DS 6
Analyse - Arithmétique

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Mercredi 28 Janvier 2026

Le devoir dure 4h.

La qualité de la rédaction et de la présentation seront prises en compte dans la notation. On prendra bien garde à la justesse et la précision des justifications.

Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'identifiera clairement sur la copie et explicitera les décisions qu'il sera amené à prendre.

La calculatrice n'est pas autorisée.

Le sujet comporte 3 pages.

Problème 1 :
Le but de ce problème est d'étudier une fonction et ses dérivées successives.

On introduit la fonction f définie par

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\ln(1+x^2)}{x} \end{array}$$

Partie I : Début des prolongations

1. Étudier la continuité de f sur son domaine de définition.
2. Montrer que l'on peut étendre f en une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On appellera encore f la fonction après prolongement.
3. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée.
4. Montrer que f' est continue sur $\mathbb{R}^*$.
5. Étudier la convergence de f' en 0 et en déduire que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
6. À la fin de l'étude, nous pourrons montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. En admettant que nous avons déjà montré qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$, calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie II : Avec des suites

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$u_0 \in]0,1], \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = \frac{1}{4} f(u_n).$$

7. On pose $g(t) = \ln(1+t)$ pour $t \in \mathbb{R}_+$.
   (a) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq g'(t) \leq 1$.
   (b) À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que
$$\forall t > 0,\ \frac{1}{1+t} \leq \frac{\ln(1+t)}{t} \leq 1.$$
   (c) En déduire également que
$$\forall x > 0,\ \frac{x}{1+x^2} \leq f(x) \leq x.$$
   (d) Retrouver le fait que f est dérivable en 0.
8. Déduire de ce qui précède que $f(]0,1]) \subset]0,1]$ puis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
9. Montrer aussi que $\forall t > 0$, $|f'(t)| \leq 3$.
10. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1}| \leq \frac{3}{4}|u_n|$.
11. Montrer alors que $(u_n) \in \mathbb{N}$ converge et donner sa limite.

Partie III : Dérivation annexe

On définit la fonction γ par
$$\gamma\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{1+x^2} \end{array}$$

12. Montrer que $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
13. Calculer γ', γ'' et γ'''.
14. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\gamma^{(n)}(x) = \frac{\widetilde{P_n(x)}}{(1+x^2)^{n+1}}$, où
$$\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1}(X) = (1+X^2)P_n'(X) - 2(n+1)XP_n(X).$$
15. Expliciter P_0, P_1, P_2 et P_3.
16. Justifier l'unicité des polynômes P_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
17. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg(P_n) = n$ et $\operatorname{coeff\,dom}(P_n) = (-1)^n(n+1)!$.

Partie V : Lien entre les polynômes P_n et f

On introduit les fonctions :
$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array} \qquad \text{et} \qquad h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(1+x^2) \end{array}$$

18. Justifier que g et h sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
19. Calculer $g^{(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
20. Calculer h' et en déduire les $h^{(k+1)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
21. Monter que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
22. [Hors Barème] Calculer f'' et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, et pour tout $x > 0$,
$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n! \ln(1+x^2)}{x^{n+1}} + 2n! \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k}\widetilde{P_{k-1}}(x)}{(k+1)!x^{n-k}(1+x^2)^k} + \frac{2\widetilde{P_{n-1}}(x)}{(1+x^2)^n}.$$

Problème 2 (Théorème de Zeckendorff) :
On considère la suite de Fibonacci, définie par

$$u_0 = 0,\ u_1 = 1,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_n + u_{n+1}.$$

Partie A : Quelques résultats sur la suite

1. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in \mathbb{N}^*$.
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante à partir d'un certain rang.
   (c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2 = (-1)^n$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+p} = u_n u_{p-1} + u_{n+1}u_p$.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} u_{2k} = u_{2n+1} - 1, \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} u_{2k+1} = u_{2n+2} - 1.$$

Partie B : Arithmétique et suite de Fibonacci

5. Montrer que deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci sont premiers entre eux.
6. (a) Montrer que $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, $u_n \wedge u_p = u_n \wedge u_{n+p}$.
   (b) En déduire que $\forall (n,q,r) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $u_{qn+r} \wedge u_n = u_r \wedge u_n$.
7. Montrer que $\forall n, m \in \mathbb{N}$, $u_n \wedge u_m = u_{n\wedge m}$.
8. (a) Montrer que $\forall n \geq 3$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $u_n | u_p \iff n|p$.
   (b) Montrer que $\forall n \geq 3$, si u_n est premier, alors n est premier.

Partie C : Théorème de Zeckendorf

Le but de cette partie est de montrer que le théorème de Zeckendorf qui affirme que tout entier naturel non nul s'écrit de manière unique comme somme de termes non nuls et non consécutifs de la suite de Fibonacci.

Dans la suite, si $a, b \in \mathbb{N}$, on notera $a \gg b$ si $a \geq b + 2$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que n possède une décomposition de Zeckendorf si, et seulement si, $\exists p \in \mathbb{N}^*$, $\exists k_1, \ldots, k_p \in \mathbb{N}$ tels que $k_1 \gg k_2 \gg \cdots \gg k_p \gg 0$ tels que

$$n = \sum_{i=1}^{p} u_{k_i}.$$

9. (a) Donner une décomposition de Zeckendorf des entiers 1, 4 et 12.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathcal{A}_n = \{k \in \mathbb{N},\ k \geq 2,\ u_k \leq n\}$ admet un maximum.
   (c) Montrer par récurrence forte que tout entier naturel non nul admet une décomposition de Zeckendorf.
10. On suppose $n \in \mathbb{N}^*$ possède une décomposition de Zeckendorf. Donc $\exists p \in \mathbb{N}^*$, $\exists k_1, \ldots, k_p \in \mathbb{N}$ tels que $k_1 \gg k_2 \gg \cdots \gg k_p \gg 0$ tels que

$$n = \sum_{i=1}^{p} u_{k_i}.$$

   (a) Montrer que l'entier k_1 vérifier $u_{k_1} \leq n < u_{k_1+1}$.
   (b) En déduire que k_1 est unique.
11. Conclure.