



Interrogation 18

Fractions Rationnelles

Correction

Exercice 1 :

Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Degré d'une fraction rationnelle.

Soit $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$. Alors, $\deg(F) = \deg(A) - \deg(B)$ (et ce degré ne dépendant du choix du représentant de F).

2. Définition des racines et pôles d'une fraction rationnelle.

Soit $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ sous forme irréductible. Alors les racines de A dans $\mathbb{K}$ sont appelés des racines de F ; les racines de B sont les pôles de F dans $\mathbb{K}$. La multiplicités des racines (resp. pôles) de F sont leur multiplicités en tant que racines de A (resp. B).

4. Cas des pôles simples

Soit $P \in \mathbb{K}(X)$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ un pôle simple de P . Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ la partie polaire associée à α . Donc $\exists A, B, B_1 \in \mathbb{K}[X]$ tel que $F = \frac{A}{B}$, $\tilde{B}(\alpha) = 0$, $B(X) = (X - \alpha)B_1(X)$, $\tilde{B}_1(\alpha) \neq 0$. Alors

$$\lambda = \widetilde{((X - \alpha)F)}(\alpha) = \frac{\tilde{A}(\alpha)}{\tilde{B}_1(\alpha)} = \frac{\tilde{A}(\alpha)}{\tilde{B}'(\alpha)}.$$

5. Le cas P'/P

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ scindé, $n \in \mathbb{N}^*$ le nombre de racines distinctes de P , $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ les racines distinctes de P , $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}^*$ les multiplicités respectives des racines de P . Alors

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{X - x_k}.$$

Exercice 2 :

Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle $F(X) = \frac{4X^3+6X^2+2X+2}{(X+1)^2(X^2+1)}$

On commencer par noter que la fraction rationnelle est sous forme irréductible : -1 n'est pas racine du numérateur et i non plus (donc $-i$ non plus car les polynômes sont réels). Donc les deux polynômes n'ont pas de racines complexes en communs. Donc les deux polynômes sont premiers entre eux par caractérisation de l'arithmétique dans $\mathbb{C}[X]$ par les racines.

De plus, $\deg(F) = 3 - 4 = -1 < 0$. Donc la partie entière de F est nulle.

1ère méthode : Dans $\mathbb{R}(X)$

Par décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$, $\exists!(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$F(X) = \frac{a}{X+1} + \frac{b}{(X+1)^2} + \frac{cX+d}{X^2+1}.$$

Puis,

$$b = \widetilde{((X+1)^2 F)}(-1) = \frac{-4+6-2+2}{1+1} = 1.$$

Et

$$x\tilde{F}(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} a+c \quad x\tilde{F}(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 4.$$

donc, par unicité de la limite, $a+c=4$.

Puis $\tilde{F}(0) = a+b+d=2$. Donc $a+d=1$.

Et $\tilde{F}(1) = \frac{14}{8} = a/2 + b/4 + \frac{c+d}{2}$. Donc $2(a+c+d)+b=7$. Donc $a+c+d=3$.

On a donc le système

$$\begin{cases} a + d = 1 \\ a + c = 4 \\ a + c + d = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} a + d = 1 \\ a + c = 4 \\ c = 2 \end{cases} \\ \iff \begin{cases} d = -1 \\ a = 2 \\ c = 2 \end{cases}$$

Donc

$$F(X) = \frac{2}{X+1} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{2X-1}{X^2+1}.$$

2eme méthode : Dans $\mathbb{C}(X)$

On repart de

$$F(X) = \frac{4X^3 + 6X^2 + 2X + 2}{(X+1)^2(X^2+1)}$$

Par décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$, $\exists!(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$ tel que

$$F(X) = \frac{a}{X+1} + \frac{b}{(X+1)^2} + \frac{c}{X-i} + \frac{d}{X+i}.$$

Alors

$$\begin{aligned} b &= \widetilde{((X+1)^2 F)}(-1) = \frac{-4+6-2+2}{1+1} = 1 \\ c &= \widetilde{((X-i)F)}(i) = \frac{-4i-6+2i+2}{(i+1)^2(i+i)} = \frac{-4-2i}{(2i)^2} = 1+i/2 \\ d &= \widetilde{((X+i)F)}(-i) = \frac{4i-6-2i+2}{(1-i)^3(-i-i)} = 1-i/2 \end{aligned}$$

Puis, $a + b - c/i + d/i = \tilde{F}(0) = 2$. Donc $a = 2$. Et donc

$$\begin{aligned} F(X) &= \frac{2}{X+1} + \frac{1}{(X+1)^2} + \frac{1+i/2}{X-i} + \frac{1-i/2}{X+i} \\ &= \frac{2}{X+1} + \frac{1}{(X+1)^2} + \frac{(1+i/2)(X+i) + (1-i/2)(X-i)}{X^2+1} \\ &= \frac{2}{X+1} + \frac{1}{(X+1)^2} + \frac{2X-1}{X^2+1} \end{aligned}$$