NOM :
Prénom :

Mardi 20 Janvier 2026

Lycée Loges

Interrogation 15

Arithmétique

Exercice 1 :
Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Théorème de Bézout.
Soit $a, b \in \mathbb{Z}$.

$$a \wedge b = 1 \iff \exists u, v \in \mathbb{Z},\ au + bv = 1.$$

2. Lemme d'Euclide.
Soit $p \in \mathbb{N}$ premier, $a, b \in \mathbb{Z}$. Si $p|ab$, alors $p|a$ ou $p|b$.

3. Lemme de Gauss.
Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$. Si $a|bc$ et $a \wedge b = 1$, alors $a|c$.

4. Définition d'un nombre premier.
Soit $p \in \mathbb{N}$. p est premier si $p \geq 2$ et $\mathrm{Card}(\mathrm{Div}_+(p)) = 2$ (*i.e.* $\mathrm{Div}_+(p) = \{1, p\}$).

5. Lien entre PGCD et PPCM.
Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. Si $a \wedge b = 1$, alors $a \vee b = |ab|$. Et en général : $(a \wedge b)(a \vee b) = |ab|$

6. Division euclidienne.
Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Alors $\exists!(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $a = bq + r$, $0 \leq r < b$.

7. Caractérisation du PGCD par des entiers premiers entre eux.
Soit $a, b \in \mathbb{Z}$, $(a, b) \neq (0, 0)$. Soit $d \in \mathbb{N}$. Alors $d = a \wedge b \iff \exists a', b' \in \mathbb{Z}$, $a' \wedge b' = 1$, $a = da'$, $b = db'$.

8. Définition de la valuation p-adique.
Soit $n \in \mathbb{Z}^*$ et $p \in \mathcal{P}$. La valuation p-adique de n, noté $v_p(n)$, est défini par

$$v_p(n) = \max\{k \in \mathbb{N},\ p^k | n\}.$$

Exercice 2 :
Résoudre l'équation $3x + 7y = 9$.

Notons que le couple $(3, 0)$ est solution de l'équation.

Soit $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $3x + 7y = 9$. Alors $7y = 3(3 - x)$. Donc $3|7y$. Or $3 \wedge 7 = 1$. Donc, par lemme de Gauss, $3|y$. Donc $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $y = 3k$. Et donc $7k = 3 - x$. Donc $x = 3 - 7k$. Donc $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $(x, y) = (3 - 7k, 3k)$.

Réciproquement, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $3(3 - 7k) + 7 \times 3k = 9$.

Donc :

$$\{(x, y) \in \mathbb{Z},\ 3x + 7 = 9\} = \{(3 - 7k, 3k),\ k \in \mathbb{Z}\}.$$