DS 6
Analyse - Arithmétique
Correction

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Mercredi 28 Janvier 2026

Problème 1 :
On introduit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\ln(1+x^2)}{x} \end{array}$$

Partie I : Début des prolongations

1. $\ln$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 + x^2 \geq 1 > 0$. Donc, par composition, $x \mapsto \ln(1+x^2) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Finalement, par quotient de fonctions dont le dénominateur ne s'annule par, $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$.

2. L'application $t \mapsto \ln(1+t)$ est continue sur dérivable sur $]-1, +\infty[$. Elle est en particulier dérivable en 0 et sa dérivée en 0 est 1. Donc $\frac{\ln(1+t)}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$. Or $x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, donc, par composition $\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ et donc, par produit de fonctions convergentes, $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x} = x\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \times 1 = 0$.

f est continue sur $\mathbb{R}^*$ et $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, donc f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$..

On considère maintenant

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{\ln(1+x^2)}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \end{array}$$

Alors $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

3. Par composition, $x \mapsto \ln(1+x^2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc, par quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, $f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$. Et

$$\forall x \neq 0,\ f'(x) = \frac{\frac{2x^2}{1+x^2} - \ln(1+x^2)}{x^2} = \frac{2}{1+x^2} - \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}.$$

4. Par quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas, $x \mapsto \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$. Et de même, $x \mapsto \frac{2}{1+x^2} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$. Donc, par structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$, on a donc $f' \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$.

5. Par dérivabilité de $t \mapsto \ln(1+t)$ en 0, on a $\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ et $\frac{2}{1+x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 2$. Donc, par linéarité de la limite, $f'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1$.

On a donc $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap \mathcal{D}^0(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$ et $f'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \in \mathbb{R}$, donc, par théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$ (aka théorème satanique), f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$ (ATTENTION ! on rappelle que l'on ne peut pas prolonger les dérivées ! Même si l'énoncé est fait pour le suggéré).

Donc $f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Et par ailleurs, $f' \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$ et $f'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1 = f'(1)$, donc, par caractérisation de la continuité par les limites, f' est continue en 0. Donc $f' \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Et donc, par définition $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

6. On suppose qu'on a montré que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Alors, par Taylor-Young, f admet un développement limité à tout ordre en 0 et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n).$$

D'autre part, en calculant les développements limités, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(1+x^2) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}x^{2k}}{k} + o(x^{2n}).$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}x^{2k-1}}{k} + o(x^{2n-1}).$$

On en déduit donc, par unicité du développements limités,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \begin{cases} f^{(2k)}(0) = 0 \\ f^{(2k-1)}(0) = \frac{(-1)^{k-1}(2k-1)!}{k} \end{cases}$$

et $f(0) = 0$.

Partie II : Avec des suites

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$u_0 \in]0,1] \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{4}f(u_n).$$

7. On pose $g(t) = \ln(1+t)$ pour tout $t \geq 0$.

(a) $g \in \mathcal{C}^{+\infty}(]-1,+\infty[,0)$ par composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$. Et alors $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $g'(t) = \frac{1}{1+t}$. Or $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $1+t \geq 1$, donc, par passage à l'inverse (et même par décroissance de la fonction inverse),

$$\forall t \geq 0,\ 0 < \frac{1}{1+t} = g'(t) \leq 1.$$

(b) Soit $t > 0$. g' est décroissante sur $[0,t]$, donc $\forall x \in [0,t]$, $g'(t) = \frac{1}{1+t} \leq g'(x) \leq 1$.
g étant dérivable sur $[0,t]$ et de dérivée bornée sur $[0,t]$, l'inégalité des accroissements finis, nous donne

$$\forall x,y \in [0,t],\ x \neq y,\ \frac{1}{1+t} \leq \frac{g(y)-g(x)}{y-x} \leq 1.$$

En particulier,

$$\frac{1}{1+t} \leq \frac{g(t)-g(0)}{t-0} = \frac{\ln(1+t)}{t} \leq 1.$$

On vient donc de montrer que $\forall t > 0$, $\frac{1}{1+t} \leq \frac{\ln(1+t)}{t} \leq 1$.

(c) D'après la question précédente, on a

$$\forall x > 0,\ \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = \frac{f(x)}{x} \leq 1$$

Et donc,

$$\forall x > 0,\ \frac{x}{1+x^2} \leq f(x) \leq x.$$

(d) On a $\forall x > 0$, $\frac{1}{1+x^2} \leq \frac{f(x)}{x} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \leq 1$. Or, par continuité $\frac{1}{1+x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$. Donc, par théorème des gendarmes, $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$. Et donc, par définition, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$. Ce qui est cohérent avec ce qui a été prouvé en partie I.

8. D'après ce qui précède, on a $\forall x \in]0,1]$, $0 < \frac{x}{1+x^2} \leq f(x) \leq x \leq 1$. Donc $\forall x \in]0,1]$, $f(x) \in]0,1]$ et donc, par définition, $f(]0,1]) \subset]0,1]$. Donc $]0,1]$ est intervalle stable par f.

Or $u_0 \in]0,1]$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente d'ordre 1. Donc elle est bien définie et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0,1]$.

9. On a vu que $\forall t \neq 0$, $f'(t) = \frac{2}{1+t^2} - \frac{\ln(1+t^2)}{t^2}$. Donc,

$$\begin{aligned}
\forall t > 0,\ |f'(t)| &= \left|\frac{2}{1+t^2} - \frac{\ln(1+t^2)}{t^2}\right| \\
&\leq \frac{2}{1+t^2} + \left|\frac{\ln(1+t^2)}{t^2}\right| && \text{inégalité triangulaire} \\
&\leq 2 + 1 = 3 && \text{cf question 6}
\end{aligned}$$

10. On vient de voir que $\forall t > 0$, $|f'(t)| \leq 3$. Or $f'(0) = 1 < 3$. Donc $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $|f'(t)| \leq 3$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et f' est bornée sur $\mathbb{R}_+$, donc, par inégalité des accroissements finis, on a

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+,\ |f(x) - f(y)| \leq 3|x - y|.$$

En particulier, pour $y = 0$, on a

$$\forall x \in]0,1],\ |f(x)| = |f(x) - f(0)| \leq 3|x|.$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0,1]$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1}| = \frac{1}{4}|f(u_n)| \leq \frac{3}{4}|u_n|.$$

11. On a $|u_0| \leq (3/4)^0|u_0|$. Supposons $\exists n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq (3/4)^n|u_0|$. Alors $|u_{n+1}| \leq 3/4|u_n| \leq (3/4)^{n+1}|u_0|$.

Donc, par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq (3/4)^n|u_0|$.

Or $3/4 \in]0,1[$, donc, par convergence des suites géométriques, $(3/4)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc, par corollaire du théorème des gendarmes, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Parti III : Dérivation annexe

On définit la fonction

$$\gamma : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{1+x^2} \end{array}$$

12. En tant qu'inverse de fonction non nulle de classe $\mathcal{C}^\infty$, on a $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

13. On a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \gamma'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \gamma''(x) = \frac{-2(1+x^2)^2 + 8x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4} = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$$

et enfin

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \gamma'''(x) = \frac{12x(1+x^2)^3 - 12x(3x^2-1)(1+x^2)^2}{(1+x^2)^6} = \frac{-24x(x^2-1)}{(1+x^2)^4}.$$

14. On pose $P_0(X) = 1 \in \mathbb{R}[X]$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\gamma(x) = \frac{\widetilde{P_0}(x)}{(1+x^2)^2}$.

Supposons qu'il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\gamma^{(n)}(x) = \frac{\widetilde{P_n}(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$.

Comme $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on peut donc dériver $\gamma^{(n)}$ et alors

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\ \gamma^{(n+1)}(x) &= \frac{\widetilde{P_n}'(x)(1+x^2)^{n+1} - 2(n+1)x(1+x^2)^n\widetilde{P_n}(x)}{(1+x^2)^{2n+2}} \\
&= \frac{\widetilde{P_n}'(x)(1+x^2) - 2(n+1)x\widetilde{P_n}(x)}{(1+x^2)^{n+2}}
\end{aligned}$$

On pose alors $P_{n+1}(X) = P_n'(X)(1+X^2) - 2(n+1)XP_n(X)$. Alors $P_{n+1} \in \mathbb{R}[X]$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \gamma^{(n+1)}(x) = \frac{\widetilde{P_{n+1}}(x)}{(1+x^2)^{n+2}}.$$

On vient donc de montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists P_n \in \mathbb{R}[X]$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\gamma^{(n)}(x) = \frac{\widetilde{P_n}(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$$

avec

$$P_{n+1}(X) = (1+X^2)P_n'(X) - 2(n+1)XP_n(X).$$

15. D'après les calculs de γ, γ', γ'' et γ''', on a

$$P_0(X) = 1, \qquad P_1(X) = -2X, \qquad P_2(X) = 2(3X^2-1), \qquad P_3(X) = -24X(X^2-1).$$

16. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe $P_n, Q_n \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\widetilde{P_n}(x)}{(1+x^2)^{n+1}} = \gamma^{(n)}(x) = \frac{\widetilde{Q_n}(x)}{(1+x^2)^{n+1}}.$$

Comme $\forall x \in \mathbb{R}$, $1+x^2 \neq 0$, on a donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\widetilde{P_n}(x) = \widetilde{Q_n}(x)$. Autrement dit, le polynôme $R_n = P_n - Q_n$ est constant égal à 0 (par linéarité de $P \mapsto \widetilde{P}$). Donc $P_n = Q_n$ et d'où l'unicité.

17. D'après la question précédente, on a $\deg(P_n) = n$ et $\operatorname{coeff\,dom}(P_n) = (-1)^n(n+1)!$ pour $n \in \{0,1,2,3\}$.

Supposons que $\exists n \in \mathbb{N}^*$, $\deg(P_n) = n$ et $\operatorname{coeff\,dom}(P_n) = (-1)^n(n+1)!$. On a $P_{n+1}(X) = (1+X^2)P_n'(X) - 2(n+1)XP_n(X)$. On a donc $\deg(P_n') = n-1 \geq 0$. Et donc $\deg((1+X^2)P_n'(X)) = n+1$. De même, $\deg(XP_n(X)) = n+1$.

Mais

$$\operatorname{coeff\,dom}(2(n+1)XP_n(X)) = 2(n+1)\operatorname{coeff\,dom}(P_n(X)) = (-1)^n 2(n+1)(n+1)!$$

et

$$\operatorname{coeff\,dom}((1+X^2)P_n'(X)) = \operatorname{coeff\,dom}(P_n') = \deg(P_n)\operatorname{coeff\,dom}(P_n) = n(-1)^n(n+1)!.$$

Donc le coefficient de P_{n+1} de X^{n+1} est $(-1)^n n(n+1)! - 2(n+1)(-1)^n(n+1)! = (-1)^n(n+1)!(n-2n-2) = (-1)^{n+1}(n+1)!(n+2) = (-1)^{n+1}(n+2)! \neq 0$.

Donc P_{n+1} est de degré $n+1$ (la plus grande puissance de X qui apparaît est X^{n+1} avec un coefficient non nul) et donc $\operatorname{coeff\,dom}(P_{n+1}) = (-1)^{n+1}(n+2)!$.

Finalement, par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg(P_n) = n$ et $\operatorname{coeff\,dom}(P_n) = (-1)^n(n+1)!$.

Lien entre les polynômes P_n et f

On introduit les fonctions

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array} \qquad \text{et} \qquad h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(1+x^2) \end{array}$$

18. g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en tant que fraction rationnelle et $x \mapsto 1+x^2$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $[1,+\infty[$ et $\ln \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$. Donc par composition, $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

19. Comme $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^*,\mathbb{R})$, on peut la dériver autant de fois que désirer et

$$\forall x \neq 0,\ g(x) = \frac{1}{x}, \qquad g'(x) = \frac{-1}{x^2}, \qquad g''(x) = \frac{2}{x^3}$$

Supposons que $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $\forall x \neq 0$, $g^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}$. Alors $\forall x \neq 0$, $g^{(k+1)}(x) = \frac{-(-1)^k k!(k+1)}{x^{k+2}} = \frac{(-1)^{k+1}(k+1)!}{x^{k+2}}$. Donc, par principe de récurrence,

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \neq 0,\ g^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}.$$

20. h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc en particulier dérivable et

$$\forall x > 0,\ h'(x) = \frac{2x}{1+x^2} = \alpha(x)\gamma(x)$$

où $\alpha : x \mapsto 2x$ et $\gamma : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ introduite dans la partie III. On a $\alpha, \gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et donc, par Leibniz,

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ h^{(k+1)}(x) = (h')^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \alpha^{(i)}(x)\gamma^{(k-i)}(x).$$

Or, d'après la question 13,

$$\forall i \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \gamma^{(i)}(x) = \frac{\widetilde{P_i}(x)}{(1+x^2)^{i+1}}$$

et

$$\forall i \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \alpha^{(i)}(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } i = 0 \\ 2 & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{si } i \geq 2 \end{cases}$$

On en déduit donc

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ h^{(k+1)}(x) &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \alpha^{(i)}(x)\gamma^{(k-i)}(x) \\
&= \alpha(x)\gamma^{(k)}(x) + k\alpha'(x)\gamma^{(k-1)}(x) \\
&= \frac{2x\widetilde{P_k}(x)}{(1+x^2)^{k+1}} + \frac{2k\widetilde{P_{k-1}}(x)}{(1+x^2)^k}
\end{aligned}$$

21. Par définition, on a $f = gh$ et $g, h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$. Donc, par produit de fonctions $\mathcal{C}^\infty$, on a bien $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.
22. On a déjà calculé à la question 3 que

$$\forall x > 0,\ f'(x) = \frac{2}{1+x^2} - \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}.$$

Donc,

$$\forall x > 0,\ f''(x) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2} - \frac{2}{x(1+x^2)} + \frac{2\ln(1+x^2)}{x^3}.$$

Enfin, en utilisant la formule de Leibniz et les questions précédentes pour les calculs des dérivées dans la formule de Leibniz, on a, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\forall x > 0$,

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \\
&= h(x)g^{(n)}(x) + nh'(x)g^{(n-1)}(x) + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x) \\
&= \frac{(-1)^n n! \ln(1+x^2)}{x^{n+1}} + \frac{2(-1)^{n-1} n! x}{x^n(1+x^2)} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k+1} h^{(k+1)}(x) g^{(n-k-1)}(x) \\
&= \frac{(-1)^n n! \ln(1+x^2)}{x^{n+1}} + \frac{2(-1)^{n-1} n!}{x^{n-1}(1+x^2)} \\
&\qquad + 2\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k+1} \left(\frac{x\widetilde{P_k}(x)}{(1+x^2)^{k+1}} + \frac{k\widetilde{P_{k-1}}(x)}{(1+x^2)^k} \right) \frac{(-1)^{n-k-1}(n-k-1)!}{x^{n-k}} \\
&= \frac{(-1)^n n! \ln(1+x^2)}{x^{n+1}} + \frac{2(-1)^{n-1} n!}{x^{n-1}(1+x^2)} + 2\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k+1} \frac{(-1)^{n-k-1}(n-k-1)!\widetilde{P_k}(x)}{(x^{n-k-1}(1+x^2)^{k+1}} \\
&\qquad + 2\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k+1} \frac{(-1)^{n-k-1}(n-k-1)!k\widetilde{P_{k-1}}(x)}{x^{n-k}(1+x^2)^{n-k-1}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(-1)^n n! \ln(1+x^2)}{x^{n+1}} + \frac{2(-1)^{n-1}n!}{x^{n-1}(1+x^2)} + 2n! \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k-1}\widetilde{P_k}(x)}{(k+1)!x^{n-k-1}(1+x^2)^{k+1}} \\
&\qquad + 2n! \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k-1}k\widetilde{P_{k-1}}(x)}{(k+1)!x^{n-k}(1+x^2)^k} \\
&= \frac{(-1)^n n! \ln(1+x^2)}{x^{n+1}} + \frac{2(-1)^{n-1}n!}{x^{n-1}(1+x^2)} + 2n! \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^{n-k}\widetilde{P_{k-1}}(x)}{k!x^{n-k}(1+x^2)^k} \\
&\qquad + 2n! \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k-1}k\widetilde{P_{k-1}}(x)}{(k+1)!x^{n-k}(1+x^2)^k} \\
&= \frac{(-1)^n n! \ln(1+x^2)}{x^{n+1}} + \frac{2(-1)^{n-1}n!}{x^{n-1}(1+x^2)} + \frac{2n!(-1)^{n-2}\widetilde{P_0}(x)}{2!x^{n-1}(1+x^2)} \\
&\qquad + 2n! \sum_{k=2}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k}\widetilde{P_{k-1}}(x)}{x^{n-k}(1+x^2)^k}\left(\frac{1}{k!} - \frac{k}{(k+1)!}\right) + \frac{2n!\widetilde{P_{n-1}}(x)}{n!(1+x^2)^n} \\
&= \frac{(-1)^n n! \ln(1+x^2)}{x^{n+1}} + \frac{2(-1)^{n-1}n!}{x^{n-1}(1+x^2)} + \frac{n!(-1)^n}{x^{n-1}(1+x^2)} \\
&\qquad + 2n! \sum_{k=2}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k}\widetilde{P_{k-1}}(x)}{k!x^{n-k}(1+x^2)^k}\left(1 - \frac{k}{k+1}\right) + \frac{2\widetilde{P_{n-1}}(x)}{(1+x^2)^n} \\
&= \frac{(-1)^n n! \ln(1+x^2)}{x^{n+1}} + \frac{2(-1)^{n-1}n!}{x^{n-1}(1+x^2)} + \frac{(-1)^n n!}{x^{n-1}(1+x^2)} \\
&\qquad + 2n! \sum_{k=2}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k}\widetilde{P_{k-1}}(x)}{(k+1)!x^{n-k}(1+x^2)^k} + \frac{2\widetilde{P_{n-1}}(x)}{(1+x^2)^n} \\
&= \frac{(-1)^n n! \ln(1+x^2)}{x^{n+1}} + \frac{(-1)^{n-1}n!}{x^{n-1}(1+x^2)} + 2n! \sum_{k=2}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k}\widetilde{P_{k-1}}(x)}{(k+1)!x^{n-k}(1+x^2)^k} + \frac{2\widetilde{P_{n-1}}(x)}{(1+x^2)^n} \\
&= \frac{(-1)^n n! \ln(1+x^2)}{x^{n+1}} + 2n! \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k}\widetilde{P_{k-1}}(x)}{(k+1)!x^{n-k}(1+x^2)^k} + \frac{2\widetilde{P_{n-1}}(x)}{(1+x^2)^n}
\end{aligned}$$

On pourra remarquer que cette formule est encore vraie pour $n = 1$ si l'on prend en compte la convention que la somme est nulle puisque $n - 1 < 1$; et cette formule est encore vraie pour $n = 0$ avec la même convention et en rajoutant $P_{-1}(X) = 0$.

Problème 2 (Théorème de Zeckendorff) :
On appelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci.

Partie A : Quelques résultats sur la suite

1. (a) On a $u_2 = u_1 = 1 \in \mathbb{N}^*$.

Supposons $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_n, u_{n+1} \in \mathbb{N}^*$. Alors $u_{n+2} = u_n + u_{n+1} \in \mathbb{N}^*$. Donc, par principe de récurrence double, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in \mathbb{N}^*$.

(b) On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+2} = u_n + u_{n+1} \geq 1 + u_{n+1} > u_{n+1}$. Donc $(u_n)_{n\geq 2}$ est strictement croissante. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante à partir du rang 2.

(c) On a vu dans la question précédente que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+2} \geq 1 + u_{n+1}$. Donc $\forall n \geq 2$, $u_{n+1} \geq 1 + u_n$.

En particulier $u_3 \geq 1 + u_2 \geq 2$. Supposons $\exists n \geq 2$ tel que $u_n \geq n - 1$. Alors $u_{n+1} \geq 1 + u_n \geq n$. Donc, par principe de récurrence simple, $\forall n \geq 2$, $u_n \geq n - 1$.

Et donc, par théorème des gendarmes branche infinie, $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

Remarque :
On pouvait faire cette question de plusieurs manières différentes. Notamment, on pouvait aussi utiliser le faire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'entier strictement croissante et donc diverge vers $+\infty$. Mais ce dernier point est loin d'être trivial et donc me dérange toujours à utiliser tel quel.

2. Notons que $u_2 u_0 - u_1^2 = -u_1^2 = -1 = (-1)^1$.
Supposons $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_{n+1} u_{n-1} - u_n^2 = (-1)^n$. Alors

$$\begin{aligned}
u_{n+2} u_n - u_{n+1}^2 &= (u_n + u_{n+1}) u_n - u_{n+1}^2 \\
&= u_n^2 + u_n u_{n+1} - u_{n+1}^2 \\
&= u_n^2 + u_{n+1}(u_n - u_{n+1}) \\
&= u_n^1 - u_{n+1} u_{n-1} \\
&= -(-1)^n && \text{HR} \\
&= (-1)^{n+1}
\end{aligned}$$

Donc, par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} u_{n-1} - u_n^2 = (-1)^n$.

3. Remarquons d'abord que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ u_p = 0 \times u_{p-1} + 1 \times u_p = u_0 u_{p-1} + u_1 u_p.$$

Supposons $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+p} = u_n u_{p-1} + u_{n+1} u_p$. Alors

$$\begin{aligned}
\forall p \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1+p} &= u_{n+(p+1)} \\
&= u_n u_p + u_{n+1} u_{p+1} && \text{HR} \\
&= u_n u_p + u_{n+1}(u_p + u_{p-1}) \\
&= (u_n + u_{n+1}) u_p + u_{n+1} u_{p-1} \\
&= u_{n+1} u_{p-1} + u_{n+2} u_p
\end{aligned}$$

Et donc, par principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (\forall p \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+p} = u_n u_{p-1} + u_{n+1} u_p).$$

4. On commence par

$$\sum_{k=0}^{0} u_{2k} = u_0 = 0 = u_1 - 1, \qquad \sum_{k=0}^{0} u_{2k+1} = u_1 = 1 = u_2 - 1.$$

Supposons $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{k=0}^{n} u_{2k} = u_{2n+1} - 1$ et $\sum_{k=0}^{n} u_{2k+1} = u_{2n+2} - 1$. Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} u_{2k} &= u_{2n+2} + \sum_{k=0}^{n} u_{2k} & \sum_{k=0}^{n+1} u_{2k+1} &= u_{2n+3} + \sum_{k=0}^{n} u_{2k+1} \\
&= u_{2n+2} + u_{2n+1} - 1 & &= u_{2n+3} + u_{2n+2} - 1 && \text{HR} \\
&= u_{2n+3} - 1 & &= u_{2n+4} - 1 && \text{Fibonacci} \\
&= u_{2(n+1)+1} - 1 & &= u_{2(n+1)+2} - 1
\end{aligned}$$

Et donc, par principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} u_{2k} = u_{2n+1} - 1, \qquad \sum_{k=0}^{n} u_{2k+1} = u_{2n+2} - 1.$$

Partie B : Arithmétique et suite de Fibonacci

5. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $d_n = u_n \wedge u_{n+1}$ la suite des pgcd des termes consécutifs de la suite de Fibonacci.

Alors $d_0 = u_0 \wedge u_1 = 0 \wedge 1 = 1$. On a aussi $d_1 = u_1 \wedge u_2 = 1 \wedge 1 = 1$. Et de même $d_2 = u_2 \wedge u_3 = 1 \wedge u_3 = 1$.

Supposons $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $d_n = 1$. d_{n+1} divise u_{n+1} et u_{n+2}. Donc $d_{n+1}|(u_{n+2} - u_{n+1}) = u_n$. Donc $d_{n+1}|d_n = u_n \wedge u_{n+1} = 1$. Donc $d_{n+1} = 1$.

Et donc, par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $d_n = 1$. Donc deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci sont premiers entre eux.

6. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$. Soit $d = u_n \wedge u_p$ et $\delta = u_n \wedge u_{n+p}$.

Si $p = 0$, alors $u_p = u_0 = 0$. Et $u_n \geq 1$. Donc $u_n \wedge u_p = u_n = u_n \wedge u_n$. Supposons $p \geq 1$.

Alors $\delta|(u_{n+p} - u_{p-1}u_n)$ car $u_{p-1} \in \mathbb{N}$. Or, d'après 3, $u_{n+p} - u_{p-1}u_n = u_{n+1}u_p$. Donc $\delta|u_{n+1}u_p$. Or $\delta|u_n$ et $u_n \wedge u_{n+1} = 1$ d'après la question précédente. Donc $\delta \wedge u_{n+1} = 1$. Donc, par le lemme de Gauss, $\delta|u_p$. Donc $\delta|(u_n \wedge u_p)$ par caractérisation du pgcd. Donc $\delta|d$ par définition de d.

De plus, $d|(u_n u_{p-1} + u_{n+1}u_p)$ donc $\delta|u_{n+p}$ d'après 3. Or $d|u_n$ par définition. Donc par définition de δ, $d|\delta$.

Donc d et δ sont associés. Or $d, \delta \geq 0$ car ce sont des pgcd. Donc $d = \delta$.

Et donc $\forall n, p \in \mathbb{N}^*$, $u_n \wedge u_p = u_n \wedge u_{n+p}$.

(b) Soit $(n, q, r) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned} u_n \wedge u_{qn+r} &= u_n \wedge u_{(q-1)n+r} && \text{question précédente} \\ &= u_n \wedge u_{(q-2)n+r} \\ &\vdots && r \text{ itérations} \\ &= u_n \wedge u_r \end{aligned}$$

Cette démonstration n'est pas vraiment satisfaisante car elle cache une récurrence. Faisons la donc proprement. On sait déjà que $\forall (n,r) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, $u_r \wedge u_n = u_r \wedge u_n$. On notera que d'après la question précédente, $\forall (n,r) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, $u_{n+r} \wedge u_r = u_r \wedge u_n$.

Supposons $\exists q \in \mathbb{N}$ tel que $\forall (n,r) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, $u_{nq+r} \wedge u_r = u_n \wedge u_r$. Alors $\forall (n,r) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, $(n(q+1)+r, r) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ et donc $u_{n(q+1)+r} \wedge u_r = u_{nq+r+n} \wedge u_r = u_{nq+r} \wedge u_r = u_n \wedge u_r$ par hypothèse de récurrence et en utilisant la question précédente.

Donc, par principe de récurrence,

$$\forall q \in \mathbb{N},\ \forall (n,r) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N},\ u_{nq+r} \wedge u_r = u_n \wedge u_r.$$

7. Soit $n, m \in \mathbb{N}$. Si $n = 0$, alors $u_n = 0$ et donc $u_n \wedge u_m = u_m$. Or $n \wedge m = m$. Donc $u_n \wedge u_m = u_{n \wedge m}$.

Supposons $n \geq 1$. On construit alors la suite $(r_k)_{0 \leq k \leq N}$ des restes successifs des divisions euclidiennes dans l'algorithme d'Euclide de la division euclidienne de m par n. Donc $r_0 = m$, $r_1 = n$, $r_{N-1} = n \wedge m$, $r_N = 0$ et $\forall k \in \{0, \ldots, N-1\}$, $\exists q_k \in \mathbb{N}$ tel que $r_k = q_k r_{k+1} + r_{k+2}$. Alors

$$\begin{aligned} \forall k \in \{0, \ldots, N-1\},\ u_{r_k} \wedge u_{r_{k+1}} &= u_{q_k r_{k+1} + r_{k+2}} \wedge u_{r_{k+1}} \\ &= u_{r_{k+2}} \wedge u_{r_{k+1}} && 6b \text{ car } r_{k+1} \neq 0 \end{aligned}$$

En particulier,

$$u_n \wedge u_m = u_{r_0} \wedge u_{r_1} = u_{r_N} \wedge u_{r_{N+1}} = u_{r_N} = u_{n \wedge m}$$

car $r_{N+1} = 0$ et $r_N = n \wedge m$.

8. (a) Soit $n \geq 3$ et $p \in \mathbb{N}$.

Supposons $n|p$. Alors $n \wedge p = n$. Et donc, d'après la question précédente, $u_n \wedge u_p = u_{n \wedge p} = u_n$. Donc $u_n|u_p$.

Réciproquement, supposons $u_p|u_n$. Alors $u_n \wedge u_p = u_n$. Or, par la question précédente, $u_n \wedge u_p = u_{n \wedge p}$. Donc $u_n = u_{n \wedge p}$. Or $n \geq 3$ et, d'après la question 1b, $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante à partir du rang 2. On notera de plus que $u_2 = 1$. Donc $u_3 > 1$. Et donc $\forall k \geq 3$, $u_k > 1$. Donc $u_{n \wedge p} = u_n > 1$ car $n \geq 3$. Et donc, $n \wedge p \geq 3$ (sinon $u_{n \wedge p} \leq 1$). On a donc $n \geq 3$, $n \wedge p \geq 3$, $u_n = u_{n \wedge p}$ et $(u_k)_{k \geq 3}$ strictement croissante. Donc, par injectivité de u, on en déduit $n = n \wedge p$. Et donc $n|p$.

(b) Soit $n \geq 3$. Si $n = 3$, alors $u_3 = 2$ est premier et l'implication est vérifiée. Si $n = 4$, $u_4 = 5$ est premier est l'implication est encore vérifiée.

Supposons $n \geq 5$. On va montrer la contraposée de l'implication. Donc on va montrer que si u_n n'est pas premier, alors n n'est pas premier. Supposons donc que u_n ne soit pas premier. Par stricte croissance de $(u_k)_{k\geq 2}$, on a donc $u_n > u_4 = 5$. Donc n a un diviseur stricte $p \geq 3$ (si e n'est pas le cas, alors n est le produit de deux diviseurs ≤ 2 et donc $n \leq 4$ ☠). Et donc, d'après la question précédente, $u_p | u_n$. Toujours par stricte croissance de la suite $(u_k)_{k\geq 2}$, on a $3 \leq p < n$ donc $u_3 = 2 \leq u_p < u_n$. Donc u_n a un diviseur stricte non trivial. Donc u_n n'est pas premier.

Par contraposition, on vient de montrer que $\forall n \geq 5$, u_n premier $\implies$ n premier. Or cette implication est encore vraie pour $n = 3$ et $n = 4$. On a donc bien montré que $\forall n \geq 3$, u_n premier $\implies$ n premier.

Partie C : Théorème de Zeckendorf

On notera $\forall a, b \in \mathbb{N}$, $a \gg b \iff a \geq b + 2$.

9. (a) On a $1 = 1 = u_2$. Et $4 = 3 + 1 = u_4 + u_2$. Et enfin $12 = 8 + 3 + 1 = u_6 + u_4 + u_2$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\mathcal{A}_n = \{k \in \mathbb{N},\ k \geq 2,\ u_k \leq n\}$. La suite $(u_k)_{k\geq 2}$ diverge vers $+\infty$ donc $\mathcal{A}_n$ est majorée, par définition.

$n \neq 0$ et donc $n \geq 1$. Donc $n \geq u_2$. Donc $2 \in \mathcal{A}_n$.

Donc $\mathcal{A}_n \subset \mathbb{N}$ non vide et majorée. Donc $\max \mathcal{A}_n$ existe.

(c) On sait que $n = 1$ admet une décomposition de Zeckendorf d'après ce qui précède.

Supposons $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall m \in \{1, \ldots, n\}$, m admet une décomposition de Zeckendorf.

On pose $k_1 = \max \mathcal{A}_{n+1}$. Donc, par définition de $\mathcal{A}_{n+1}$, $u_{k_1} \leq n + 1 < u_{k_1+1}$. On notera que $k_1 \geq 2$. Donc $k_1 \gg 0$. Donc si $n + 1 = u_{k_1}$, alors $n + 1$ admet une décomposition de Zeckendorf. Si $n + 1 \neq u_{k_1}$. Alors $u_{k_1} < n + 1$. Donc $n + 1 - u_{k_1} > 0$. Donc $n + 1 - u_{k_1} \geq 1$. De plus, $k_1 \geq 2$, donc $u_{k_1} > 0$. Donc $n + 1 - u_{k_1} \leq n$. Donc $n+1-u_{k_1} \in \{1, \ldots, n\}$. Donc, par hypothèse de récurrence forte, $n+1-u_{k_1}$ admet une décomposition de Zeckendorf. Donc $\exists p \in \mathbb{N}^*$, $\exists k'_1, \ldots, k'_p \in \mathbb{N}$ tels que $k'_1 \gg \cdots \gg k'_p \gg 0$ et

$$n + 1 - u_{k_1} = \sum_{i=1}^{p} u_{k'_i}.$$

On pose $k_2 = k'_1, \ldots, k_{p+1} = k'_p$. Alors

$$n + 1 = \sum_{i=1}^{p+1} u_{k_i}.$$

De plus, $k_2 \gg \cdots \gg k_{p+1} \gg 0$. Il reste juste à vérifier que $k_1 \gg k_2$ *i.e.* $k_1 \geq k_2 + 2$.

Supposons $k_1 < k_2 + 2$. Donc $k_1 \leq k_2 + 1$. Et donc

$$u_{k_1} + u_{k_2} \geq u_{k_1} + u_{k_1-1} = u_{k_1+1} > n + 1$$

par définition de k_1. On a donc ☠.

D'où $k_1 \gg k_2$. Et donc $n + 1$ a bien une décomposition de Zeckendorf.

Donc, par principe de récurrence forte, tout entier naturel non nul admet une décomposition de Zeckendorf.

Remarque :
Le théorème n'est pas encore complètement démontré. Il reste à prouver l'uncité.

En fait, la construction nous fournit une unicité : elle provient de l'unicité du maximum. Mais on va remontrer l'uncitié sans s'appuyer sur la construction faite ici.

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ possédant une décomposition de Zeckendorf. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $k_1, \ldots, k_p \in \mathbb{N}$ tels que $k_1 \gg \cdots \gg k_p \gg 0$ tels que

$$n = \sum_{i=1}^{p} u_{k_i}.$$

(a) Il est facile de montrer que $\forall i \in \{1, \dots, p\}$, $k_i \leq k_1 - 2(i-1)$. Par stricte croissance de $(u_k)_{k\geq 2}$, on en déduit

$$n = \sum_{i=1}^{p} u_{k_i} \leq \sum_{i=1}^{p} u_{k_1-2(i-1)} = \sum_{i=0}^{p-1} u_{k_1-2i}.$$

On effectue alors une disjonctions de cas :

- Si $k_1 \equiv 0\ [2]$, alors

$$\begin{aligned} n &\leq \sum_{i=0}^{p-1} u_{k_1-2i} \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} u_{2(k_1/2-i)} \\ &\leq \sum_{i=0}^{k_1/2} u_{2i} \\ &= u_{2(k_1/2)+1} - 1 && \text{cf } 4 \\ &= u_{k_1+1} - 1 \\ &< u_{k_1+1}. \end{aligned}$$

- Si $k_1 \equiv 1\ [2]$, alors

$$\begin{aligned} n &\leq \sum_{i=0}^{p-1} u_{k_1-2i} \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} u_{2\left(\frac{k_1-1}{2}-i\right)+1} \\ &\leq \sum_{i=0}^{\frac{k_1-1}{2}} u_{2i+1} \\ &= u_{2\frac{k_1-1}{2}+2} - 1 && \text{cf } 4 \\ &= u_{k_1+1} - 1 \\ &< u_{k_1+1} \end{aligned}$$

Dans les deux cas, on a $u_{k_1} \leq n < u_{k_1+1}$.

(b) Supposons qu'il existe deux entiers $k, \ell \geq 2$ tels que $u_k \leq n < u_{k+1}$ et $u_\ell \leq n < u_{\ell+1}$. Sans perte de généralités, on peut suppose $k \geq \ell$ (car on a une relation d'ordre totale sur $\mathbb{N}$). En soustrayant les deux inégalités, on a

$$u_k - u_{\ell+1} < 0 < uk + 1 - u_\ell.$$

Donc $u_k \leq u_{\ell+1}$ et $k \geq 2$. Par stricte croissance de la suite de Fibonacci à partir du rang, on en déduit $k < \ell + 1$. Et de $u_{k+1} - u_\ell > 0$, on déduit $\ell < k + 1$. Donc $k - 1 < \ell < k + 1$. Donc $k = \ell$.

Or, d'après la question précédente, k_1 de la décomposition de Zeckendorf de n vérifier $u_{k_1} \leq n < u_{k_1+1}$. Donc k_1 est unique.

11. On va finir la preuve du théorème par récurrence forte.

1 admet une unique décomposition de Zeckendorf car $1 = u_2$ et $\forall k \geq 2$n $u_k \geq 2 > 1$ ne convient pas.

Supposons $\exists n \geq 1$ tel que $\forall m \in \{1, \dots, n\}$, m admet une unique décomposition de Zeckendorf.

On a déjà montré que $n + 1$ admet une décomposition de Zeckendorf. Donc $\exists p \in \mathbb{N}^*$, $\exists k_1 \gg k_2 \gg \cdots \gg k_p \gg 0$ tels que

$$n + 1 = \sum_{i=0}^{p} u_{k_i}.$$

D'après 10a, $u_{k_1} \leq n+1 < u_{k_1+1}$. Donc k_1 est unique.

Si $u_{k_1} = n+1$, alors la décomposition de Zeckendorf de $n+1$ est unique. Si $u_{k_1} < n+1$, alors $n+1-u_{k_1} \in \{1, \ldots, n\}$. Et donc, par hypothèse de récurrence forte, $n+1-u_{k_1}$ admet une unique décomposition de Zeckendorf. Or $n+1-u_{k_1} = \sum_{i=2}^{p} u_{k_i}$ est une décomposition de Zeckendorf. Donc cette décomposition est unique. Comme k_1 est unique, la décomposition de Zeckendorf de $n+1$ est aussi unique.

Finalement, par principe de récurrence forte, tout entier naturel non nul peut se décomposer de manière unique comme somme de termes de la suite de Fibonacci non consécutifs (et sans les deux premiers termes de la suite).

Remarque :
Évidemment, si on autorise à prendre u_0 et u_1, on perd clairement l'unicitié de la décomposition.