NOM :
Prénom :

Mardi 27 Janvier 2026

Interrogation 16

Polynômes 1

Correction

Exercice 1 :
Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Division euclidienne polynomiale.
Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$, $B \neq 0$. Alors $\exists!(P, Q) \in \mathbb{K}[X]2$ tel que $A = BP + Q$, $\deg(Q) < \deg(B)$.

2. Formule de Taylor polynomiale.
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. Alors
$$P(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n.$$

3. Définition degré d'un polynôme.
Soit $P(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$. On définit le degré de P, noté $\deg(P)$, par :
$$\deg(P) = \begin{cases} -\infty & P = 0 \\ \max\{n \in \mathbb{N},\ a_n \neq 0\} & P \neq 0 \end{cases}$$

4. Degré d'une somme de polynômes.
Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$. Alors $\deg(A+B) \leq \max(\deg(A), \deg(B))$. De plus, $\deg(A+B) = \max(\deg(A), \deg(B))$ si, et seulement si, $\deg(A) \neq \deg(B)$ ou $(\deg(A) = \deg(B)$ et $\operatorname{coeff\,dom}(A) + \operatorname{coeff\,dom}(B) \neq 0)$.

5. Listes des polynômes inversibles.
$\mathbb{K}[X]^\times = \mathbb{K}_0[X] \setminus \{0\} = \{P \in \mathbb{K}[X],\ \deg(P) = 0\}$, *i.e.* l'ensemble des polynômes inversible de $\mathbb{K}[X]$ est l'ensemble des polynômes constants non nuls,

6. Définition d'une racine d'un polynôme.
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. On dit que a est une racine de P si $\widetilde{P}(a) = 0$.

7. Définition d'une famille de polynômes échelonnée en degré.
Soit $P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{K}[X]$. On dit que la famille $(P_1, \ldots, P_n)$ est échelonnée en degré si $\deg(P_1) < \deg(P_2) < \cdots < \deg(P_n)$.

8. Définition du polynôme dérivé.
Soit $P(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$. On définit le polynôme dérivé de P, noté P', par
$$P'(X) = \begin{cases} 0 & \deg(P) \leq 0 \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n X^{n-1} & \deg(P) \geq 1 \end{cases}$$

Exercice 2 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $P_n(X) = X^n + (X+1)^n + (X+2)^n$ par $B(X) = X^3 - X$.

D'abord, on factorise le polynôme B : $B(X) = X(X^2-1) = X(X-1)(X+1)$. $B \neq 0$, donc par division euclidienne, $\exists!(Q_n, R_n) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que $P_n(X) = B(X)Q_n(X) + R_n(X)$, $\deg(R_n) < \deg(B) = 3$. Donc $\deg(R_n) \leq 2$. Donc $\exists a_n, b_n, c_n \in \mathbb{R}$ tel que $R_n(X) = a_n X^2 + b_n X + c_n$. Donc $P_n(X) = Q_n(X)B(X) + a_n X^2 + b_n X + c_n$.

Or B a trois racines distinctes, qui sont $-1, 0$ et 1. En évaluant en les racines de B, on a :

$$\begin{cases} \widetilde{P_n}(-1) = (-1)^n + 1 = a_n - b_n + c_n \\ \widetilde{P_n}(0) = 1 + 2^n = c_n \\ \widetilde{P_n}(1) = 1 + 2^n + 3^n = a_n + b_n + c_n \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 2 + 2^n + 3^n + (-1)^n = 2a_n + 2c_n & L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ 1 + 2^n = c_n \\ 2^n + 3^n - (-1)^n = 2b_n & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 2^{n-1} + \frac{3^n}{2} + \frac{(-1)^n}{2} - 2^n = a_n & L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 - L_2 \\ 1 + 2^n = c_n \\ 2^{n-1} + \frac{3^n}{2} - \frac{(-1)^n}{2} - 1 - 2^n = b_n & L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3 - L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a_n = \frac{3^n+(-1)^n-2^n}{2} \\ c_n = 1+2^n \\ b_n = \frac{3^n-(-1)^n-2^n}{2} - 1 \end{cases}$$

Donc le reste de la division euclidienne de P_n par B est $R_n(X) = \frac{3^n+(-1)^n-2^n}{2}X^2 + \frac{3^n-(-1)^n-2^n}{2}X + 2^n + 1$.