



Interrogation 19

Analyse Asymptotiques - DL

Correction

Exercice 1 :

Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Formule de Taylor-Young.

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$. Soit $a \in I$. Alors f admet un $DL_n(a)$ et

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n).$$

2. DL et dérivés.

Soit $f \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{K})$. Soit $a \in I$, $n \in \mathbb{N}^*$. Si f admet un $DL_n(a)$ de la forme

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

et si f' admet un $DL_{n-1}(a)$, alors

$$f'(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=1}^n k a_k (x-a)^{k-1} + o((x-a)^{n-1}).$$

3. Caractérisation de la continuité et de la dérivabilité par les DL.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ et $a \in I$. Alors f est continue en a si, et seulement si, f admet un $DL_0(a)$. f est dérivable en a si, et seulement si, f admet un $DL_1(a)$ de la forme $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + \kappa(x-a) + o(x-a)$. De plus, $\kappa = f'(a)$.

4. DL et primitives.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$, $a \in I$, $n \in \mathbb{N}$. Supposons que f admet une primitive F sur I . Si f admet un $DL_n(a)$ de la forme

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

alors F admet un $DL_{n+1}(a)$ qui est

$$F(x) \underset{x \rightarrow a}{=} F(a) + \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} (x-a)^{k+1} + o((x-a)^{n+1}).$$

5. $DL_{2n+2}(0)$ de $\sin$.

$$\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}).$$

6. $DL_n(0)$ de $\exp$

$$e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n).$$

7. $DL_n(0)$ de $x \mapsto \ln(1-x)$

$$\ln(1-x) \underset{x \rightarrow 0}{=} - \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} + o(x^n).$$

8. $DL_{2n+2}(0)$ de $\arctan$.

$$\arctan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}).$$

Exercice 2 :

Calculer le $DL_2(2)$ de $x \mapsto \frac{\sin(\pi x)}{\ln(x-1)}$.

On pose $h = x - 2 \xrightarrow{x \rightarrow 2} 0$. Alors

$$\begin{aligned}
 \frac{\sin(\pi x)}{\ln(x-1)} &= \frac{\sin(\pi h + 2\pi)}{\ln(h+1)} \\
 &= \frac{\sin(\pi h)}{\ln(h+1)} \\
 &\underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{\pi h - \frac{\pi^3}{6}h^3 + o(h^3)}{h - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{3}h^3 + o(h^3)} \\
 &\underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{\pi - \frac{\pi^3}{6}h^2 + o(h^2)}{1 - \frac{1}{2}h + \frac{1}{3}h^2 + o(h^2)} \\
 &\underset{h \rightarrow 0}{=} \left(\pi - \frac{\pi^3}{6}h^2 + o(h^2) \right) \left(1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{3}h^2 + \left(\frac{1}{2}h\right)^2 + o(h^2) \right) \\
 &\underset{h \rightarrow 0}{=} \left(\pi - \frac{\pi^3}{6}h^2 + o(h^2) \right) \left(1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{12}h^2 + o(h^2) \right) \\
 &\underset{h \rightarrow 0}{=} \pi + \frac{\pi}{2}h - \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi^3}{6} \right) h^2 + o(h^2) \\
 &\underset{h \rightarrow 0}{=} \pi + \frac{\pi}{2}h - \frac{\pi(1+2\pi^2)}{12}h^2 + o(h^2) \\
 &\underset{x \rightarrow 2}{=} \pi + \frac{\pi}{2}(x-2) - \frac{\pi(1+2\pi^2)}{12}(x-2)^2 + o((x-2)^2)
 \end{aligned}$$