DS 5
Algèbre Linéaire
Correction

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Mercredi 07 Janvier 2026

Problème 1 (À propos des endomorphismes nilpotents) :

Partie I : Deux Exemples

1. Soit $f : (x, y, z) \mapsto (y - x, 2x + y + 3z, x - y)$.
   (a) Soit $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
&f(\lambda(x, y, z) + \mu(x', y', z')) \\
=&f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z') && \text{def opé } \mathbb{R}^3 \\
=&\Big(- (\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y'), 2(\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y') + 3(\lambda z + \mu z'), (\lambda x + \mu x') - (\lambda y + \mu y')\Big) && \text{def } f \\
=&\Big(\lambda(y - x) + \mu(y' - x'), \lambda(2x + y + 3z) + \mu(2x' + y' + 3z'), \lambda(x - y) + \mu(x' - y')\Big) && \text{distri, comm, asso dans } \mathbb{R} \\
=&\lambda(y - x, 2x + y + 3z, x - y) + \mu(y' - x', 2x' + y' + 3z', x' - y') && \text{def opé } \mathbb{R}^3 \\
=&\lambda f(x, y, z) + \mu f(x', y', z') && \text{def } f
\end{aligned}$$

Donc, par définition, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

   (b) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$\begin{aligned}
(x, y, z) \in \ker(f) &\iff f(x, y, z) = 0 && \text{def } \ker(f) \\
&\iff (y - x, 2x + y + 3z, x - y) = 0 && \text{def } f \\
&\iff \begin{cases} y - x = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} && \text{def égalité dans } \mathbb{R}^3 \\
&\iff \begin{cases} y - x = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases} && L_3 = -L_1 \\
&\iff \begin{cases} y - x = 0 \\ 3x + 3z = 0 \end{cases} && L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\
&\iff y = x = -z
\end{aligned}$$

D'où

$$\ker(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = 0\} \qquad \text{def } \ker(f)$$

$$\begin{aligned}
&= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ y = x = -z\} \\
&= \{(x,x,-x),\ x \in \mathbb{R}\} \\
&= \mathrm{Vect}((1,1,-1)).
\end{aligned}$$

Or $(1,1,-1) \neq 0$. Donc $((1,1,-1))$ est une famille libre. Donc $((1,1,-1))$ est une base de $\ker(f)$.

On a donc $\dim(\ker(f)) = 1$. Et donc, par théorème du rang, $\mathrm{rg}(f) = 3 - 1 = 2$. Et de plus,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(f) &= f(\mathbb{R}^3) \\
&= f(\mathrm{Vect}((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)) \\
&= \mathrm{Vect}(f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)) \\
&= \mathrm{Vect}((-1,2,1),(1,1,-1),(0,3,0)) \\
&= \mathrm{Vect}((1,1,-1),(0,3,0)) && \text{élimination dans un } \mathrm{Vect} \text{ car } (-1,2,1) = (0,3,0) - (1,1,-1) \\
&= \mathrm{Vect}(1,1,-1),(0,1,0)) && \text{substitution}
\end{aligned}$$

Or $\mathrm{rg}(f) = 2$. Donc, par caractérisation des bases en dimension finie, $((1,1,-1),(0,1,0))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

(c) Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{aligned}
f^2(x,y,z) &= f(f(x,y,z)) && \text{def } \circ \\
&= f(y-x, 2x+y+3z, x-y) && \text{def } f \\
&= ((2x+y+3z)-(y-x), 2(y-x)+(2x+y+3z)+3(x-y), (y-x)-(2x+y+3z)) && \text{def } f \\
&= (3x+3z, 3x+3z, -3x-3z)
\end{aligned}$$

On a alors

$$\mathrm{Im}(f^2) = \{(3x+3z, 3x+3z, -3x-3z),\ x,z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1,1,-1)).$$

Or $(1,1,-1) \neq 0$, donc $((1,1,-1))$ est une base de $\mathrm{Im}(f^2)$ et donc $\mathrm{rg}(f^2) = 1$.

Par théorème du rang, on en déduit que $\dim(\ker(f^2)) = 2$. Or on a facilement $(1,0,-1) \in \ker(f^2)$ et $(0,1,0) \in \ker(f^2)$. Mais $((1,0,-1),(0,1,0))$ est libre (il suffit d'observer les deux premières coordonnées, par exemple). Et donc, par caractérisation des bases en dimension finie, $((1,0,-1),(0,1,0))$ est une base de $\ker(f^2)$.

(d) D'après ce qui précède :

$$\ker(f) = \mathrm{Vect}((1,1,-1)) = \mathrm{Vect}((1,0,-1)+(0,1,0)) \subset \mathrm{Vect}((1,0,-1),(0,1,0)) = \ker(f^2)$$

et

$$\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Vect}((1,1,-1)) \subset \mathrm{Vect}((1,1,-1),(0,1,0)) = \mathrm{Im}(f).$$

(e) Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{aligned}
f^3(x,y,z) &= f(f^2(x,y,z)) && \text{asso } \circ \\
&= f(3x+3z, 3x+3z, -3x-3z) \\
&= ((3x+3z)-(3x+3z), 2(3x+3z)+(3x+3z)-3(3x+3z), (3x+3z)-(3x+3z)) && \text{def } f \\
&= (0,0,0)
\end{aligned}$$

Donc $f^3 = 0$. Et donc f est nilpotente d'ordre 3.

(f) On peut choisir n'importe quel vecteur qui n'est pas dans $\ker(f^2)$. On peut même faire la question en toute généralité avec un vecteur $x_0 \in \mathbb{R}^3$ qui n'est pas dans le noyau quelconque. Mais faisons comme suggère l'énoncé : prenons par exemple $x_0 = (1,0,0)$. Alors $f(x_0) = (-1,2,1)$ et $f^2(x_0) = (3,3,-3) \neq 0$.

Soit $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_0 x_0 + \lambda_1 f(x_0) + \lambda_2 f^2(x_0) = 0$. Alors :

$$\begin{aligned}
&\lambda_0 x_0 + \lambda_1 f(x_0) + \lambda_2 f^2(x_0) = 0 \\
\iff &\lambda_0(1,0,0) + \lambda_1(-1,2,1) + \lambda_2(3,3,-3) = 0 \\
\iff &(\lambda_0 - \lambda_1 + 3\lambda_2, 2\lambda_1 + 3\lambda_2, \lambda_2 - 3\lambda_2) = 0 && \text{opé } \mathbb{R}^3
\end{aligned}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_0 - \lambda_1 + 3\lambda_2 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 \\ \lambda_1 - 3\lambda_2 = 0 \end{cases} \qquad \text{def égalité } \mathbb{R}^3$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_0 = 0 \\ 3\lambda_1 = 0 \\ -9\lambda_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2 \end{array}$$

$$\iff \lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

Donc $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ est une famille libre de 3 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$. Donc, par caractérisation des bases en dimension finie, $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. On suppose $\dim E = 3$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = 0$.

(a) On suppose $f \neq 0$. $f^2 = 0$. Donc $\forall x \in E$, $f^2(x) = f(f(x)) = 0$. Donc $\forall x \in E$, $f(x) \in \ker(f)$ par définition. Or $\mathrm{Im}(f) = \{f(x), x \in E\}$. Donc $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)$ par définition inclusion. D'où $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) \leq \dim(\ker(f))$.

$f \neq 0$, donc $\exists x_0 \in E$, $f(x_0) \neq 0$. Donc $f(x_0) \in \mathrm{Im}(f)$. Donc $\mathrm{Im}(f) \neq 0$. Donc $\mathrm{rg}(f) \geq 1$. Et $\ker(f)$ sous-espace vectoriel de E, donc $\dim(\ker(f)) \leq \dim(E) = 3$.

D'où $1 \leq \mathrm{rg}(f) \leq \dim(\ker(f)) \leq 3$.

Par théorème du rang, $\mathrm{rg}(f) + \dim(\ker(f)) = \dim(E) = 3$. Si $\mathrm{rg}(f) = \dim(\ker(f))$, alors $3 = 2\,\mathrm{rg}(f)$. ☠. Donc $\mathrm{rg}(f) \neq \dim(\ker(f))$. Et donc $1 \leq \mathrm{rg}(f) < \dim(\ker(f)) \leq 3$.

(b) D'après 2a, $\mathrm{rg}(f) \in \{1, 2\}$. Supposons $\mathrm{rg}(f) = 2$. Alors $\dim(\ker(f)) = 3$ d'après 2a. Mais $\mathrm{rg}(f) + \dim(\ker(f)) = 3$ par théorème du rang. Donc $\mathrm{rg}(f) = 0$. Donc ☠.

Donc $\mathrm{rg}(f) = 1$.

(c) $\mathrm{rg}(f) = 1$. Donc $\exists a \in E$ tel que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(a)$. $\mathrm{rg}(f) = 1 \implies a \neq 0$. Alors $\forall x \ni E$, $f(x) \in \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(a)$. Donc $\forall x \in E$, $\exists u(x) \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = u(x)a$.

Montrons $u \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. Soit $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors $f(\lambda x + \mu y) = u(\lambda x + \mu y)a$ par définition u. Mais $f \in \mathcal{L}(E)$, donc $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) = \lambda u(x)a + \mu u(y)a = (\lambda u(x) + \mu u(y))a$. Donc $u(\lambda x + \mu y)a = (\lambda u(x) + \mu u(y))a$. Or $a \neq 0$, donc $u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y)$ (on a $(u(\lambda x + \mu y) - \lambda u(x) - \mu u(y))a = 0$ et il n'y a pas de diviseurs de 0 dans E et $a \neq 0$).

Donc u linéaire. Donc $u \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

Partie II : Étude Générale

3. Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

(a) On suppose $\exists p \in \mathbb{N}$ tel que $f^p = 0$ et $f \circ g = g \circ f$. Montrons que $\forall k \in \mathbb{N}$, $f^k \circ g = g \circ f^k$ et $(f \circ g)^k = f^k \circ g^k$.
Pour $k = 0$ et $k = 1$ déjà vraie. Supposons $\exists k \in \mathbb{N}$, $f^k \circ g = g \circ g^k$ et $(f \circ g)^k = f^k \circ g^k$. Alors

$$\begin{aligned} f^{k+1} \circ g &= f \circ (f^k \circ g) && \text{associativité } \circ \\ &= f \circ (g \circ f^k) && \text{hyp rec} \\ &= (f \circ g) \circ f^k && \text{associativité } \circ \\ &= (g \circ f) \circ f^k && \text{commutativité } f \text{ et } g \\ &= g \circ f^{k+1} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (f \circ g)^{k+1} &= (f \circ g) \circ (f \circ g)^k && \text{associativité } \circ \\ &= (f \circ g) \circ (f^k \circ g^k) && \text{hyp rec} \\ &= f \circ (g \circ f^k) \circ g^k && \text{associativité } \circ \\ &= f \circ (f^k \circ g) \circ g^k && \text{hyp rec} \\ &= f^{k+1} \circ g^{k+1} && \text{associativité } \circ \end{aligned}$$

Donc, par principe de récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}$, $f^k \circ g = g \circ f^k$ et $(f \circ g)^k = f^k \circ g^k$.

En particulier, $(f \circ g)^p = f^p \circ g^p = 0_{\mathcal{L}(E)} \circ g^p = 0$. Donc $f \circ g$ nilpotente.

(b) Supposons $f \circ g$ nilpotente. Donc $\exists p \in \mathbb{N}$ tel que $(f \circ g)^p = 0$. Alors $(g \circ f)^p = (f \circ g)^p = 0$ par commutativité. Donc $(g \circ f)$ nilpotente.

(c) Supposons $\exists p \in \mathbb{N}$, $f^p = 0$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{Id}_E &= \mathrm{Id}_E^p - f^p && \text{car } f \text{ et } \mathrm{Id}_E \text{ commutent} \\
&= (\mathrm{Id}_E - f) \circ \sum_{k=0}^{p-1} f^k \,\mathrm{Id}_E^{p-k-1} \\
&= (\mathrm{Id}_E - f) \circ \sum_{k=0}^{p-1} f^k
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Id}_E - f$ inversible à droite. Donc, par théorème d'isomorphisme, $\mathrm{Id}_E - f \in \mathrm{GL}(E)$ et en plus $(\mathrm{Id}_E - f)^{-1} = \sum_{k=0}^{p-1} f^k$.

4. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotente.

(a) Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $f^p = 0$. Soit $n \geq p$. Alors

$$\begin{aligned}
f^n &= f^{p+(n-p)} && \text{avec } n-p \in \mathbb{N} \\
&= f^p \circ f^{n-p} && \text{associativité } \circ \\
&= 0 \circ f^{n-p} && \text{def } f \\
&= 0_{\mathcal{L}(E)}
\end{aligned}$$

(b) On pose $A = \{n \in \mathbb{N},\ f^n = 0\}$. On a $A \neq \emptyset$ car $p \in A$ par définition. Donc A sous-ensemble de $\mathbb{N}$ non vide, donc $\min A$ existe. Donc $\eta(f) = \min A$ existe.

5. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotente. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $N_n = \ker(f^n)$.

(a) Par définition $\eta(f)$, $f^{\eta(f)} = 0$. Donc $\forall x \in E$, $f^{\eta(f)}(x) = 0$. Donc $E \subset \ker(f^{\eta(f)})$. Or $\ker(f^{\eta(f)}) \subset E$ car $f^{\eta(f)} \in \mathcal{L}(E)$. Donc $\ker(f^{\eta(f)}) = E$. Donc $N_{\eta(f)} = E$.

(b) Soit $p \in \mathbb{N}$. Soit $x \in N_p$. Donc $f^p(x) = 0$ par définition. Alors $f^{p+1}(x) = f(f^p(x)) = f(0) = 0$ car $f \in \mathcal{L}(E)$ et par associativité de $\circ$. Donc $x \in \ker(f^{p+1})$. Donc $N_p \subset N_{p+1}$. Donc $\forall p \in \mathbb{N}$, $N_p \subset N_{p+1}$.

(c) Supposons $\exists p \in \mathbb{N}$ tel que $\dim N_p = \dim N_{p+1}$.

i. Or $N_p \subset N_{p+1}$ cf 5b. Donc $N_p = N_{p+1}$.

ii. On suppose $q \in \mathbb{N}$ tel que $N_p = N_{p+q}$. Par 5b et récurrence facile, on a $N_p \subset N_{p+1} \subset \cdots \subset N_{p+q} \subset N_{p+q+1}$.

iii. Soit $x \in \mathbb{N}_{p+q+1}$. Donc $f^{p+q+1}(x) = 0$ par définition N_{p+q+1}. Donc $f^{p+1}(f^q(x)) = 0$. Donc $f^q(x) \in N_{p+1}$ par définition N_{p+1}. Or $N_p = N_{p+1}$. Donc $f^q(x) \in N_p$.

iv. On a donc $N_{p+q+1} \subset N_p$ par définition inclusion et par question précédente. Or $N_p \subset N_{p+q+1}$ par 5(c)ii. Donc $N_p = N_{p+q+1}$.

v. On a montré $N_p = N_{p+1}$ et si $\exists q \in \mathbb{N}$ tel que $N_{p+q} = N_p$, alors $N_{p+q+1} = N_p$. Donc, par principe de récurrence, $\forall q \in \mathbb{N}$, $N_p = N_{p+q}$.

(d) On a $f^{\eta(f)} = f^{\eta(f)+1}$ par 4a. Donc $N_{\eta(f)} = N_{\eta(f)+1}$. Donc $\forall q \in \mathbb{N}$, $N_{\eta(f)} = N_{\eta(f)+q}$ par 5(c)v. Donc $\forall q \in \mathbb{N}$, $\dim(N_{\eta(f)}) = \dim(N_{\eta(f)+q})$. Donc $(\dim(N_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est stationnaire à partir du rang $\eta(f)$.

Si $\exists p \in \{0, \ldots, \eta(f)-1\}$ tel que $N_p = N_{p+1}$, alors $N_p = N_{\eta(f)} = E$ par 5(c)v. Donc $f^p = 0$ avec $p < \eta(f)$. Donc ☠ par définition $\eta(f)$. Donc $\forall p \in \{0, \ldots, \eta(f)-1\}$, $N_p \subsetneq N_{p+1}$. Donc $(\dim(N_p))_{0 \leq \eta(f)}$ strictement croissante. Donc $\forall p \in \{0, \ldots, \eta(f)-1\}$, $\dim(N_p) + 1 \leq \dim(N_{p+1})$ car ce sont des entiers. Donc $\dim(N_{\eta(f)} \geq \dim(N_0) + \eta(f) = \eta(f)$ car $f^0 = \mathrm{Id}_E$ injective.

Or $N_{\eta(f)} = E$ car $f^{\eta(f)} = E$. Donc $\eta(f) \leq \dim(N_{\eta(f)}) = \dim(E)$.

Partie III : Commutant d'un endomorphisme nilpotent

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotente tel que $\eta(f) = \dim(E) = n$. On note $C(f) = \{g \in \mathcal{L}(E),\ g \circ f = f \circ g\}$.

6. On a $C(f) \subset \mathcal{L}(E)$. Soit $g, h \in \mathbb{C}(f)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors $\lambda g+\mu h \in \mathcal{L}(E)$ car $\mathcal{L}(E)$ est un $\mathbb{K}$-ev. Et $f\circ(\lambda g+\mu h) = \lambda f \circ g + \mu f \circ h = \lambda g \circ f + \mu h \circ f = (\lambda g + \mu h) \circ f$. Donc $\lambda g + \mu h \in C(f)$. Donc $C(f)$ sev $\mathcal{L}(E)$ par caractérisation des sev.

7. Soit $g \in C(f)$.

(a) Par définition, $n = \eta(f) = \min\{p \in \mathbb{N},\ f^p = 0\}$. Donc $f^{n-1} \in \{p \in \mathbb{N},\ f^p = 0\}$ et donc $\eta(f) \leq n-1$ par définition du minimum. Donc $\exists x_0 \in E$ tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0$.

(b) On pose $\mathcal{B} = (x_0, \dots, f^{n-1}(x_0))$. Soit $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{K}$ tel que $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0) = 0$. Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0) = 0 &\implies f^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0)\right) = 0 \\
&\iff \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^{n-1+k}(x_0) = 0 && \text{car } f^{n-1} \in \mathcal{L}(E) \\
&\iff \lambda_0 f^{n-1}(x_0) = 0 && \text{cf } 4a \\
&\iff \lambda_0 = 0 && \text{car } f^{n-1}(x_0) \neq 0 \\
&\implies \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0) = 0 \\
&\implies f^{n-2}\left(\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0)\right) = 0 \\
&\iff \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k f^{n-2+k}(x_0) = 0 && \text{linéarité} \\
&\iff \lambda_1 f^{n-1}(x_0) = 0 && \text{cf } 4a \\
&\iff \lambda_1 = 0 && \text{car} f^{n-1}(x_0) \neq 0 \\
&\implies \sum_{k=2}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0) = 0
\end{aligned}$$

Par n itérations du processus, on a $\lambda_0 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$.

Donc $\mathcal{B}$ libre dans E avec $\dim E = n$ donc $\mathcal{B}$ base de E par caractérisation des bases en dimension finie.

(c) Soit $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ tel que $g(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x_0)$. Soit $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Alors

$$\begin{aligned}
g(f^k(x_0)) &= g \circ f^k(x_0) \\
&= f^k \circ g(x_0) && \text{cf raisonnement } 3a \\
&= f^k(g(x_0)) \\
&= f^k\left(\sum_{j=0}^{n-1} a_j f^j(x_0)\right) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} a_j f^{k+j}(x_0) && \text{linéarité}
\end{aligned}$$

(d) Soit $x \in E$. Alors $\exists x_0, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{K}$ tel que $x = \sum_{k=0}^{n-1} x_k f^k(x_0)$ car $\mathcal{B}$ base de E. Alors

$$\begin{aligned}
g(x) &= g\left(\sum_{k=0}^{n-1} x_k f^k(x_0)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} x_k g(f^k(x_0)) && \text{linéarité } g \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left(x_k \sum_{j=0}^{n-1} a_j f^{j+k}(x_0)\right) && \text{question précédente}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} a_j x_k f^{j+k}(x_0) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} a_j x^k f^{j+k}(x_0) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} a_j \left(\sum_{k=0}^{n-1} x_k f^j(f^k(x_0)) \right) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} a_j f^j \left(\sum_{k=0}^{n-1} x_k f^k(x_0) \right) && \text{car } f^j \in \mathcal{L}(E) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} a_j f^j(x) && \text{def } x \\
&= \left(\sum_{j=0}^{n-1} a_j f^j \right)(x) && \text{def opé } \mathcal{L}(E)
\end{aligned}$$

Donc $g = \sum_{j=0}^{n-1} a_j f^j$.

8. D'après 7, $C(f) \subset \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, f, \dots, f^{n-1})$.
Soit $g \in \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, f, \dots, f^{n-1})$. Donc $\exists a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ tel que $g = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$. Alors

$$\begin{aligned}
g \circ f &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k \right) \circ f \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k \circ f && \text{linéarité à gauche } \circ \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} a_k f \circ f^k && \text{car } f \circ f^k = f^{k+1} = f^k \circ f \\
&= f \circ \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k \right) && \text{linéarité à droite } \circ \\
&= f \circ g
\end{aligned}$$

Donc $g \in C(f)$. Donc $\mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, f, \dots, f^{n-1}) \subset C(f)$.
Donc $C(f) = \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, f, \dots, f^{n-1})$.

9. Soit $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{K}$ tel que $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Alors $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0) = 0_E$. Or, d'après 7b, $\mathcal{B} = (x_0, \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E. Donc $\mathcal{B}$ libre. Donc $\lambda_0 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$. Donc $(\mathrm{Id}_E, f, \dots, f^{n-1})$ libre.
Donc $(\mathrm{Id}_E, \dots, f^{n-1})$ base de $C(f) = \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, f, \dots, f^{n-1})$. Donc $\dim(C(f)) = n = \dim(E)$.

Problème 2 (Endomorphismes unipotents) :
Soit $p \geq 2$. On note

$$\mathcal{M}(p) = \{f \in \mathcal{L}(E),\ f^p = \mathrm{Id}_E\}$$

Partie I : Préliminaires

1. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$. Supposons $\ker(g) = \{0\}$. Soit $x, y \in E$ tels que $g(x) = g(y)$. alors $g(x) - g(y) = 0$ et par linéarité, $g(x - y) = 0$. Donc $x - y \in \ker(g)$ par définition de $\ker(g)$ et donc $x = y$. Donc g est injective.

Réciproquement, supposons que g est injective. Soit $x \in \ker(g)$. On a donc $g(x) = 0 = g(0)$ puisque g est linéaire. Et l'injectivité de g nous donne alors $x = 0$, c'est-à-dire $\ker(g) = \{0\}$.

2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

(a) Comme f est un endomorphisme de E, on a $f(e_1), f(e_2) \in E = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$. Donc $\exists a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $f(e_1) = ae_1 + be_2$ et $f(e_2) = ce_1 + de_2$.

(b) On pose g vérifiant $g(e_1) = de_1 - be_2$ et $g(e_2) = -ce_1 + ae_2$. Comme (e_1, e_2) est une base de E, on définit donc ainsi une application linéaire sur E (cf argument question 4). On a alors

$$\begin{aligned} f \circ g(e_1) &= f(de_1 - be_2) \\ &= df(e_1) - bf(e_2) \\ &= d(ae_1 + be_2) - b(ce_1 + de_2) \\ &= (ad - bc)e_1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f \circ g(e_2) &= f(-ce_1 + ae_2) \\ &= af(e_2) - cf(e_1) \\ &= a(ce_1 + de_2) - c(ae_1 + be_2) \\ &= (ad - bc)e_2 \end{aligned}$$

par linéarité de f.

On construit donc ainsi un endomorphisme de E (on la connaît sur une base de E) et $f \circ g = (ad - bc)\,\mathrm{Id}_E$.

(c) Si $ad - bc \neq 0$, on alors $f \circ \left(\frac{1}{ad-bc} g\right) = \mathrm{Id}_E$ et donc f est inversible avec $f^{-1} = \frac{1}{ad-bc} g$.

Réciproquement, supposons f inversible. On a donc $d \neq 0$ ou $b \neq 0$. Car sinon, on aurait $f(e_1) = ae_1$ et $f(e_2) = ce_1$ donc $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}(e_1) \neq E$ et f ne serait pas surjective donc pas bijective. Ce qui est absurde.

Donc $(b, d) \neq (0, 0)$. Et par suite $de_1 - be_2 \neq 0$ puisque (e_1, e_2) est libre. On en déduit donc $f(de_1 - be_2) \neq 0$ car $\ker f = \{0\}$ car f injective. La linéarité de f nous donne alors $f(de_1 - be_2) = df(e_1) - bf(e_2) = d(ae_1 + be_2) - b(ce_1 + de_2) = (ad - bc)e_1 \neq 0$ ce qui implique $ad - bc \neq 0$ puisque $e_1 \neq 0$.

Partie II : Cas $p = 2$

3. Soit $u \in \mathcal{M}(2)$ telle que $u \neq \mathrm{Id}_E$ et $u \neq -\mathrm{Id}_E$.

(a) Soit $x \in \ker(u - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(u + \mathrm{Id}_E)$. Alors $u(x) - x = 0$ ce qui nous donne $u(x) = x$ et on a également $u(x) + x = 0$ ce qui nous donne $u(x) = -x$. On a donc $x = u(x) = -x$ et donc $x = 0$. Donc $\ker(u - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(u + \mathrm{Id}_E) = \{0\}$.

On a aussi $\forall x \in E$, $x = \frac{1}{2}(u(x) + x) - \frac{1}{2}(u(x) - x)$. Et il reste juste à montrer que $u(x) - x \in \ker(u + \mathrm{Id}_E)$ et $u(x) + x \in \ker(u - \mathrm{Id}_E)$. Mais $(u + \mathrm{Id}_E)(u(x) - x) = u^2(x) - x = 0$ et $(u - \mathrm{Id}_E)(u(x) + x) = u^2(x) - x = 0$ puisque $u \in \mathcal{M}(2)$. Donc

$$x = \underbrace{\frac{1}{2}(u(x) + x)}_{\in \ker(u - \mathrm{Id}_E)} - \underbrace{\frac{1}{2}(u(x) - x)}_{\in \ker(u + \mathrm{Id}_E)}$$

(b) On sait que $u \pm \mathrm{Id}_E \neq 0$. Donc $\mathrm{rg}(u \pm \mathrm{Id}_E) \neq 0$ donc $\mathrm{rg}(u \pm \mathrm{Id}_E) \in \{1, 2\}$. Et par théorème du rang, $\dim(\ker(u \pm \mathrm{Id}_E)) \in \{0, 1\}$. Mais par ailleurs, $\dim(\ker(u + \mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(u - \mathrm{Id}_E)) = \dim E = 2$ nous donne donc $\dim(\ker(u + \mathrm{Id}_E)) = \dim(\ker(u - \mathrm{Id}_E)) = 1$ (et donc $\mathrm{rg}(u - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{rg}(u + \mathrm{Id}_E) = 1$).

(c) On sait que $\ker(u - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(u + \mathrm{Id}_E)$ sont des droites vectorielles. Soit $\varepsilon_1 \in \ker(u - \mathrm{Id}_E)$ avec $\varepsilon_1 \neq 0$ et soit $\varepsilon_2 \in \ker(u + \mathrm{Id}_E)$ avec $\varepsilon_2 \neq 0$. Alors $\ker(u - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1)$ et $\ker(u + \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_2)$.

En particulier, on a donc $u(\varepsilon_1) - \varepsilon_1 = 0$, ce qui revient à $u(\varepsilon_1) = \varepsilon_1$. Et de même, $u(\varepsilon_2) = -\varepsilon_2$.

Par ailleurs, $(\varepsilon_1 \varepsilon_2)$ est la concaténation d'une base de $\ker(u - \mathrm{Id}_E)$ et d'une base de $\ker(u + \mathrm{Id}_E)$. C'est donc une base adaptée à la somme directe et donc $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base de $\ker(u - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(u + \mathrm{Id}_E) = E$.

4. On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (2x-y, 3x-2y) \end{array}$$

(a) Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $(x,y),(z,t) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\begin{aligned} f\Big(\lambda(x,y)+\mu(z,t)\Big) &= f(\lambda x+\mu z, \lambda y+\mu t) \\ &= \Big(2(\lambda x+\mu z)-(\lambda y+\mu t), 3(\lambda x+\mu z)-2(\lambda y+\mu t)\Big) && \text{def } f \\ &= \Big(\lambda(2x-y)+\mu(2z-t), \lambda(3x-2y)+\mu(3z-2t)\Big) \\ &= \lambda(2x-y,3x-2y)+\mu(2z-t,3z-2t) \\ &= \lambda f(x,y)+\mu f(z,t) && \text{def } f \end{aligned}$$

et donc f est linéaire.

(b) soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\begin{aligned} f^2(x,y) &= f(2x-y,3x-2y) \\ &= (2(2x-y)-(3x-2y), 3(2x-y)-2(3x-2y)) \\ &= (x,y) \end{aligned}$$

Donc $f^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ et donc $f \in \mathcal{M}(2)$. Donc f est une symétrie vectorielle, par caractérisation des symétries.

(c) On a $f^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$, donc f est bijective et $f^{-1} = f$ par théorème d'isomorphisme. On a donc $\ker(f) = \{0\}$ et $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}^2) = 2$ par surjectivité ou par théorème du rang.

(d) Soit $x, y \in \mathbb{R}$. On cherche à résoudre $f(x,y) = (x,y)$, c'est-à-dire $(x-y, 3x-3y) = (0,0)$. Une solution évidente non nulle est $(1,1)$. On pose donc $u = (1,1)$.

On veut résoudre maintenant $(f+\mathrm{Id}_E)(x,y) = 0$ qui est équivalent à $(3x-y, 3x-y) = (0,0)$ dont une solution évidente non nulle est $(1,3)$. On pose alors $v = (1,3)$.

(e) On a montré que f est une symétrie vectorielle. Donc, par caractérisation des symétries, f est la symétrie par rapport à $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et $E = \ker(f-\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f+\mathrm{Id}_E)$. Or $u \in \ker(f-\mathrm{Id}_E)$ et $v \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)$ d'après la question précédente. Donc $\dim(\ker(f+\mathrm{Id}_E)) \geq 1$ et $\dim(\ker(f-\mathrm{Id}_E)) \geq 1$. Or, par Grassmann (ou par caractérisation des supplémentaires en dimension finie), $\dim(\ker(f-\mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f+\mathrm{Id}_E)) = \dim(E) = 2$. Donc $\dim(\ker(f-\mathrm{Id}_E)) \leq 1$ et $\dim(\ker(f+\mathrm{Id}_E)) \leq 1$. Donc $\dim(\ker(f-\mathrm{Id}_E)) = \dim(\ker(f+\mathrm{Id}_E)) = 1$.

Or $\mathrm{Vect}(u) \subset \ker(f-\mathrm{Id}_E)$ et $u \neq 0$ donc $\mathrm{Vect}(u)$ est une droite vectorielle. Donc $\ker(f-\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(u)$. De même, $v \in \ker(f+\mathrm{Id}_E)$, $v \neq 0$ et $\dim(\ker(f+\mathrm{Id}_E))$, donc $\ker(f+\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(v)$.

Finalement, $E = \ker(f-\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f+\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(u) \oplus \mathrm{Vect}(v)$. Donc (u,v) est la concaténation de deux bases de deux supplémentaires de E, donc (u,v) est une base de E adaptée à la somme directe $\mathrm{Vect}(u) \oplus \mathrm{Vect}(v)$.

Partie III : Cas $p = 3$

Soit $f \in \mathcal{M}(3)$. On considère $F = \ker(f-\mathrm{Id}_E)$ et $G = \ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$.

5. Si $\dim(F) = 2$, on a alors $F = E$ car $\dim E = 2$. Et donc $f - \mathrm{Id}_E = 0$ ce qui nous amène à $f = \mathrm{Id}_E$.

6. (a) Soit $x \in F \cap G$. Donc $x \in \ker(f-\mathrm{Id}_E)$ ce qui conduit à $f(x) = x$. Par ailleurs, on a aussi $x \in G = \ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$. On a donc $f^2(x)+f(x)+x = 0$. Mais comme $f(x) = x$, on a aussi $f^2(x) = f(f(x)) = f(x) = x$. On a donc finalement $3x = 0$ ce qui nous donne $x = 0$ et donc $F \cap G = \{0\}$.

(b) Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} (f-\mathrm{Id}_E)(f^2(x)+f(x)+x) &= f^3(x)+f^2(x)+f(x)-f^2(x)-f(x)-x && \text{par linéarité} \\ &= x - x && \text{car } f^3 = \mathrm{Id}_E \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $f^2(x)+f(x)+x \in F$. Mais comme F est un sev de E (puisque c'est le noyau d'une application linéaire), on en déduit $\frac{1}{3}(f^2(x)+f(x)+x) \in F$.

De même, on calcul

$$\begin{aligned}
&(f^2+f+\mathrm{Id}_E)(2x-f(x)-f^2(x)) \\
=&2(x)-f^3(x)-f^4(x)+2f(x)-f^2(x)-f^3(x)+2x-f(x)-f^2(x) && \text{Linéarité} \\
=&-x-f(f^3(x))+f(x)-x+2x && \text{car } f^3=\mathrm{Id}_E \\
=&0
\end{aligned}$$

donc $2x-f(x)-f^2(x) \in G$ et par stabilité par combinaison linéaire, on a donc $\frac{1}{3}(2x-f(x)-f^2(x)) \in G$.

(c) Si $x \in E$, on a

$$x=\frac{1}{3}(x+f(x)+f^2(x))+\frac{1}{3}(2x-f(x)-f^2(x))$$

Donc $x \in \ker(f-\mathrm{Id}_E)+\ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$. On a donc $\ker(f-\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)=E$ par définition des supplémentaires en utilisant la question 6a et 6b.

(d) On pose $p=\frac{1}{3}(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$ et $q=\frac{1}{3}(2\,\mathrm{Id}_E-f-f^2)$. Alors

$$\begin{aligned}
p^2&=\frac{1}{9}(f^2+f+\mathrm{Id}_E)^2 & q^2&=\frac{1}{9}(2\,\mathrm{Id}_E-f-f^2)^2 \\
&=\frac{1}{9}(f^4+2f^3+3f^2+2f+\mathrm{Id}_E) & &=\frac{1}{9}(4\,\mathrm{Id}_E-4f-3f^2+2f^3+f^4) \\
&=\frac{1}{9}(f+2\,\mathrm{Id}_E+3f^2+2f+\mathrm{Id}_E) & &=\frac{1}{9}(4\,\mathrm{Id}_E-4f-3f^2+2\,\mathrm{Id}_E+f) & &\text{car } f^3=\mathrm{Id}_E \\
&=\frac{1}{3}(f^2+f+\mathrm{Id}_E) & &=\frac{1}{3}(2\,\mathrm{Id}_E-f-f^2) \\
&=p & &=q
\end{aligned}$$

Donc, par caractérisation des projecteurs, p et q sont des projecteurs.

De plus, p est le projecteur sur $\mathrm{Im}(p)=\ker(p-\mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\ker(p)$ avec $E=\ker(p)\oplus\mathrm{Im}(p)$. Or, d'après la définition de p, $\mathrm{Im}(p)\subset F$ et $\ker(p)=G$. Donc, par théorème du rang, $\mathrm{rg}(p)=\dim(E)-\dim(G)=\dim(F)$. Donc $\mathrm{Im}(p)=F$. Donc p est le projecteur sur F parallèlement à G.

De plus, $p+q=\mathrm{Id}_E$, donc q est le projecteur sur $\mathrm{Im}(q)=\ker(q-\mathrm{Id}_E)=\ker(p)=G$ parallèlement à $\ker(q)=\ker(\mathrm{Id}_E-p)=\mathrm{Im}(p)=F$.

7. On suppose $\dim F=1$.

(a) On a $E=F\oplus G$. Donc la formule de Grassmann nous donne $\dim(G)=\dim E-\dim F=1$. Donc F et G sont des droites vectorielles de E. Par ailleurs, la concaténation de deux bases de F et G donne une base de E. On choisit donc une base de F et une base de G, c'est à dire un vecteur $u_1\neq 0$ de F et un vecteur $u_2\neq 0$ de G, puisque ce sont des droites vectorielles et donc une base est composé d'un seul vecteur non nul.

Alors la concaténation de ces deux bases est alors (u_1,u_2) et est donc une base de E.

(b) On a $f(u_2)\in E=F\oplus G$. Donc $\exists a,b\in\mathbb{R}$ tels que $f(u_2)=au_1+bu_2$ puisque $F=\mathrm{Vect}(u_1)$ et $G=\mathrm{Vect}(u_2)$.

Mais $u_2\in G=\ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$. Donc $f^2(u_2)+f(u_2)+u_2=0$. Mais $f^2(u_2)=f(au_1+bu_2)=au_1+b(au_1+bu_2)=(a+ab)u_1+b^2u_2$. Donc $f^2(u_2)+f(u_2)+u_2=(2a+ab)u_1+(b^2+b+1)u_2=0$. La liberté de la famille entraîne alors en particulier $b^2+b+1=0$ qui est de discriminant $1-4=-3<0$. Il n'y a donc pas de solution réelle. Or $b\in\mathbb{R}$. Donc ☠.

L'hypothèse supplémentaire faite est donc fausse, autrement dit $\dim F\neq 1$.

8. On suppose $\dim F=0$.

(a) Supposons que $(e_1,f(e_1))$ n'est pas libre. Elle est donc liée. On a forcément $f(e_1)\neq 0$, sinon $e_1\in F$ et donc $F\neq\{0\}$. Ce qui est absurde par hypothèse. Donc $\exists\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $f(e_1)=\lambda e_1$.

Mais d'autre part, comme F et G sont supplémentaires, le formule de Grassmann nous donne $\dim G=2=\dim E$ et donc $G=E$. Donc $e_1=G=\ker(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$. On en déduit donc $f^2(e_1)+f(e_1)+e_1=(\lambda^2+\lambda+1)e_1=0$. Mais $e_1\neq 0$ entraîne donc $\lambda^2+\lambda+1=0$ ce qui est impossible dans $\mathbb{R}$.

Donc $(e_1,f(e_1))$ ne peut pas ne pas être libre, elle est donc libre.

C'est alors une famille de cardinal 2 en dimension 2, c'est donc une base de E, par caractérisation des bases en dimension finie.

(b) On a $f(e_1) \in E = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$. Donc $\exists a, b \in \mathbb{R}$ tels que $f(e_1) = ae_1 + be_2$. Mais on vient de montrer que $(e_1, f(e_1))$ est une base de E, c'est donc une famille libre, ce qui impose e_1 et $f(e_1)$ à ne pas être colinéaire. Donc on ne peut pas avoir $f(e_1) = ae_1$ autrement dit, $b \neq 0$.

(c) On a $e_2 = \frac{1}{b}(f(e_1) - ae_1)$. Donc $f(e_2) = \frac{1}{b}f^2(e_1) - \frac{a}{b}f(e_1)$ par linéarité.

(d) D'autre part, on a toujours $G = E$. Donc $e_1 \in G = \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$, ce qui veut donc dire que $f^2(e_1) = -f(e_1) - e_1$.

(e) On en déduit

$$\begin{aligned}
f(e_2) &= \frac{1}{2}f^2(e_1) - \frac{a}{b}f(e_1) \\
&= \frac{1}{b}(-f(e_1) - e_1) - \frac{a}{b}f(e_1) \\
&= -\frac{a+1}{b}f(e_1) - \frac{1}{b}e_1 \\
&= -\frac{a+1}{b}(ae_1 + be_2) - \frac{1}{b}e_1 \\
&= -\frac{a^2+a+1}{b}e_1 - (a+1)e_2
\end{aligned}$$

Partie V : Étude générale

9. L'endomorphisme nul n'est pas dans $\mathcal{M}(p)$. Ce n'est donc pas un espace vectoriel.

10. Soit $f \in \mathcal{M}(p)$. On a donc $f^p = \mathrm{Id}_E$. Donc $f \circ f^{p-1} = \mathrm{Id}_E$ et $p - 1 \geq 1$. donc $f^{p-1} \in \mathcal{L}(E)$. Donc, par théorème d'isomorphisme ou caractérisation de la bijectivité, f est bijective, donc $f \in \mathrm{GL}(E)$ et $f^{-1} = f^{p-1}$.

Par ailleurs, comme on a $f^p = \mathrm{Id}_E$, en composant à droite par f^{-1}, on obtient $f^{p-1} = f^{-1}$, puis $f^{p-2} = (f^{-1})^2$ et après p itérations, $\mathrm{Id}_E = (f^{-1})^p$. Donc $f^{-1} \in \mathcal{M}(p)$.

Cependant, $\mathcal{M}(p)$ n'est pas un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$. Il manque la stabilité par la composition. Mais pas exemple, en prenant l'application $f : (x, y) \mapsto (2x - y, 3x - 2y)$ de la partie 2 et $g : (x, y) \mapsto (y, x)$, on a déjà vu que $f \in \mathcal{M}(2)$. Clairement, $g \in \mathcal{M}(2)$ également. En revanche,

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ g \circ f(x, y) = (3x - 2y, 2x - y)$$

et

$$\begin{aligned}
\forall x, y \in \mathbb{R},\ (g \circ f)^2(x, y) &= (3(3x - 2y) - 2(2x - y), 2(3x - 2y) - (2x - y)) \\
&= (5x - 4y, 4x - 3y) \\
&\neq (x, y).
\end{aligned}$$

Donc $(g \circ f)^2 \notin \mathcal{M}(2)$. A fortiori, tous les $\mathcal{M}(2p)$ ne sont pas stables pas la composition. Donc, en général, $\mathcal{M}(p)$ n'est pas un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$.

11. On définit f_1 et f_2 par $f_i(e_j) = \delta_{i,j}e_i$ pour tout $i, j \in \{1, 2\}$. Donc on connaît l'image d'une base de E par f_1 et f_2. Or toute application linéaire est entièrement déterminé par l'iimage d'une base. On peut donc étendre cette définition par linérité à E tout entier. On définit donc bien deux applications linéaires définies par

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f_i(xe_1 + ye_j) = x\delta_{i,1}e_1 + y\delta_{i,2}e_2$$

c'est-à-dire $f_1(xe_1 + ye_2) = xe_1$ et $f_2(xe_1 + ye_2) = ye_2$.

On pose $\mathcal{H} = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$.

12. Soit $f \in \mathcal{M}(p) \cap \mathcal{H}$. Donc $\exists a, b \in \mathbb{R}$ tels que $f = af_1 + bf_2$ puisque $f \in \mathcal{H}$.

Montrer alors par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^n(e_i) = \delta_{i,1} a^n e_1 + \delta_{i,2} b^n e_2$, *i.e.* $f(e_1) = a^n e_1$ et $f^n(e_2) = b^n e_2$.

On a d'abord $f^0 = \mathrm{Id}_E$ et $a^0 = b^0 = 1$, donc la relation est vérifiée. Supposons que ce soit encore le cas pour un certain $n \geq 0$. Alors dans ce cas

$$\begin{aligned}
f^{n+1}(e_1) &= f(f^n(e_1)) && \\
&= f(a^n e_1) && \text{par Hyp Rec} \\
&= a^n f(e_1) && \text{par linéarité} \\
&= a^n (af_1(e_1) + bf_2(e_1)) && \text{par def } f \\
&= a^{n+1} e_1 && \text{par def } f_1,\ f_2
\end{aligned}$$

On peut effectuer exactement le même calul pour e_2 et on trouve alors $f^{n+1}(e_2) = f(b^n e_2) = b^n \times be_2 = b^{n+1} e_2$.

On vient donc de prouver par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^n(e_1) = a^n e_1$ et $f^n(e_2) = b^n e_2$. En particulier, on a $f^p(e_1) = a^p e_1 = e_1$ et $f^p(e_2) = b^p e_2 = e_2$ car $f^p = \mathrm{Id}_E$. Mais comme $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est une base de E, cette famille est en particulier libre, donc $e_1 \neq 0$ et $e_2 \neq 0$. Donc on doit avoir forcément $a^p = 1$ et $b^p = 1$.

Comme nous sommes dans $\mathbb{R}$, il n'y a que deux possibilitées :

- Soit p est pair. Et dans ce cas $a = \pm 1$ et $b = \pm 1$. Et donc $f = \pm f_1 \pm f_2$, autrement dit,

$$\mathcal{M}(p) \cap \mathcal{H} = \{f_1 + f_2, f_1 - f_2, -f_1 + f_2, -f_1 - f_2\}$$

  qui contient donc 4 éléments.

- Soit p est impair et auquel cas, $a = b = 1$. Et donc

$$\mathcal{M}(p) \cap \mathcal{H} = \{f_1 + f_2\}$$

  qui ne contient qu'un seul élément.

Au passage, on peut noter aussi que $f_1 + f_2 = \mathrm{Id}_E$.

13. Soit $f_3, f_4 \in \mathcal{L}(E)$ telle que

$$\begin{array}{ll} f_3(e_1) = e_2 & f_3(e_2) = 0 \\ f_4(e_1) = 0 & f_4(e_2) = e_1 \end{array}$$

Une application linéaire étant entièrement déterminée par l'image d'une base, f_3 et f_4 sont bien des endomorphismes de E.

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{k=1}^4 \lambda_k f_k = 0$. Alors, en particulier

$$\begin{aligned}
\begin{cases} \sum_{k=1}^4 \lambda_k f_k(e_1) = 0 \\ \sum_{k=1}^4 \lambda_k f_k(e_2) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} \lambda_1 e_1 + \lambda_3 e_2 = 0 \\ \lambda_2 e_2 + \lambda_4 e_1 = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = \lambda_4 = 0 \end{cases} \qquad \text{car } (e_1, e_2) \text{ libre}
\end{aligned}$$

Donc (f_1, f_2, f_3, f_4) est une famille libre de $\mathcal{L}(E)$. Or $\dim(E) = 2$, donc $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie et $\sim (\mathcal{L}(E)) = \dim(E)^2 = 4$. Donc, par caractérisation des bases en dimension finie, (f_1, f_2, f_3, f_4) est une base de $\mathcal{L}(E)$.

14. Commençons par une remarque générale. Soit $f \in \mathrm{Vect}(f_3, f_4)$. Donc $\exists \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ tels que $f = \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4$. Alors $f(e_1) = \lambda_3 e_2$. Et donc $f^2(e_1) = \lambda_3 \lambda_4 e_1$. Puis, par une récurrence très facile, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{2n}(e_1) = (\lambda_3 \lambda_4)^n e_1$ et $f^{2n+1}(e_1) = \lambda_3^{n+1} \lambda_4^n e_2$. De même $f^{2n}(e_2) = (\lambda_3 \lambda_4) e_2$ et $f^{2n+1}(e_2) = \lambda_3^n \lambda_4^{n+1} e_1$. La symétrie des deux situations nous permet de nous focaliser que sur e_1 par exemple.

En particulier, si $f \in \mathcal{M}(2p+1)$, on a $f^{2p+1}(e_1) = e_1$. Donc $\lambda_3^{p+1} \lambda_4^p e_2 = e_1$. Or (e_1, e_2) est libre. Donc $e_1 \notin \mathrm{Vect}(e_2)$. Donc ☠. Donc

$$\mathcal{M}(2p+1) \cap \mathrm{Vect}(f_3, f_4) = \emptyset.$$

Si $f \in \mathcal{M}(4p)$, alors $f^{4p}(e_1) = e_1$ et donc $(\lambda_3 \lambda_4)^{2p} e_1 = e_1$. Donc $(\lambda_3 \lambda_4)^{2p} = 1$. Or $\lambda_3 \lambda_4 \in \mathbb{R}$, donc $\lambda_3 \lambda_4 = \pm 1$. Et donc

$$\mathcal{M}(4p) \cap \mathrm{Vect}(f_3, f_4) = \left\{ \lambda f_3 + \frac{1}{\lambda} f_4,\ \lambda f_3 - \frac{1}{\lambda} f_4,\ \lambda \in \mathbb{R}^* \right\}.$$

Si $f \in \mathcal{M}(4p+2)$, alors $f^{4p+2}(e_1) = e_1$ et donc $(\lambda_3\lambda_4)^{2p+1}e_1 = e_1$. Donc $(\lambda_3\lambda_4)^{2p+1} = 1$ et donc $\lambda_3\lambda_4 = 1$ car $\lambda_3\lambda_4 \in \mathbb{R}$. Donc

$$\mathcal{M}(4p+2) \cap \mathrm{Vect}(f_3, f_4) = \left\{\lambda f_3 + \frac{1}{\lambda} f_4,\ \lambda \in \mathbb{R}^*\right\}.$$