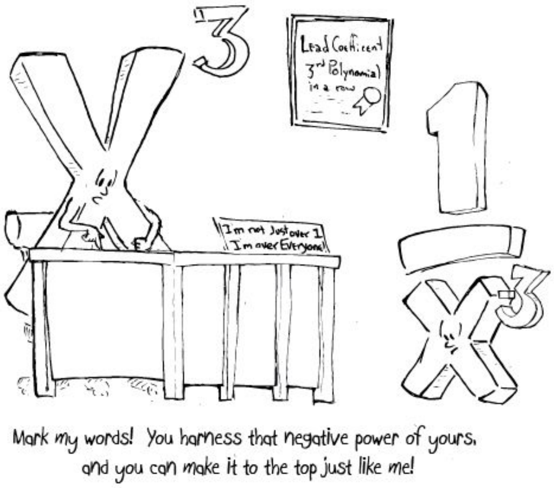
Chapitre 16

Fractions Rationnelles

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

27 janvier 2026



Le but des fractions rationnelles est de "compléter" un peu les polynômes. L'une des difficulté des polynômes étant que $\mathbb{K}[X]$ est seulement un anneau et pas un corps. On a vu qu'il y a une similarité très forte dans le fonctionnement entre l'anneau $\mathbb{Z}$ et l'anneau $\mathbb{K}[X]$. Mais précisément, dans les entiers, on sait qu'on peut passer aux rationnels $\mathbb{Q}$ pour obtenir une structure de corps. Ce qui est très pratique. On va ici adapter le processus de fabrication des rationnels à partir des entiers, pour fabriquer les fractions rationnelles (d'où la similarité des les dénominations). $\mathbb{Q}$ est donc à $\mathbb{Z}$ ce que $\mathbb{K}(X)$ sera à $\mathbb{K}[X]$.

Table des matières

Dans l'ensemble de ce cours, on se placera sur un corps $\mathbb{K}$ qui sera soit $\mathbb{R}$ soit $\mathbb{C}$. Les résultats seront donc valables indifféremment sur les deux corps, sauf s'il est précisé, bien sûr.

1 Définitions et propriétés

Construction du corps des fractions rationnelles $\mathbb{K}(X)$ (HP) :
On définit sur $\mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*$ la relation $\sim$ définit par

$$(A, B) \sim (C, D) \iff AD = BC.$$

La relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{K}[X]\times\mathbb{K}[X]^*$. On note alors $\frac{A}{B}$ la classe d'équivalence de $(A, B) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*$.

D'où :

Définition 1.1 (Corps des fractions rationnelles, Représentant d'une fraction rationnelle) :
On note $\mathbb{K}(X)$ *le corps des fractions rationnelles sur* $\mathbb{K}$ (définie comme au dessus, c'est-à-dire) :

$$\mathbb{K}(X) = \left\{\frac{A}{B},\ A, B \in \mathbb{K}[X],\ B \neq 0\right\}.$$

Si $F \in \mathbb{K}(X)$ et si $(A, B) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*$ tel que $F = \frac{A}{B}$, alors on dit que $\frac{A}{B}$ est ***un*** *représentant de F*.

Remarque :
La construction du corps des fraction rationnelles n'est officiellement pas au programme. Elle n'est donc pas à connaître car elle flirt un peu avec la notion d'ensemble quotient par une relation d'équivalence qui, lui, est clairement hors programme. Mais il me semble bon pédagogiquement (et intellectuellement) de montrer d'où viennent les choses, qu'elles ne sont pas parachuter. Il semble raisonnable d'un point de vue culture mathématique d'avoir une idée de la construction. Ca éclaire beaucoup alors sur les propriétés qui vont avec.

On vient d'affubler l'ensemble $\mathbb{K}(X)$ du nom de corps. Ce n'est pas anodin et ce n'est pas pour rien. Autant $\mathbb{K}[X]$ est un anneau pour les opérations usuelles entre polynômes, autant $\mathbb{K}(X)$ va devenir un corps pour ces mêmes opérations (qu'il faudra tout de même redéfinir). On a donc vendu un peu la mèche en avance, on vient d'affirmer que c'est un corps a priori de la démonstration.

Définition-Propriété 1.2 (Opérations sur $\mathbb{K}(X)$) :
On munit $\mathbb{K}(X)$ de deux LCI notée $+$ et $\times$ et d'une LCE définies par : si $F, G \in \mathbb{K}(X)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\exists A, B, C, D \in \mathbb{K}[X]$ avec $B, D \neq 0$ tels que $F = \frac{A}{B}$ et $G = \frac{C}{D}$. On pose alors

$$F + G = \frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD + BC}{BD}, \qquad F \times G = \frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}, \qquad \lambda F = \frac{\lambda A}{B}.$$

Remarque :
Il faut montrer que ces opérations sont bien des LCI et LCE, qu'elles sont bien définies. Attention à ne pas confondre les opérations. Elles sont notées de la même manières, mais il y a ici l'addition définie sur $\mathbb{K}(X)$ qui utilise le produit et la somme qui ont été définies sur $\mathbb{K}[X]$ et qui se notent de la même manière. Bien identifié ce qui relève de la nouveauté de ce qui relève des choses déjà connues, même s'il n'y a pas de signes distinctifs entre les deux.

Il n'y a d'ailleurs pas de notations différentes à dessein.

Démonstration :
Si $F = \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}$ et $G = \frac{C_1}{D_1} = \frac{C_2}{D_2}$, alors $\frac{A_1}{B_1} + \frac{C_1}{D_1} = \frac{A_1D_1 + B_1C_1}{B_1D_1}$ et $\frac{A_2}{B_2} + \frac{C_2}{D_2} = \frac{A_2D_2 + B_2C_2}{B_2D_2}$. Or

$$\begin{aligned}(A_1D_1 + B_1C_1)B_2D_2 &= (A_1B_2)D_1D_2 + (C_1D_2)B_1B_2 \\ &= (B_1A_2)D_1D_2 + (C_2D_1)B_1B_2 \\ &= (A_2D_2 + C_2B_2)B_1D_1\end{aligned}$$

et donc $(A_1D_1 + B_1C_2, B_1D_1) \sim (A_2D_2 + B_2C_2, B_2D_2)$, *i.e.* $\frac{A_1D_1+B_1C_1}{B_1D_1} = \frac{A_2D_2+B_2C_2}{B_2D_2}$ et donc $+$ est bien définie sur $\mathbb{K}(X)$.

On fait la même chose avec les deux autres opérations. $\square$

Remarque :
On vient donc de montrer que les opérations sur $\mathbb{K}(X)$ qui sont définies à partir des opérations dans $\mathbb{K}[X]$ et d'un représentant des fractions rationnelles, ne dépendent pas des représentants choisis pour effectuer les calculs. Les choses sont donc cohérentes.

Autrement dit, on vient de montrer que les opérations de $\mathbb{K}[X]$ "passent bien" à la relation d'équivalence.

Définition-Propriété 1.3 (Forme irréductible) :
Toute fraction rationnelle sur $\mathbb{K}$ s'écrit de façon unique avec deux polynômes premiers entre eux et de dénominateur unitaire, *i.e.*

$$\forall F \in \mathbb{K}(X),\ \exists!(A,B) \in \mathbb{K}[X]\times\mathbb{K}[X]^*,\ \text{t.q. } F = \frac{A}{B} \text{ et } A \wedge B = 1 \text{ et } \operatorname{coeff\,dom}(B) = 1.$$

Cette écriture à partir de deux polynômes premiers entre eux s'appelle *la forme irréductible*.

Démonstration :
La démonstration est la même que pour $\mathbb{Q}$. Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ et $(A,B) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*$ tel que $F = \frac{A}{B}$. Soit $D = A \wedge B$. Alors $\exists A', B' \in \mathbb{K}[X]$ premiers entre eux tels que $A = DA'$ et $B = DB'$. Alors

$$F = \frac{A}{B} = \frac{DA'}{DB'} = \frac{A'}{B'}$$

car $AB' = DA'B' = A'B$.

D'où l'existence d'une telle écriture.

Tout d'abord, il est évident que si $F = 0$, alors l'écriture est unique puisque $F = 0 \iff A = 0$ et $0 \wedge B = 1 \iff B = 1$. On va donc considérer $F \neq 0$.

Supposons $\exists (A,B),(C,D) \in \mathbb{K}[X]^* \times \mathbb{K}[X]^*$ tels que $F = \frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ et $A \wedge B = C \wedge D$ et B et D unitaire. Alors on a $AD = BC$. Donc $A|BC$. Or A et B sont premiers entre eux, donc $A|C$. De même, $C|AD$ or $D \wedge C = 1$, donc $C|A$. Et donc $\exists \lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $C = \lambda A$. D'où $AD = \lambda AB$ et donc $D = \lambda B$ car $A \neq 0$. Mais B et D sont unitaire, donc par unicité du coefficient dominant, $\lambda = 1$. Puis $(A,B) = (C,D)$. Et donc l'unicité. □

Remarque (Plongement de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}(X)$) :
Techniquement, les polynômes ne sont pas des classes d'équivalences, donc $\mathbb{K}[X] \not\subset \mathbb{K}(X)$ car les objets ne sont pas de la même nature. Ce pendant, on peut faire un application injective $\mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}(X)$ qui permet alors de "voir" $\mathbb{K}[X]$ comme un sous-ensemble de $\mathbb{K}(X)$ en identifiant $\mathbb{K}[X]$ et son image dans $\mathbb{K}(X)$ par ce plongement. Pour cela :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}(X) \\ P & \mapsto & \frac{P}{1} \end{array}$$

Il est facile de montrer que cette application est injective, elle est linéaire, et elle est compatible avec toutes les lois à gauche et à droite. On peut donc alors faire un amalgame entre un polynôme P et sa classe d'équivalence $\frac{P}{1}$.

C'est ce qu'on fait en écrivant $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Remarque :
On rappelle que dans la divisibilité, les inversibles sont "invisibles" et donc ne peuvent pas être maîtrisés. Donc, toutes les relations de divisibilité ne donnent que des informations à inversibles près, c'est-à-dire à produit par un scalaire près. Il est important d'avoir une information supplémentaire pour pouvoir alors fixé les coefficients et avoir l'unicité. D'où la condition supplémentaire sur le dénominateur unitaire qui apparaît par rapport au cas de $\mathbb{Q}$.

Proposition 1.1 (Structure algébrique de $\mathbb{K}(X)$) :
En munissant $\mathbb{K}(X)$ des opérations précédentes, on a :

(i) $(\mathbb{K}(X), +, \times)$ est un corps commutatif appelé corps des fractions rationnelles sur $\mathbb{K}$

(ii) $(\mathbb{K}(X), +, \cdot)$ est $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension infinie.

(iii) $(\mathbb{K}(X), +, \times, \cdot)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre commutative.

Démonstration :
Il suffit de le vérifier. □

Remarque :
Comme on a une structure d'anneau, on peut définir une application $\mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}(X)$ par $(a_0, \ldots, a_n) \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k F^k$. Autrement dit, on peut définir $\mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}(X)$ par $P \mapsto P \circ F$ une composition.

Mais dans la mesure où $\mathbb{K}(X)$ est un corps, il y a une application d'inversion (*i.e.* l'application $P \mapsto \frac{1}{P}$ sur $\mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$) et donc on peut définir aussi $\mathbb{K}[X] \setminus \{0\} \to \mathbb{K}(X)$ par $P \mapsto \frac{1}{P \circ F}$. Et donc, en multipliant les deux, on peut définir une composition dans $\mathbb{K}(X)$.

Définition 1.4 (Composition de fractions rationnelles) :
Soit $F, G \in \mathbb{K}(X)$.

Si $F = \frac{A}{B}$ avec $A \in \mathbb{K}[X]$ et $B \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$, on définit $F \circ G$ par

$$F \circ G = \frac{A \circ G}{B \circ G}.$$

Définition-Propriété 1.5 (Degré d'une fraction rationnelle) :
Soit $F \in \mathbb{K}(X)$.

Si $(A, B) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*$ tel que $F = \frac{A}{B}$, on définit le degré de F par

$$\deg(F) = \deg(A) - \deg(B) \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}.$$

qui est indépendant du choix du représentant.

Démonstration :
La définition du degré dépendant, pour le moment, du représentant que l'on utilise pour F. Il faut montrer que cette définition est bien cohérente et que donc la notion de degré d'une fraction rationnelle a bien un sens sur la classe d'équivalence, autrement dit qu'elle ne dépend pas du représentant choisi.

Soit donc $(A, B), (C, D) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*$ tel que $F = \frac{A}{B} = \frac{C}{D}$. Donc $AD = BC$. Alors $\deg(A) + \deg(D) = \deg(B) + \deg(C) \iff \deg(A) - \deg(B) = \deg(C) - \deg(D)$. Donc le degré de F est bien défini et constant sur la classe d'équivalence. Autrement dit, $\deg(F)$ est bien défini et est unique pour une fraction rationnelle donnée (ce qui justifie a posteriori le choix de la notation qui ne dépend que de F et pas du représentant choisi pour le calculer). $\square$

Proposition 1.2 (Propriété du degré pour les fractions rationnelles) :
Soit $F, G \in \mathbb{K}(X)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

(i) $\deg(F + G) \leq \max(\deg(F), \deg(G))$

(ii) $\deg(FG) = \deg(F) + \deg(G)$

(iii) Si $\lambda \neq 0$, $\deg(\lambda F) = \deg(F)$

Démonstration :
Le plus dur est le premier point. On va prouver seulement celui là. Les deux autres sont beaucoup plus faciles. Laissés en exercices.

Soit $A, B, C, D \in \mathbb{K}[X]$ avec $BD \neq 0$ tels que $F = \frac{A}{B}$ et $G = \frac{C}{D}$. Alors $F + G = \frac{AD+BC}{BD}$. Donc

$$\begin{aligned}
\deg(F + G) &= \deg(AD + BC) - \deg(BD) \\
&\leq \max(\deg(AD), \deg(BC)) - \deg(B) - \deg(D) \\
&= \max(\deg(A) + \deg(D), \deg(B) + \deg(C)) - \deg(B) - \deg(D) \\
&= \max(\deg(A) - \deg(B), \deg(C) - \deg(D) && \text{à vérifier} \\
&= \max(\deg(F), \deg(G)).
\end{aligned}$$

$\square$

Remarque :
Il n'y a pas de formule générale pour le degré d'une composée.

!!! ATTENTION !!!

⚠ $F \in \mathbb{K}[X]$ n'est PAS équivalent à $\deg(F) \geq 0$. Ça ne suffit pas ! Ne pas oublier le dénominateur ! Par exemple, $\frac{X^4-1}{X^2+1} \notin \mathbb{K}[X]$ et pourtant le degré est 2.

Exemple 1.1 :
Montrer que $\mathbb{K}^-(X) = \{F \in \mathbb{K}(X),\ \deg(F) < 0\}$ est un espace vectoriel et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall a \in \mathbb{K}$, $\left(\frac{1}{(X-a)^k}\right)_{0 \leq k \leq n}$ est une famille libre de $\mathbb{K}^-(X)$.

Définition-Propriété 1.6 (Dérivée d'une fraction rationnelle) :
Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. Soit $(A, B) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*$ tel que $F = \frac{A}{B}$.
On appelle fraction rationnelle dérivée de F la fraction rationnelle notée F' définie par

$$F' = \frac{A'B - AB'}{B^2}.$$

et F' est indépendant du choix du représentant de F.

Démonstration :
Il suffit de faire le vérifier. Si $AD = BC$, alors $A'D + AD' = B'C + BC'$ et donc

$$\begin{aligned}
(A'B - AB')D^2 &= D(A'BD - (AD)B') \\
&= D(A'BD - BCB') \\
&= BD(A'D - B'C) \\
&= BD(BC' - AD') \\
&= B(BC'D - (AD)D') \\
&= B(BC'D - BCD') \\
&= B^2(C'D - CD')
\end{aligned}$$

$\square$

Proposition 1.3 (Degré de la dérivée d'une fraction rationnelle) :
Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. Alors
$$\deg(F') \leq \deg(F) - 1$$
Avec égalité si et seulement si $\deg(F) \neq 0$.

Démonstration :
C'est le cas d'égalité qui est intéressant. Si $\deg(F) = 0$, alors $\deg(A) = \deg(B) = d$. Donc $\deg(A'B - AB') \leq d(d-1)$ et donc $\deg(F') \leq d(d-1) - d^2 = -d$. Donc si $d \geq 2$, alors $\deg(F') \leq< -1 = \deg(F) - 1$. En étudiant le cas $d = 0$ et $d = 1$, à part, on voit que $\deg(F') < -1 = \deg(F) - 1$.

Supposons $\deg(F) \neq 0$. Donc $\deg(A) \neq \deg(B)$. Si $\deg(A) \geq 1$ et $\deg(B) \geq 1$, alors $\operatorname{coeff\,dom}(A'B) = \deg(A) \operatorname{coeff\,dom}(A) \operatorname{coeff\,dom}(B) \neq \deg(B) \operatorname{coeff\,dom}(A) \operatorname{coeff\,dom}(B) = \deg(AB')$. Or $\deg(A'B) = \deg(A) + \deg(B) - 1 = \deg(AB')$, donc $\deg(AB' - AB') = \max(\deg(A'B), \deg(AB')) = \deg(A) + \deg(B) - 1$. D'où $\deg(F') = \deg(A) - \deg(B) - 1 = \deg(F) - 1$.

Si $F = 0$, c'est vrai. Supposons $F \neq 0$. Supposons $\deg(A) = 0$. Alors $F = \lambda / B$ avec $\lambda \neq 0$ et $F' = -\lambda B'/B^2$. Et $\deg(A) \neq \deg(B)$, donc $\deg(B) \geq 1$. Donc $\deg(B') = \deg(B) - 1$. Et donc $\deg(F') = \deg(B) - 1 - 2\deg(B) = -\deg(B) - 1 = \deg(F) - 1$.

Supposons $\deg(B) = 0$ (car $B \neq 0$). Alors $\deg(A) \geq 1$ car $F \neq 0$. Et donc $F = \lambda A$, donc $\deg(F') = \deg(F) - 1$. $\square$

Remarque :
La contraposée du cas d'égalité est intéressant aussi :
$$\deg(F') < \deg(F) - 1 \iff \deg(F) = 0.$$

!!! ATTENTION !!!

⚠ On peut avoir $\deg(F') < \deg(F) - 1$ sans pour autant que $F' = 0$! A contrario des polynômes.

Contre-exemple :
Avec $F(X) = \frac{X}{X+1}$, on a $\deg(F) = 0$ et $F'(X) = -\frac{1}{(X+1)^2}$, donc $\deg(F') = -2 < \deg(F)-1$.

Définition 1.7 (Racines et pôles d'une fraction rationnelle) :
Soit $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ sou forme irréductible.
On appelle *racine d'ordre m de F* toute racine de A de multiplicité m.
On appelle *pôle d'ordre m de F* toute racine de B de multiplicité m.

!!! ATTENTION !!!

Si F n'est pas mise sous forme irréductible, il y a des facteurs en trop. On a alors pas les bonnes multiplicités. Il y a des simplifications qui peuvent s'opérer et donc faire apparaître des pôles "fictifs". On parle alors de *pôles apparents*.

S'il y a des racines communes au numérateur et dénominateur, pour savoir si c'est un pôle ou une racine, il faut faire la différence des multiplicité en tant que racine du numérateur moins la multiplicité en tant que racine du dénominateur. Si la différence est strictement positive, on a une racine et la différence est l'ordre ; si la différence est nulle, c'est que c'était un pôle fictif, ce n'est pas une racine ni un pôle ; si la différence est strictement négative, c'est que c'est un pôle dont l'ordre est l'opposé de la différence.

Contre-exemple :
On considère la fraction rationnelle $F(X) = \frac{X^4-1}{X^4+2X^3-7X^2-8X+12}$. Déterminer ses racines et ses pôles.

Définition 1.8 (Fonction rationnelle associée) :
Soit $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ sous forme irréductible.

On définit la fonction rationnelle associée à F par

$$\widetilde{F} : \begin{array}{ccc} D_F & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \frac{\widetilde{A}(x)}{\widetilde{B}(x)} \end{array}$$

où $D_F = \mathbb{K} \setminus \{$pôles de $F\}$.

Autrement dit, $\widetilde{F} = \frac{\widetilde{A}}{\widetilde{B}}$.

Proposition 1.4 (Caractérisation d'égalité de fractions rationnelles par les fonctions rationnelles associées) :
Soit $F, G \in \mathbb{K}(X)$. Alors

$$\text{Il existe une infinité de } x \in \mathbb{K},\ \widetilde{F}(x) = \widetilde{G}(x) \iff F = G$$

Démonstration :
Le sens indirecte est évident et n'a pas beaucoup d'intérêt. Supposons qu'il existe un infinité de $x \in \mathbb{K}$ tels que $\widetilde{F}(x) = \widetilde{G}(x)$. On note $F = \frac{A}{B}$ et $G = \frac{C}{D}$. Alors il existe une infinité de $x \in \mathbb{K}$ tels que $\widetilde{A}(x)\widetilde{D}(x) = \widetilde{C}(x)\widetilde{B}(x)$. Autrement dit, le polynôme $AD - BC$ a une infinité de racines. Donc $AD = BC$ et donc $F = \frac{A}{B} = \frac{C}{D} = G$. □

2 Décomposition en éléments simples

2.1 Partie Entière

Définition-Propriété 2.1 (Partie entière d'une fraction rationnelle) :
$\forall F \in \mathbb{K}(X)$, $\exists (E, R) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}(X)$ tel que

$$F = E + R, \qquad \text{et} \qquad \deg(R) < 0.$$

E s'appelle la partie entière de F.

Démonstration :
Soit $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$. En effectuant la division euclidienne de A par B, $\exists (Q, R) \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ + R$ et $\deg(R) < \deg(B)$. Alors $F = Q + \frac{R}{B}$. Et $Q \in \mathbb{K}[X]$, $\frac{R}{B} \in \mathbb{K}(X)$ et $\deg(R/B) = \deg(R) - \deg(B) < 0$.

Pour l'unicité, si $F = Q_1+R_1 = Q_2+R_2$, alors $Q_1-Q_2 = R_2-R_1$. Donc $R_2-R_1 \in \mathbb{K}[X]$, donc $\deg(R_2-R_1) \in \mathbb{N}\cup-\infty$ et $\deg(R_2-R_1) \leq \max(\deg(R_2), \deg(R_1)) < 0$. Donc $\deg(R_2-R_1) = -\infty$ et donc $R_2 = R_1$. On en déduit immédiatement $Q_1 = Q_2$. □

Remarque :
La partie entière d'une fraction rationnelle est l'analogue de la partie entière définie dans $\mathbb{Q}$.

La partie entière est toujours le quotient de la division euclidienne du numérateur par le dénominateur.

Exemple 2.1 :
Déterminer la partie entière de $F(X) = \frac{X^2+X}{X+2}$.

Proposition 2.1 (Propriété de la partie entière) :
Soit $F \in \mathbb{K}(X)$.

1. Si $\deg(F) < 0$, alors sa partie entière est nulle.
2. Si $F \in \mathbb{K}[X]$, alors F est égale à sa partie entière.

Démonstration :
C'est évident à partir de la définition de la partie entière. □

Proposition 2.2 (Supplémentarité dans $\mathbb{K}(X)$) :
Si on note $\mathbb{K}^-(X) = \{F \in \mathbb{K}(X),\ \deg(F) < 0\}$, alors $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}^-(X)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{K}(X)$, *i.e.*

$$\mathbb{K}(X) = \mathbb{K}[X] \oplus \mathbb{K}^-(X).$$

Démonstration :
C'est évident à partir de la définition de la partie entière et la caractérisation des supplémentaires. □

2.2 Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$

Théorème 2.3 (Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$) :
Soit $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{C}(X)$ sous forme irréductibles. Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ les pôles de F d'ordre $m_1, \dots, m_n$ respectivement. Soit Q la partie entière de F.

Alors $\exists!(\lambda_{k,\ell})_{\substack{1\leq k\leq n\\ 1\leq \ell\leq m_k}} \in \mathbb{C}^{m_1+\dots+m_n}$ tel que

$$F(X) = Q(X) + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\sum_{\ell=1}^{m_k} \frac{\lambda_{k,\ell}}{(X-\alpha_k)^\ell}}_{\substack{\text{partie polaire}\\ \text{associée à } \alpha_k}}$$

Autrement dit :

$$F(X) = Q(X) + \underbrace{\frac{\lambda_{1,1}}{X-\alpha_1} + \frac{\lambda_{1,2}}{(X-\alpha_1)^2} + \dots + \frac{\lambda_{1,m_1}}{(X-\alpha_1)^{m_1}}}_{\text{partie polaire associée à } \alpha_1} + \dots + \underbrace{\frac{\lambda_{n,1}}{X-\alpha_n} + \dots + \frac{\lambda_{n,m_n}}{(X-\alpha_n)^{m_n}}}_{\text{partie polaire associée à } \alpha_n}$$

Démonstration :
Ce théorème est admis. □

Proposition 2.4 (Cas des pôles simples) :
Soit $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{C}(X)$ sous forme irréductible et $\alpha \in \mathbb{C}$ un pôle simple de F. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\frac{\lambda}{X-\alpha}$ soit la partie polaire associée à α. Soit $B_1 \in \mathbb{C}[X]$ tel que $B(X) = (X-\alpha)B_1(X)$ et $\widetilde{B_1}(\alpha) \neq 0$. Alors

$$\lambda = (\widetilde{X-\alpha})F(\alpha) = \frac{\widetilde{A}(\alpha)}{\widetilde{B_1}(\alpha)} = \frac{\widetilde{A}(\alpha)}{\widetilde{B'}(\alpha)}.$$

Démonstration :
Par caractérisation des racines par la divisibilité, $\exists B_1 \in \mathbb{K}[X]$ tel que $B(X) = (X-\alpha)B_1(X)$ et $\widetilde{B_1}(\alpha)$. De plus, par dérivation et caractérisation de la multiplicité par la dérivation, on a $\widetilde{B}(\alpha) = \widetilde{B_1}(\alpha) \neq 0$.

Et $(X-\alpha)F(X) = \frac{A(X)}{B_1(X)}$. D'autre part, par décomposition en éléments simples, $F(X) = \frac{\lambda}{X-\alpha} + G(X)$ où $G \in \mathbb{K}(X)$ et α n'est pas un pôle de G. Alors

$$(X-\alpha)F(X) = \lambda + (X-\alpha)G(X)$$

Donc α est une racine simple de la fraction rationnelle $(X-\alpha)G(X)$ et donc $\lambda = \frac{\widetilde{A}(\alpha)}{\widetilde{B_1}(\alpha)}$. □

Exemple 2.2 :
Déterminer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ de :

1. $F(X) = \frac{1}{(X-1)(X+2)}$
2. [✓][✓] $F_n(X) = \frac{1}{X^n-1}$.

Remarque :
Le but d'une décomposition en éléments simples est de calculer des coefficients. Comme un peu tout problème de calculs, c'est de la débrouille. Il n'y a que peu de méthode universelle qui fonctionnerais dans tous les cas. Ou alors, elle est très lourde et peu (ou pas) adapté au cas concret. A contrario de la résolution d'équations différentielles linéaires pour qui on a une méthode assez claire.

Il y a plutôt une liste d'astuces possibles qu'il faut exploiter dans des ordres différents ou pas, selon le cas.

"Méthode" de décomposition en éléments simples :

— On factorise le numérateur et dénominateur et en écrit la fraction sous forme irréductible.

— On détermine la partie entière en faisant une division euclidienne.

— On détermine les parties polaire associées aux pôles simples.

— Pour les parties polaires associées à des des pôles d'ordre $m \geq 2$, on commence par déterminer le coefficient associé à l'ordre du pôle. Pour les autres coefficients, on exploite, s'il y en a, des propriétés analytiques de la fraction rationnelle. Par exemple :

  — On peut exploiter la parité quand il y en a une, avec l'unicité de la décomposition en éléments simples.
  Déterminer la décomposition en éléments simples de $F(X) = \frac{X}{X^4+1}$.

  — On peut exploiter des limites éventuelles.
  Déterminer la décomposition en éléments simples de $F(X) = \frac{1}{X^3-X^2-X+1}$.

  — Et d'autres propriétés s'il y a lieu. La liste n'est pas exhaustive.

Exemple 2.3 :
Déterminer la décomposition en éléments simples de $F(X) = \frac{X^6-X^5-11X^4-14X^3+23X^2+24X-4}{X^5+3X^4-X^3-7X^2+4}$.

2.3 Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$

Théorème 2.5 (Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$) :
Soit $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{R}(X)$ sous forme irréductible. Alors, par le théorème fondamentale de l'arithmétique dans $\mathbb{R}[X]$, B se factorise sous la forme $B(X) = \prod_{k=1}^{r}(X - x_k)^{\alpha_k} \prod_{i=1}^{s}(X^2 + p_iX + q_i)^{\beta_i}$ avec $p_i^2 - 4q_i < 0$. Soit Q la partie entière de F.

Alors il existe trois uniques familles de réels $(\gamma_{k,\ell})_{\substack{1\leq k\leq r\\1\leq j\leq \alpha_k}}$, $(\lambda_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq s\\1\leq j\leq \beta_i}}$ et $(\mu_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq s\\1\leq j\leq \beta_i}}$ tels que

$$F(X) = Q + \sum_{k=1}^{r}\sum_{\ell=1}^{\alpha_k} \underbrace{\frac{\gamma_{k,\ell}}{(X - x_k)^{\ell}}}_{\substack{\text{éléments simples}\\\text{de 1ere espèce}}} + \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{\beta_i} \underbrace{\frac{\lambda_{i,j}X + \mu_{i,j}}{(X^2 + p_iX + Q_i)^{j}}}_{\substack{\text{éléments simples}\\\text{de 2nd espèce}}}$$

Pour le cas de la décomposition dans $\mathbb{R}(X)$, la partie délicate est la gestion des éléments simples de deuxième espèce. Pour ça, on peut

- repasser dans $\mathbb{C}(X)$, décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ et regrouper les termes de pôles complexes non réels conjugués et de même puissances ;
- ou alors on peut utiliser la caractérisation $F = \overline{F}$ pour les fractions rationnelles réelles et utiliser l'unicité de la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ (un peu comme pour la parité) ;
- ou bien multiplier par $(X^2 + p_iX + q_i)^{\beta_i}$ est évalué en les deux racines complexes conjuguées pour avoir un système en λ_{i,β_i} et μ_{i,β_i} ;
- ou toutes autres idées qui pourraient être utiles compte tenu de la forme de la fraction rationnelle (limites, dérivée, évaluations en des points stratégiques ...)

Exemple 2.4 :
Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la faction $F(X) = \frac{X^3-1}{X^3+1}$, $G(X) = \frac{X^3}{(X-1)^3(X+2)}$ et $H(X) = \frac{2X^2}{(X^2+1)^3}$.

2.4 Le cas de P'/P

Proposition 2.6 (Décomposition en éléments simples de P'/P) :
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ scindé. Alors $\exists \lambda, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ et $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}^*$ tels que les $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ sont deux à deux distincts et $P(X) = \lambda\prod_{k=1}^{n}(X - x_k)^{m_k}$. Alors

$$\frac{P'(X)}{P(X)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k}{X - x_k}.$$

Remarque :
On peut en donner une autre variante :
Si $y_1, \ldots, y_N$ sont les racines de P comptés avec multiplicités, alors

$$\frac{P'(X)}{P(X)} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{X - y_k}.$$

Démonstration :
Par dérivation, on a $P'(X) = \lambda \sum_{k=1}^{n} m_k (X - x_k)^{m_k - 1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} (X - x_j)^{m_j}$. Donc

$$\begin{aligned} \frac{P'(X)}{P(X)} &= \frac{\lambda \sum_{k=1}^{n} m_k (X - x_k)^{m_k - 1} \prod_{j \neq k} (X - x_j)^{m_j}}{\prod_{k=1}^{n} (X - x_k)^{m_k}} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k (X - x_k)^{m_k - 1}}{(X - x_k)^{m_k}} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k}{X - x_k}. \end{aligned}$$

□

Remarque :
Il vient immédiatement que P'/P n'a que des pôles simples.

Exemple 2.5 :
Montrer

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \frac{1}{2 - \omega} = \frac{n 2^{n-1}}{2^n - 1}.$$