DS 5
Algèbre Linéaire

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Mercredi 07 Janvier 2026

Le devoir dure 4h.

La qualité de la rédaction et de la présentation seront prises en compte dans la notation. On prendra bien garde à la justesse et la précision des justifications.

Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'identifiera clairement sur la copie et explicitera les décisions qu'il sera amené à prendre.

La calculatrice n'est pas autorisée.

Le sujet comporte 4 pages.

Problème 1 (À propos des endomorphismes nilpotents) :
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ou $\mathbb{K}$ est soit $\mathbb{R}$, soit $\mathbb{C}$.

Un endomorphisme f de E est dit nilpotent si $\exists p \in \mathbb{N}$ tel que $f^p = 0$.

Partie I : Deux Exemples

1. *Un exemple explicite :* On considère $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par
$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = (-x + y, 2x + y + 3z, x - y).$$
   (a) Montrer que f est linéaire.
   (b) Déterminer une base de $\ker(f)$. En déduire une base de $\mathrm{Im}(f)$.
   (c) Calculer f^2, puis déterminer une base de $\mathrm{Im}(f^2)$ et en déduire une base de $\ker(f^2)$.
   (d) Vérifier que $\ker(f) \subset \ker(f^2)$ et $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$.
   (e) Calculer f^3. Que peut-on en conclure sur f ?
   (f) Choisir un vecteur $x_0 \in \mathbb{R}^3$ tel que $f^2(x_0) \neq 0$. Vérifier alors que $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Dans cette question, on suppose $\dim E = 3$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ non nulle telle que $f^2 = 0$.
   (a) Montrer que $1 \leq \mathrm{rg}(f) < \dim(\ker(f)) \leq 3$.
   (b) En déduire $\mathrm{rg}(f) = 1$.
   (c) En déduire $\exists a \in E \setminus \{0\}$, $\exists u \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ tels que $\forall x \in E,\ f(x) = u(x)a$.

Partie II : Étude Générale

3. Soit f, g deux endomorphismes de E.
   (a) Justifier que si f est nilpotente et f et g commutent, alors $f \circ g$ est nilpotente.
   (b) Justifier que si $f \circ g$ est nilpotente, alors $g \circ f$ l'est aussi.
   (c) On suppose f nilpotente. Montrer que $\mathrm{Id}_E - f$ est inversible.
4. Soit f un endomorphisme nilpotent de E.
   (a) Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $f^p = 0$. Montre que $\forall n \geq p,\ f^n = 0$.
   (b) On pose $\eta(f) = \min\{n \in \mathbb{N},\ f^n = 0\}$. Montrer que $\eta(f)$ existe. On appelle $\eta(f)$ l'indice de nilpotence de f.
5. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent. On pose, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $N_p = \ker(f^p)$.
   (a) Déterminer $N_{\eta(f)}$.
   (b) Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}$, $N_p \subset N_{p+1}$.
   (c) On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\dim N_p = \dim N_{p+1}$.
      i. Montre que $N_{p+1} = N_p$.
      ii. On suppose qu'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $N_{p+q} = N_p$. Justifier que $N_p \subset N_{p+q+1}$.
      iii. Soit $x \in N_{p+q+1}$. Justifier alors que $f^q(x) \in N_p$.
      iv. Montrer que $N_p = N_{p+q+1}$.
      v. Conclure.
   (d) Montrer alors que $\eta(f) \leq \dim E$.

Partie III : Commutant d'un endomorphisme nilpotent

Soit f un endomorphisme nilpotent de E tel que $\eta(f) = \dim E$. Dans toute cette partie, pour alléger les notations, on notera $n = \dim E = \eta(f)$.

On note $C(f)$ l'ensemble des endomorphisme de E qui commutent avec f.

6. Montrer que $C(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
7. Soit $g \in C(f)$.
   (a) Justifier qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0$.
   (b) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (x_0, \ldots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E.
   (c) On note $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ les composantes de $g(x_0)$ dans la base $\mathcal{B}$. Pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, exprimer $g(f^k(x_0))$ comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$.
   (d) En déduire que $g = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$.
8. Conclure que $C(f) = \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, f, \ldots, f^{n-1})$.
9. Déterminer la dimension de $C(f)$.

Problème 2 (Endomorphisme unipotents) :
Soit $p \in \mathbb{N}$ avec $p \geq 2$. Dans tous le problème, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$.

Le but de ce problème est d'étudier l'ensemble

$$\mathcal{M}(p) = \{f \in \mathcal{L}(E),\ f^p = \mathrm{Id}_E\}$$

Partie I : Préliminaires

1. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\ker(g) = \{0\} \iff g$ injective.
2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
   (a) Justifier qu'il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $f(e_1) = ae_1 + be_2$ et $f(e_2) = ce_1 + de_2$.
   (b) On pose g vérifiant $g(e_1) = de_1 - be_2$ et $g(e_2) = -ce_1 + ae_2$. Montrer qu'on définit bien ainsi un endomorphisme de E et calculer alors $f \circ g$.
   (c) En déduire que f est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$ et déterminer f^{-1} dans ce cas (on pourra considérer le vecteur $de_1 - be_2$ par exemple pour le sens indirecte).

Partie II : Cas $p = 2$

3. Soit $u \in \mathcal{M}(2)$ telle que $u \neq \mathrm{Id}_E$ et $u \neq -\mathrm{Id}_E$.
   (a) Démontrer que $\ker(u - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(u + \mathrm{Id}_E) = E$.
   (b) Donner la dimension de $\ker(u - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(u + \mathrm{Id}_E)$.
   (c) En déduire alors qu'il existe une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ de E telle que $u(\varepsilon_1) = \varepsilon_1$ et $u(\varepsilon_2) = -\varepsilon_2$.
4. Exemple : on considère dans cette question le cas particulier $E = \mathbb{R}^2$ et l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (2x - y, 3x - 2y) \end{array}$$

   (a) Vérifier que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.
   (b) Vérifier que $f \in \mathcal{M}(2)$. Que peut-on en déduire sur f ?
   (c) Déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{rg}(f)$.
   (d) Trouver un vecteur $u \in \mathbb{R}^2$ non nul tel que $f(u) = u$ et un vecteur $v \in \mathbb{R}^2$ non nul tel que $f(v) = -v$.
   (e) Montrer que (u, v) est une base de $\mathbb{R}^2$.

Partie III : Cas $p = 3$

Soit $f \in \mathcal{M}(3)$. On considère $F = \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $G = \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.

5. Que peut-on dire sur f si $\dim F = 2$?
6. (a) Montrer que $F \cap G = \{0\}$.
   (b) Soit $x \in E$. Montrer que $\frac{1}{3}(f^2(x) + f(x) + x) \in F$ et $\frac{1}{3}(2x - f(x) - f^2(x)) \in G$.
   (c) En déduire $E = F \oplus G$.
   (d) Montrer que $p = \frac{1}{3}(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ et $q = \frac{1}{3}(2\,\mathrm{Id}_E - f - f^2)$ sont des projecteurs dont on déterminera les éléments caractéristiques.
7. Le but de cette question est d'établir, par un raisonnement par l'absurde, qu'on a forcément $\dim F \neq 1$. On suppose ici que $\dim F = 1$.
   (a) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{G} = (u_1, u_2)$ de E telle que F soit la droite vectorielle engendré par u_1 et G la droite vectorielle engendré par u_2.
   (b) Montrer alors que $f(u_2) \in G$.
   (c) Grâce à la définition de G et au fait que $E = F \oplus G$, en déduire une contradiction.
8. On suppose dans cette question que $\dim F = 0$
   (a) Montrer alors que $(e_1, f(e_1))$ est une base de E.
   (b) Justifier qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$ tels que $f(e_1) = ae_1 + be_2$.
   (c) Exprimer alors $f(e_2)$ en fonction de $f(e_1)$ et $f^2(e_1)$.
   (d) Exprimer $f^2(e_1)$ en fonction de e_1 et $f(e_1)$.
   (e) En déduire l'expression de $f(e_2)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Partie V : Étude générale

9. $\mathcal{M}(p)$ est-il est un espace vectoriel ?
10. Soit $f \in \mathcal{M}(p)$. Montrer que $f \in \mathrm{GL}(E)$ et que $f^{-1} \in \mathcal{M}(p)$. $\mathcal{M}(p)$ est-il un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$?
11. On définit f_1 et f_2 par $f_i(e_j) = \delta_{i,j} e_i$ pour tout $i, j \in \{1, 2\}$, où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker, c'est-à-dire

$$\begin{array}{ccc} f_1(e_1) = e_1 & ; & f_1(e_2) = 0 \\ f_2(e_1) = 0 & ; & f_2(e_2) = e_2 \end{array}$$

Montrer qu'on définit ainsi bien deux applications linéaire sur E.

12. On considère alors $\mathcal{H} = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$. Montrer $\mathcal{M}(p) \cap \mathcal{H}$ est un ensemble fini dont on donnera la liste des éléments selon les valeurs de p.
13. On pose maintenant f_3 et f_4 telles que

$$\begin{array}{ccc} f_3(e_1) = e_2 & ; & f_3(e_2) = 0 \\ f_4(e_1) = 0 & ; & f_4(e_2) = e_1 \end{array}$$

Justifier que (f_1, f_2, f_3, f_4) est une base de $\mathcal{L}(E)$.

14. Déterminer ensuite $\mathcal{M}(2p) \cap \mathrm{Vect}(f_3, f_4)$ en fonction de la parité de p et $\mathcal{M}(2p + 1) \cap \mathrm{Vect}(f_3, f_4)$.