Chapitre 15 - TD :

Polynômes - Fractions Rationnelles
Indications

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

13 janvier 2026

1 Généralités

Exercice	Indications
1	Il faut revenir aux définitions du degré et des coefficients. Il faut une forme particulière pour les trouver.
2	Taylor, mon amour ...
3	C'est de l'algèbre linéaire. Voir l'algèbre linéaire.
4	1 Commencer par étudier les degrés possibles de P. Après, c'est facile. 2 Les degrés aident beaucoup ici aussi. Attention en manipulant les degrés pour les dérivés. 3 Montrer par l'absurde qu'on a $\deg(P) \leq 1$. Utiliser le coefficient dominant de P pour ça. 4 Encore et toujours les degrés.
5	L'unicité peut se faire séparément. Montrer ensuite que $\deg(P_n) = n$. Puis écrire P_n, trouver une relation de récurrence vérifiée par la suite des coefficients de P_n et en déduire P_n.
6	Récurrences.
7	Des récurrences.
8	1 C'est assez guidé. 2 Utiliser le même raisonnement que la question 1. Mais c'est à vous de faire les sous-questions. 3 Il faut reprendre le même genre de raisonnement que pour les équations ensemblistes. Commencer par trouver une condition nécessaire suffisante pour qu'il puisse exister des solutions. Sous cette condition, faire une disjonction de cas pour résoudre l'équation.
9	Il suffit de développer.
10	Récurrence, clairement. Attention a bien tout écrire avec les bons quantificateurs.

2 Arithmétique, Divisibilité

Exercice	Indications
11	La méthode est dans le cours. On a des racines pour les diviseurs. Ça aide.

12	Reprendre la démo et l'adapter.
13	Commencer par écrire l'ensemble E différemment. Puis écrire la définition de la somme directe. Puis reconnaître ce qui est écrit.
14	Ce n'est qu'une question de définitions. En écrivant tout, on se ramène à un système à résoudre. Ne pas oublier d'exploiter les racines évidentes.
15	Commencer par la division euclidienne de A par B, puis exploiter le fait qu'ils doivent avoir une racine commune.
16	On trouve facilement un système vérifié par a_n et b_n. Ensuite, on détermine le degré de Q_n. On écrit Q_n avec des coefficients. Puis, en utilisant la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$, on en déduit une relation de récurrences vérifiée par les coefficients de Q_n. Et donc Q_n.
17	Il y a un lien entre racines et dérivés. Ça simplifie grandement les choses.
18	Il suffit d'écrire tout ce qu'on sait. On en déduit un système, et hop.
19	Il suffit d'écrire les définitions, puis des les confronter.
20	L'algorithme d'Euclide permet de trouver le PGCD à partir des divisions euclidienne. Et aussi d'avoir des coefficients de Bézout. Et les divisions euclidienne, on sait faire.
21	Traité l'unicité d'abord, c'est plus facile. Ne pas oublier qu'il y a une relation de primalité relative. Pour l'existence, commencer par écrire Bézout. Puis faire des division euclidienne "croisée" pour réduire les degrés.
22	Traiter les deux sens séparément. C'est de l'arithmétique. Il faut faire attention à ce qu'on manipule des polynômes, mais c'est le même genre d'exercices qu'en arithmétique.
23	Utiliser le théorème fondamental de l'arithmétique et montrer que tous les diviseurs irréductibles de A sont des diviseurs de B. Attention, il y a un piège pour pouvoir conclure.

3 Racines

Exercice	Indications
24	Il y a un lien entre dérivation et racines. Ça tombe bien, P' est très simple.
25	Il suffit de se ramener à des racines complexes de l'unité. Parce que ça, on sait faire.
26	Raisonner par l'absurde.
27	Commencer par A, puis en déduire la factorisation de B. Il y a une indication pour P_n.
28	Il faut passer par l'arithmétique. Il y a un lien avec les racines. Et utiliser l'indication.
29	C'est juste du calcul. Ça n'a pas tellement à voir avec les polynômes qu'avec le chapitre sur les calculs. Attention, ce sont des produits !
30	Observer $A - B$ et trouver les racines.
31	Le but : montrer que $P - Q$ a "trop de racines". Pour ça, compter les racines avec multiplicité de $P - z_1$ et $P - z_2$. Comparer avec le nombre de racines de la dérivée. Et confronter tout ça.
32	Étudier le polynôme $(X + 1)P(X) - X$. Tout ce qu'on peut en dire. Racines, factorisation, etc ...

4 Relations coefficients/racines

Exercice	Indications
33	Écrire en maths les données puis utiliser les relations coefficients/racines.

34	Relations coefficients/racines, c'est direct.
35	Se ramener à un système relations coefficients/racines.
36	Traduire le système en terme arithmétique sur le polynôme P proposé.
37	C'est écrit dans le titre de la partie.
38	On pose $\beta = \frac{\alpha+2}{2\alpha+5}$. Exprimer α en fonction de β. En déduire que β est racine d'un polynôme. Par relation coefficients/racines, on peut alors calculer la somme voulue.
39	1. P est un polynôme de degré 2. Et vous savez, depuis longtemps, sur les polynômes de degré 2. 2. Il suffit de reprendre la définition de x. Et l'écrire différemment. 3. Relations coefficients/racines et quelques inégalités. 4. Il "suffit" de redonner du sens à ce qui a été fait dans les questions précédentes. 5. Reprendre une partie l'idée de la question 3. mais dans le cadre de la question 5 (donc avec une notion de minimalité). 6. Relations coefficients/racines (et $\mathbb{Z}$ est un anneau). 7. Raisonner par l'absurde : si $x > 0$, alors il y a une contradiction avec la (nouvelle) définition de a. 8. Développer, utiliser la définition de x et les relations coefficients/racines (encore). Ne pas oublier que a, b et c sont des entiers. 9. Immédiat avec la question précédente. 10. C'est la conclusion. Il "suffit" de faire le bilan de toutes les questions précédentes.

5 Exercices plus complets

Exercice	Indications
40	Les questions se suivent. Faire bien attention à comment les agencer.

41	1.	C'est un argument classique de terminal. Il est juste écrit dans un cadre plus général que la terminale.
	2.	À partir de la question précédente, c'est évident.
	3.	C'est classique. Voir chapitre sur les relations d'ordres.
	4.	Ça aussi, c'est classique. C'est l'application directe d'un théorème du chapitre sur les relations d'ordres. Il suffit de savoir lequel.
	5.	$\widetilde{P}$ est une fonction continue. Donc si (z_n) converge, on aurait ce qu'il faut. Et n'y a-t-il pas un moyen de se ramener à une suite (z_n) convergente ? Un argument dans le chapitre sur les suites.
	6.	C'est classique. On a déjà fait ça plusieurs fois en analyse. Il faut utiliser la question 2 et 5.
	7.(a)	Facile.
	7.(b)	Encore et toujours les relations d'ordre.
	7.(c)	Ce n'est que de la réécriture. Il suffit d'exploiter la définition de k, d'écrire et renommer ce qui est moche.
	7.(d)	Inégalité triangulaire à partir de la question précédente. En prenant quelques précautions, évidemment.
	7.(e)	On rappelle que les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}$. Et majorer sur des segments, on sait faire.
	7.(f)	On factorise dans la question précédente. Et puis on fait de l'analyse classique en découpant les η en 4.
	7.(g)	Ne pas oublier la définition de α. La question précédente donne une contradiction. Et finir en faisant le lien avec le théorème de D'Alembert-Gauss.