NOM :
Prénom :

Mardi 03 Février 2026

Interrogation 17

Polynômes 2

Correction

Exercice 1 :
Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Définition d'un polynôme scindé.
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. P est dit scindé s'il peut s'écrire sous la forme d'un produit de polynôme de degré 1, *i.e.* P est scindé si $\exists n \in \mathbb{N}^*$, $\exists \alpha, x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}$, $\alpha \neq 0$, $\exists m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(X) = \alpha \prod_{k=1}^{n} (X - x_k)^{m_k}$.

2. Caractérisation de la multiplicité par les dérivées.
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$. Alors a est une racine de P de multiplicité n si, et seulement si, $\forall k \in \{0, \dots, n-1\}$, $\widetilde{P^{(k)}}(a) = 0$ et $\widetilde{P^{(n)}}(a) \neq 0$.

3. Théorème de D'Alembert-Gauss.
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Si $\deg(P) \geq 1$, alors P a (au moins) une racine dans $\mathbb{C}$.

4. Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 ; et les polynômes de degré 2 de discriminant < 0.

5. Définition des polynômes interpolateur de Lagrange.
Soit $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts. On définit les polynômes interpolateur de Lagrange en $x_0, \dots, x_n$, notés $L_0, \dots, L_n$ par :
$$\forall k \in \{0, \dots, n\},\ L_k(X) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{X - x_j}{x_k - x_k}.$$

6. Relations coefficients/racines (générale).
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ scindé, $n = \deg(P) \geq 1$, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ les racines de P (comptées avec multiplicités). Soit $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tel que $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ les fonctions symétriques élémentaires en $x_1, \dots, x_n$. Alors
$$\forall k \in \{1, \dots, n\},\ \sigma_k = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}.$$
En particulier :
$$\prod_{k=1}^{n} x_k = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} x_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

7. Propriétés des polynômes interpolateur de Lagrange.
Soit $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts, $L_0, \dots, L_n$ les polynômes interpolateur de Lagrange en $x_0, \dots, x_n$. Alors $\forall k \in \{0, \dots, n\}$, $\deg(L_k) = n$; $\forall i, j \in \{0, \dots, n\}$, $\widetilde{L_i}(x_j) = \delta_{i,j}$; et $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

8. Caractérisation de la multiplicité par la divisibilité.
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$, $m \in \mathbb{N}$. Alors a est racine de P de multiplicité m si, et seulement si, $\exists Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(X) = (X - a)^m Q(X)$ et $\widetilde{Q}(a) \neq 0$.

Exercice 2 :

Résoudre le système : $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \\ \frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{yz} = 1 \end{cases}$

Soit $x, y, z \in \mathbb{C}$ vérifiant le système précédent. En particulier, on a
$$1 = \frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{yz} = \frac{x + y + z}{xyz} = \frac{1}{xyz}$$

Donc $xyz=1$. Et

$$1=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{xy+xz+yz}{xyz}=xy+xz+yz$$

Donc :

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} x+y+z=1 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1 \\ \frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}=1 \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} x+y+z=1 \\ xy+yz+xz=1 \\ xyz=1 \end{cases} \\
\iff &x,y,z \text{ racines de } X^3-X^2+X-1 \qquad \text{relation coeff/racines} \\
\iff &x,y,z \text{ racines de } X^2(X-1)+X-1 \\
\iff &x,y,z \text{ racines de } (X-1)(X+i)(X-i) \\
\iff &(x,y,z)\in\{(1,i,-i),\ (1,-i,i),\ (i,1,-i),\ (i,-i,1),\ (-i,1,i),\ (-i,i,1)\}.
\end{aligned}$$