Chapitre 16 - TD :
Fractions Rationnelles

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

27 janvier 2026

1 Fractions Rationnelles

Exercice 1 :
Soit $p, q \in \mathbb{Z}$ avec $p \wedge q = 1$. On considère la fraction rationnelle :

$$F(X) = \frac{X^p - 1}{X^q - 1}$$

Déterminer les racines et les pôles de F avec leur multiplicités.

Exercice 2 :
Soit $F \in \mathbb{K}(X)$.

1. Montrer que si $a \in \mathbb{K}$ est racine de F de multiplicité $\alpha \in \mathbb{N}^*$, alors a est racine de F' de multiplicité $\alpha - 1$.
2. Comparer également les pôles de F et de F' et leurs multiplicité.

Exercice 3 (*) :
Montrer qu'il n'existe pas de $F \in \mathbb{C}(X)$ tel que

$$F'(X) = \frac{1}{X}.$$

Exercice 4 (Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$) :
Décomposer les fractions rationnelles suivantes en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$:

1. $F(X) = \frac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2}$
2. $F(X) = \frac{4}{(X^2+1)^2}$
3. $F(X) = \frac{X^2+1}{(X-1)(X-2)(X-3)}$
4. $F(X) = \frac{3X-1}{X^2(X+1)^2}$
5. $F(X) = \frac{1}{X(X-1)^2}$
6. $F(X) = \frac{1}{X^4+X^2+1}$
7. $F(X) = \frac{2X}{X^2+1}$
8. $F(X) = \frac{3}{(X^2-1)^2}$
9. $F(X) = \frac{1}{X^2+X+1}$
10. $F(X) = \frac{X^3+X^2+1}{X^3+X^2+X}$

Exercice 5 (Décompositions en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$) :

Décomposer les fractions rationnelles suivantes dans $\mathbb{R}(X)$:

1. $F(X) = \frac{X^3}{X^2-3X+2}$
2. $F(X) = \frac{X-1}{X^3-3X+2}$
3. $F(X) = \frac{1}{(X-1)^2(X+1)^2}$
4. $F(X) = \frac{X}{X^3-1}$
5. $F(X) = \frac{1}{(X^2+1)(X^2+X+2)}$
6. $F(X) = \frac{1}{(X^2+1)^2-X^2}$
7. $F(X) = \frac{X^4}{(X^4+X^2+1)(X^4-X^2+1)}$
8. $F(X) = \frac{X^4+1}{X^2(X^2+X+1)^2}$

Exercice 6 (*) :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega = e^{2i\pi/n}$.

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(\omega X) = P(X)$. Montrer que $\exists Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(X) = Q(X^n)$.
2. En déduire la réduction au même dénominateur de la fraction rationnelle

$$F(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X+\omega^k}{X-\omega^k}.$$

Exercice 7 (*) :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n \in \mathbb{R}$. Soit

$$f : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

Montrer que f s'annule au plus $2n$ fois sur $[0, 2\pi[$.

Exercice 8 :
Soit $n \in \mathbb{N}$. Décomposer en éléments simples la fraction

$$F_n(X) = \frac{n!}{X(X-1)(X-2)\dots(X-n)}.$$

Exercice 9 :
Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des complexes deux à deux distincts et $P(X) = \prod_{k=1}^{n}(X-\lambda_k)$. Exprimer en fonction de P et de ses dérivées les fractions

$$F(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X-\lambda_k}, \qquad G(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(X-\lambda_k)^2}, \qquad H(X) = \sum_{1 \leq k \neq \ell \leq n} \frac{1}{(X-\lambda_k)(X-\lambda_\ell)}.$$

Exercice 10 :
Soit

$$F(X) = \frac{1}{1+X^2} \in \mathbb{C}(X)$$

1. Effectuer la décomposition en éléments simples de F, puis en déduire une expression de $F^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$F^{(n)}(X) = \frac{P_n(X)}{(X^2+1)^{n+1}}.$$

3. Déterminer les racines de P_n.

Exercice 11 :
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ scindé à racines simples $x_1, \ldots, x_n$, $n \geq 2$.

1. Former la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{P}$.
2. En supposant que $\widetilde{P}(0) \neq 0$, montrer que
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{x_k \widetilde{P'}(x_k)} = -\frac{1}{\widetilde{P}(0)}.$$
3. Effectuer la décomposition en éléments simple de $\frac{P''}{P}$.
4. En déduit que
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\widetilde{P''}(x_k)}{\widetilde{P'}(x_k)} = 0.$$

Exercice 12 :
Étudier l'existence de solutions du système
$$\begin{cases} \frac{x}{1+a} + \frac{y}{1+2a} + \frac{z}{1+3a} = 1 \\ \frac{x}{2+a} + \frac{y}{2+2a} + \frac{z}{2+3a} = 1 \\ \frac{x}{3+a} + \frac{y}{3+2a} + \frac{z}{3+3a} = 1 \end{cases}$$

Exercice 13 :
Soit $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$ 2 à 2 distincts tels que $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $a_i + b_j \neq 0$. Résoudre le système $\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{a_i+b_j} = 1$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Exercice 14 (**) :
Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ dont toutes les racines sont réelles.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\widetilde{P'}(x)^2 - \widetilde{P}(x)\widetilde{P''}(x) \geq 0$.
2. En déduire
$$\forall k \in \{1, \ldots, n-1\},\ a_{k-1}a_{k+1} \leq a_k^2.$$

Exercice 15 (**) :
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ avec $\deg(P) = n \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall k \in \{1, \ldots, n\},\ \int_0^1 x^k \widetilde{P}(x)dx = 0.$$
Montrer que
$$\int_0^1 \widetilde{P}(x)^2 dx = (n+1)^2 \left(\int_0^1 \widetilde{P}(x)dx \right)^2.$$

Exercice 16 (Polynômes symétriques) :
On dit qu'un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n est symétrique s'il s'écrit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $\forall k \in \{0, \ldots, n\}$, $a_k = a_{n-k}$.

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n. Montrer que P est symétrique si, et seulement si, $P(X) = X^n P(1/X)$.
2. Montrer qu'un produit de polynômes symétriques est symétrique.
3. Soit $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ symétriques tels que $P|Q$. Montrer que $\frac{Q}{P}$ est symétrique.
4. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ symétrique.
   (a) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que si α est racine de P, alors $\alpha \neq 0$ et $\frac{1}{\alpha}$ est racine de P.
   (b) Montrer que si 1 est racine de P, alors 1 est racine au moins double de P.
   (c) Montrer que si P est de degré impair, alors -1 est racine de P.
   (d) Montrer que si P est de degré pair et si -1 est racine de P, alors -1 est racine au moins double de P.
5. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ symétrique de degré pair $2n$. Montrer qu'il existe $a_{2n}, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$ tels que

$$P(X) = a_{2n} \prod_{k=1}^{n} (X^2 + b_k X + 1).$$

6. Que dire de P si $P \in \mathbb{C}[X]$ symétrique de degré impair ?

2 Shampooing (Tout-en-un)

Exercice 17 (Polynôme de Tchebychev [✓][✓]) :

Partie 1 : Généralités

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists! P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\widetilde{P_n}(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
   On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme T_n par :

$$\begin{cases} T_0(X) = 1 \\ T_1(X) = X \\ \forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X) \end{cases}$$

2. Calculer T_2, T_3.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\widetilde{T_n}(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
   Indic : *Par récurrence. Ou pas.*
4. Déterminer le degré des polynômes T_n.
   Indic : *Récurrence encore.*
5. Étudier la parité des polynômes T_n.
6. Montrer que les polynômes T_n sont à coefficients entiers et calculer leurs coefficients dominants.
   Indic : *Récurrence ...*
7. En utilisant la questions 3., trouver les racines de T_n et en déduire un factorisation de T_n pour $n \geq 1$.
8. En déduire les valeurs de $\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ et $\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ pour tout $n \geq 1$.
9. Montrer que T_n est solution de l'équation différentielle

$$(x^2 - 1)y'' + xy' - n^2 y = 0$$

10. Effectuer la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{T_n}$ pour $n \geq 1$.

Partie 2 : Décompositions en éléments simples

Dans toute la suite du problème, on prend $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose $\forall k \in \{0, \dots, 2n-1\}$, $\theta_k = \frac{2k+1}{4n}\pi$.

11. Soit $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$. Déterminer la décomposition en éléments simples de $\frac{P}{T_{2n}}$ en fonctions des $\widetilde{P}(\cos(\theta_k))$.
12. Montrer que

$$\forall m \in \{0, \dots, n\},\ \forall \theta \in [0, 2\pi[\setminus\{\theta_0, \dots, \theta_{2n-1}\},\ \frac{\widetilde{T'_{2m}}(\cos(\theta))}{\widetilde{T_{2n}}(\cos(\theta))} = \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \frac{m}{n} \frac{\sin(2m\theta_k)\cos(\theta)}{\cos(\theta)^2 - \cos(\theta_k)^2}.$$

13. En déduire que

$$\forall m \in \{0, \dots, n\},\ \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \frac{\sin(2m\theta_k)}{\sin(\theta_k)^2} = 4mn.$$

14. *Une identité de Riesz* : On souhaite montrer l'identitée de Riesz :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ ie^{i\theta}\widetilde{P'}(e^{i\theta}) = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \frac{\widetilde{P}(e^{i(\theta+2\theta_k)})}{2\sin(\theta_k)^2}.$$

   (a) Montrer qu'il suffit d'établir l'identitée de Riesz pour les polynômes $P_m(X) = X^m$ pour tout $m \leq n$.
   (b) Soit $m \leq n$. Montrer que l'identitée de Riesz pour $P_m(X) = X^m$ est équivalente à

$$\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \frac{e^{2im\theta_k}}{\sin(\theta_k)^2} = 4imn.$$

   (c) Calculer, pour tout $k \in \{0, \dots, 2n-1\}$, $\theta_k + \theta_{2n-1-k}$.
   (d) Conclure.

Les polynômes de Tchebychev sont des polynômes hyper classiques. Ils font partis du folklore mathématique. On peut faire encore beaucoup de choses avec ces polynômes, comme trouver une autre équation différentielles vérifiée par ces polynômes, trouver des expressions de ces polynômes etc (voir graphe)