{|z| \rightarrow +\infty} +\infty$ .
- En déduire  $\exists R > 0, \forall z \in \mathbb{C}, |z| > R \implies |\tilde{P}(z)| > 1 + |\tilde{P}(0)|$ .
- Justifier que  $\inf_{z \in D(0,R)} |\tilde{P}(z)|$  existe. On note  $\alpha = \inf_{z \in D(0,R)} |\tilde{P}(z)|$ .

4. Montrer  $\exists (z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in D(0, R)^{\mathbb{N}}$  tel que  $|\tilde{P}(z_n)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha$ .
5. Montrer que  $\alpha$  est un minimum de  $\tilde{P}$  sur  $D(0, R)$  atteint en un certain  $\zeta \in D(0, R)$ .
6. En déduire que  $\alpha$  est un minimum de  $|\tilde{P}|$  sur  $\mathbb{C}$ .
7. Supposons  $\alpha \neq 0$ . Soit  $Q(X) = P(\zeta + X) \in \mathbb{C}[X]$ . Soit  $b_0, \dots, b_n \in \mathbb{C}$  les coefficients de  $Q$  (i.e.  $Q(X) = \sum_{k=0}^n b_k X^k$ ).
- (a) Justifier que  $|b_0| = \alpha$ .
- (b) Justifier que  $k = \min\{j \in \{1, \dots, n\}, b_j \neq 0\}$  existe.
- (c) Soit  $\omega \in \mathbb{C}$  tel que  $\omega^k = -b_0 \overline{b_k}$ . Soit  $f : t \mapsto |\tilde{Q}(t\omega)|$ . Montrer que

$$\exists c_{k+1}, \dots, c_n \in \mathbb{C}, \forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \left| b_0 - |b_k|^2 b_0 t^k + \sum_{j=k+1}^n c_j t^j \right|.$$

- (d) Montrer que  $\exists \eta > 0$  tel que

$$\forall t \in ]-\eta, \eta[, 0 \leq f(t) \leq \alpha(1 - |b_k|^2 |t|^k) + |t|^{k+1} \left| \sum_{j=k+1}^n c_j t^{n-k-1} \right|.$$

- (e) En déduire que

$$\exists M \geq 0, \forall t \in ]-\eta, \eta[, f(t) \leq \alpha(1 - |b_k|^2 |t|^k) + |t|^{k+1} M.$$

- (f) En déduire que

$$\exists \mu > 0, \forall t \in ]-\mu, \mu[, f(t) \leq \alpha \left( 1 - \frac{|b_k|^2}{2} |t|^k \right).$$

- (g) Montrer qu'on aboutit à une contradiction et conclure.