



Chapitre 21 - TD

Systèmes Linéaires

Correction

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

17 mars 2026

1 Résolution de système

Exercice 1 :

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Résoudre le système

$$\begin{cases} x + 2y = a \\ ax + 3y = b \end{cases}$$

Interpréter géométriquement les résultats obtenues.

Faire de même avec le système

$$\begin{cases} x + y + az = 0 \\ x + ay + z = 0 \\ ax + y + z = b \end{cases}$$

Correction

Exercice 2 :

Déterminer les matrices échelonnées équivalente par ligne aux matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & -5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & -8 & 1 \end{pmatrix}$$

Correction

Exercice 3 :

Résoudre les systèmes suivants

$$(\mathcal{S}_1) \begin{cases} 2x + y - 3z = a \\ 3x + 2y + z = a + 3 \\ 7x + 4y - 5z = 2a + 5 \end{cases} \quad (\mathcal{S}_2) \begin{cases} x + y - z + t = 2 \\ 2x - 2y + z - 3t = 1 \\ -x + y + z - 2t = -2 \end{cases}$$

$$(\mathcal{S}_3) \begin{cases} x + 2y - z + t = 1 \\ x + 3y + z - t = 1 \\ -x + y + 7z + 2t = 1 \\ 2x + y - 8z + t = a \end{cases}$$

Correction

Exercice 4 :

Résoudre les systèmes suivants

$$(\mathcal{S}_1) \begin{cases} 2x + 3y - z = -1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ 3x + 4y - 5z = -4 \end{cases} \quad (\mathcal{S}_2) \begin{cases} 3x + 4y + z + 2t = 3 \\ 6x + 8y + 2z + 6t = 7 \\ 9x + 12y + 3z + 10t = 0 \end{cases}$$

Correction

Exercice 5 :

Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ le système

$$\begin{cases} xyz = 1 \\ xy^2z^4 = 2 \\ xy^3z^9 = 3 \end{cases}$$

Correction

Exercice 6 :

Résoudre le système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \cdots + 2x_n = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + 3x_n = 1 \\ \vdots \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n = 1 \end{cases}$$

Correction

Exercice 7 :

Résoudre les systèmes suivants en fonction des paramètres m, a, b

$$(\mathcal{S}_1) \begin{cases} x + y + (2m - 1)z = 1 \\ mx + y + z = 1 \\ x + my + z = 3(m + 1) \end{cases} \quad (\mathcal{S}_2) \begin{cases} x - my + m^2z = m \\ mx - m^2y + mz = 1 \\ mx + y - m^3z = 1 \end{cases}$$

$$(\mathcal{S}_3) \begin{cases} 2x + y + z + t = 3 \\ x + 2y + z + t = 1 \\ x + y + 2z + t = 2 \\ x + y + z + 2t = 4 \\ 4x - 3y + 3z - 4t = a \\ 2x + 7y + 7z + 2t = b \end{cases}$$

Correction

Exercice 8 () :**

Déterminer les couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que le système suivant n'admette qu'une unique solution :

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ ax + by = 1 \\ a^2x + b^2y = 2 \\ a^3x + b^3y = 3 \end{cases}$$

Correction

Exercice 9 :

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq b$. Montrer que l'ensemble des solutions du système suivant est non vide si et seulement si $c \in \{a, b\}$.

$$\begin{cases} x + ay + z + bt = 1 \\ ax + a^2y + bz + b^2t = c \\ a^2x + a^3y + b^2z + b^3t = c^2 \end{cases}$$

Correction

Exercice 10 :

Déterminer le rang des systèmes homogènes associés aux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 4 & -1 & 5 \\ 3 & 9 & 11 & -2 & 19 \end{pmatrix}$$

Correction

Exercice 11 :

On considère les sev de $\mathbb{R}^3$ dépendant d'un paramètre $m \in \mathbb{R}$ par

$$F_m = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + my + z = 0, mx + y - mz = 0\}$$

et

$$G_m = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - my + z = 0\}$$

1. Déterminer la dimension de F_m et G_m en fonction de m .
2. Déterminer la dimension de $F_m \cap G_m$ en fonction de m .

Correction

Exercice 12 :

Résoudre les systèmes suivants en fonction du paramètre m .

$$\begin{cases} x - y + z = m \\ x + my - z = 1 \\ x - y - z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} mx + y + z + t = 1 \\ x + my + z + t = m \\ x + y + mz + t = 1 + m \end{cases}$$

Correction

Exercice 13 :

Soit $a, b \in \mathbb{C}$. Résoudre le système

$$\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}$$

Correction

Exercice 14 (CCINP 2021) :

Soit $(a, m) \in \mathbb{R}^2$. Résoudre le système et discuter en fonction des valeurs de a et m :

$$\begin{cases} 3x + z = 1 \\ x - 3my + az = -1 \\ 5x + (3 - m)y + mz = a \end{cases}$$

Correction

Exercice 15 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le nombre de solutions en fonction du paramètre λ du système $AX = \lambda X$. Pour quelles valeurs de λ ce système est-il un système de Cramer ?
2. Résoudre le système $AX = \lambda X$ pour toutes les valeurs de λ pour lesquelles ce système n'est pas un système de Cramer.
3. Montrer que les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associés aux solutions des systèmes de Cramer de la question précédente forment une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Si f est l'application linéaire canoniquement associée à A , écrire la matrice de f dans cette nouvelle base.
5. En déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Correction

Exercice 16 (Trigonalisation) :

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Résoudre le système $AX = \lambda X$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Montrer qu'il existe une matrice inversible $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

*Correction***Exercice 17 (Trigonalisation **)** :

Soit

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Soit f l'application linéaire canoniquement associée à M .

1. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $MX = \lambda X$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ selon les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. Résoudre l'équation $MX = X$. On nommera e_1 un vecteur de $\mathbb{R}^3$ dont la représentation matricielle relativement à la base canonique est solution de cette équation.

3. Résoudre le système $MX = 2X + Y$ selon les valeurs de $Y \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Montrer que ce système a des solutions lorsque Y est la matrice de e_1 . On appellera e_2 un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$ dont la représentation matricielle est solution de ce système.

4. Montrer que le système $MX = -X + Y$ a des solutions si et seulement si Y est dans un hyperplan de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dont on donnera une équation. Vérifier que la colonne représentative de $2e_1 - e_2$ est dans cet hyperplan. On appellera e_3 un vecteur solution de ce système.

5. Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

6. On appelle P la matrice représentative de (e_1, e_2, e_3) dans la base canonique. Calculer $P^{-1}MP$. Calculer alors M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

*Correction***Exercice 18 :**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose $\exists Y_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telle que l'équation $AX = Y_0$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ possède une unique solution X_0 .

Montrer que pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, l'équation $AX = Y$ admet une unique solution.

*Correction***2 Inversion de matrices****Exercice 19 :**

Inverser les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$$

*Correction***Exercice 20 :**

Inverser les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 8 \\ -7 & -9 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Correction

Exercice 21 :

Inverser les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -4 & 5 \\ -3 & 5 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Correction

Exercice 22 :

Discuter l'inversibilité des matrices suivantes en fonction des paramètres

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

Correction

Exercice 23 (*) :**

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le rang de f . Donner une base de $\text{Im}(f)$.
2. Donner une base de $\text{ker}(f)$.
3. Déterminer l'image réciproque par f de l'hyperplan de $\mathbb{R}^4$ d'équation $x - y + z - 2t = 0$ dans la base canonique.

Correction

3 Indications

3.1 Résolution de systèmes

Exercices	Indications
1	Attention à la gestion des paramètres. On rappelle qu'on ne peut pas diviser par 0.
2	Rien de particulier. Le but est juste de s'entraîner à l'échelonnement.
3	Des paramètres. Classique.
4	Idem.
7	Encore pareil.
8	Bis repetita.
9	Encore. Mais on va un peu plus loin.
10	Exercice d'application directe du cours sur le rang. On reprend la définition et les techniques du cours (les premières) et on applique.
11	Il suffit d'écrire les définitions des informations vectorielles. Ça fait apparaître des systèmes à paramètres. Et là, on sait quoi faire. Ensuite, ne pas oublier de redonner un sens (vectoriel) à la résolution des systèmes.
12	Des systèmes, des paramètres. Bon.
13	Bis repetita.
14	Un système, deux paramètres, deux fois plus de bonheur.
15	Des matrices et des applications linéaires sont dans un bateau. Tous le monde tombe à l'eau. Qu'est ce qui reste ?
16	Normalement, dans la première question, on trouve un système qui n'est pas de Cramer pour deux valeurs de λ qu'on retrouver dans la question 2. Pour la 2, il s'agit de donner un sens à la formule pour savoir quoi chercher. C'est des représentations matricielles.
17	C'est le même exo qu'au dessus, mais en un peu plus compliqué. Heureusement, il est plus guidé. Ça fait plein de systèmes à paramètres. Et on aime, les paramètres.
18	Que peut-on dire de la matrice A à partir de l'hypothèse ? Ça devrait rendre la question très facile.
??	Il faut garder la tête froide et écrire correctement les choses. Penser à une mise aux même dénominateurs pour se ramener à un autre système.
??	C'est le même mais généralisé. Pour passer aux mise au même dénominateur, ici, il faut passer par les fractions rationnelles. Considérer une solution du système et prendre la fraction $F(X) = \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{X+b_k}$.

3.2 Inversion de matrices

Exercices	Indications
19	On commence gentiment.
20	On complique un peu.
21	On complique encore.
22	Avec des paramètres.
23	La question intéressante, c'est la dernière. C'est un problème à tiroir. Il faut partir doucement et traduire à chaque fois la nouvelle étape avec des systèmes.

4 Correction

4.1 Résolution de système

Correction (1) :

On a

$$\begin{cases} x + 2y = a \\ ax + 3y = b \end{cases} \xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1} \begin{cases} x + 2y = a \\ (2a - 3)x = 2b - 3a \end{cases}$$

On en déduit alors :

- Si $a = 3/2$
 - ★ Si $b \neq 9/4$, alors le système est incompatible et il n'y a pas de solution.
 - ★ Si $b = 9/4$, alors le système est équivalent à $x + 2y = 3/2$. Donc les solutions correspondent à une droite affine du plan.
- Si $a \neq 3/2$, alors le système est encore équivalent à

$$\begin{cases} y = a - \frac{2b-3a}{2a-3} = \frac{2(a^2-b)}{2a-3} \\ x = \frac{2b-3a}{2a-3} \end{cases}$$

et donc l'ensemble des solutions correspond à un unique point du plan de coordonnées $(\frac{2b-3a}{2a-3}, \frac{2(a^2-b)}{2a-3})$.

On considère le système

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y + az = 0 \\ x + ay + z = 0 \\ ax + y + z = b \end{cases} &\xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1, L_3 \leftarrow L_3 - aL_1} \begin{cases} x + y + az = 0 \\ (a-1)y - (a-1)z = 0 \\ (1-a)y + (1-a^2)z = b \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + az = 0 \\ (a-1)(y-z) = 0 \\ (1-a)(y + (1+a)z) = b \end{cases} \\ &\xLeftrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \begin{cases} x + y + az = 0 \\ (a-1)(y-z) = 0 \\ (1-a)(2+a)z = b \end{cases} \end{aligned}$$

On fait alors un disjonction de cas :

- Si $a = 1$, alors le système est équivalent à l'équation $x + y + z = 0$ qui est l'équation d'un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.
- Si $a = -2$
 - ★ Si $b \neq 0$, alors le système est incompatible et il n'y a donc pas de solution.
 - ★ Si $b = 0$, alors le système est équivalent à

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \xLeftrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \begin{cases} x - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

et donc l'ensemble des solutions est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $(1, 1, 1)$.

- Si $a \neq 1$ et $a \neq -2$, alors le système est équivalent à

$$\begin{cases} x + y + az = 0 \\ y - z = 0 \\ z = \frac{b}{(1-a)(2+a)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-b(1+a)}{(1-a)(2+a)} \\ y = \frac{b}{(1-a)(2+a)} \\ z = \frac{b}{(1-a)(2+a)} \end{cases}$$

et donc l'ensemble des solutions du système est le singleton formé du point de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées $(\frac{-b(1+a)}{(1-a)(2+a)}, \frac{b}{(1-a)(2+a)}, \frac{b}{(1-a)(2+a)})$.

□

Correction (2) :

On a

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - 7L_1}]{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 B &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} \\
 &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3 \\
 &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & -8 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & -3 & -6 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{array} \\
 &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad L_4 \leftarrow L_4 + L_3 \\
 &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \\
 &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_4 \leftarrow L_4 - \frac{2}{9}L_3
 \end{aligned}$$

□

Correction (3) :

On va utiliser les écriture matricielle des systèmes.

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{S}_1) \iff \begin{cases} 2x + y - 2z = a \\ 3x + 2y + z = a + 3 \\ 7x + 4y - 5z = 2a + 5 \end{cases} &\iff \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a + 3 \\ 2a + 5 \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 6 - a \\ 10 - 3a \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - 7L_1 \end{array}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 6-a \\ 2a-4 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow L_2 - L_3 \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 14-5a \\ a-2 \end{pmatrix} & \begin{aligned} L_2 &\leftarrow L_2 - 2L_3 \\ L_3 &\leftarrow \frac{1}{2}L_3 \end{aligned} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-2 \\ 14-5a \\ a-2 \end{pmatrix} & L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7a-16 \\ 14-5a \\ a-2 \end{pmatrix} & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2}a-8 \\ 7-\frac{5}{2}a \\ \frac{1}{2}a-1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On va plus vite pour la résolution du deuxième système :

$$(\mathcal{S}_2) \begin{cases} x + y - z + t = 2 \\ 2x - 2y + z - 3t = 1 \\ -x + y + z - 3t = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \frac{5}{6}t \\ y = \frac{t}{2} \\ z = \frac{7}{3}t - 1 \end{cases}$$

et enfin

$$(\mathcal{S}_3) \begin{cases} x + 2y - z + t = 1 \\ x + 3y + z - t = 1 \\ -x + y + 7z + 2t = 1 \\ 2x + y - 8z + t = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5z - \frac{1}{9} \\ y = -2z + \frac{4}{9} \\ t = \frac{2}{9} \end{cases} \quad \text{si } a = 4/9$$

□

Correction (4) :

$$(\mathcal{S}_1) \begin{cases} 2x + 3y - z = -1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ 3x + 4y - 5z = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11z - 8 \\ y = 5 - 7z \end{cases}$$

Il est très facile de voir que le système $(\mathcal{S}_2)$ est incompatible. Donc pas de solutions.

□

Correction (5) :

En passant au log, on a

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} xyz = 1 \\ xy^2z^4 = 2 \\ xy^3z^9 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x) + \ln(y) + \ln(z) = 0 \\ \ln(x) + 2\ln(y) + 4\ln(z) = \ln(2) \\ \ln(x) + 3\ln(y) + 9\ln(z) = \ln(3) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{9}{24}\right) \\ \ln(y) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{256}{27}\right) \\ \ln(z) = \frac{1}{2} \ln(3/4) \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow (x, y, z) = \left(\frac{2}{8}, \frac{16}{3\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

□

Correction (6) :

On résout :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \dots + 2x_n = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + 3x_n = 1 \\ \vdots \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nx_n = 1 \end{cases} \\ \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\ \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Longleftrightarrow & (x_1, x_2, \dots, x_n) = (1, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \forall i \in \{2, \dots, n\}, \\ & L_i \leftarrow L_i - L_{i-1} \end{aligned}$$

□

Correction (7) :

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}_1) \begin{cases} x + y + (2m - 1)z = 1 \\ mx + y + z = 1 \\ x + my + z = 3(m + 1) \end{cases} & \Longleftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -\frac{2}{m-1} \\ y = \frac{3m}{m-1} \\ z = -\frac{1}{m-1} \end{cases} & \text{si } m \neq 1 \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases} \\ (\mathcal{S}_2) \begin{cases} x - my + m^2z = m \\ mx - m^2y + mz = 1 \\ mx + y - m^3z = 1 \end{cases} & \Longleftrightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 1/m \end{pmatrix} & \text{si } m \neq 0 \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

$$(\mathcal{S}_3) \begin{cases} 2x + y + z + t = 3 \\ x + 2y + z + t = 1 \\ x + y + 2z + t = 2 \\ x + y + z + 2t = 4 \\ 4x - 3y + 3z - 4t = a \\ 2x + 7y + 7z + 2t = b \end{cases} \iff \begin{cases} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} & \text{si } a = 9 \text{ et } b = 14 \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

□

Correction (8) :Soit $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}) \begin{cases} x + y = 1 \\ ax + by = 1 \\ a^2x + b^2y = 2 \\ a^3x + b^3y = 3 \end{cases} &\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \\ a^2 & b^2 \\ a^3 & b^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & b-a \\ 0 & (b-a)(b+a) \\ 0 & (b-a)(b^2+ab+a^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-a \\ 2-a^2 \\ 3-a^3 \end{pmatrix} & \begin{aligned} L_2 &\leftarrow L_2 - aL_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - a^2L_1 \\ L_4 &\leftarrow L_4 - a^3L_1 \end{aligned} \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & b-a \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-a \\ 2+ab-b-a \\ 3+ab(b+a-1)-a^2-b^2 \end{pmatrix} & \begin{aligned} L_3 &\leftarrow L_3 - (b+a)L_2 \\ L_4 &\leftarrow L_4 - (b^2+ab+a^2)L_2 \end{aligned} \end{aligned}$$

Pour que le système ait des solutions, il faut déjà que

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2 + ab - b - a = 0 \\ 3 + ab(b + a - 1) - a^2 - b^2 = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} a + b = ab + 2 \\ 3 + ab(a + b - 1) - (a + b)^2 + 2ab = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a + b = ab + 2 \\ 3 + ab(ab + 1) - (ab + 2)^2 + 2ab = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a + b = ab + 2 \\ -1 - ab = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a + b = 1 \\ ab = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc a et b sont les racines du polynôme $(X - a)(X - b) = X^2 - X + 1$. On en déduit donc

$$a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ et } b = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{ou} \quad a = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ et } b = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

On se place dans l'un de ces deux cas. Notre système $(\mathcal{S})$ est alors équivalent à

$$(\mathcal{S}) \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & b-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-a \end{pmatrix}$$

Mais dans les deux cas, on a $a \neq b$, donc la matrice du système est inversible et donc le système est de Cramer. Il n'a donc qu'une unique solution. $\square$

Correction (9) :

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq b$. On considère le système

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{S}) \quad & \begin{cases} x + ay + z + bt = 1 \\ ax + a^2y + bz + b^2t = c \\ a^2x + a^3y + b^2z + b^3t = c^2 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & b \\ a & a^2 & b & b^2 \\ a^2 & a^3 & b^2 & b^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ c^2 \end{pmatrix} \\
 \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & b \\ 0 & 0 & b-a & b(b-a) \\ 0 & 0 & b^2-a^2 & b(b^2-a^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ c-a \\ c^2-a^2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - aL_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - a^2L_1 \end{array} \\
 \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & b \\ 0 & 0 & b-a & b(b-a) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ c-a \\ (c-a)(c-b) \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow L_3 - (a+b)L_2
 \end{aligned}$$

Donc le système n'est pas incompatible si, et seulement si, $(c-a)(c-b) = 0$ autrement dit, le système admet des solutions si, et seulement si, $c \in \{a, b\}$. $\square$

Correction (10) :

On trouve :

$$\begin{aligned}
 A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} & \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow -L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\
 & \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\
 & \xrightarrow{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Donc $\text{rg}(A) = 2$.

En opérant de la même manière pour les deux autres matrices, on trouve $\text{rg}(B) = 3$ et $\text{rg}(C) = 3$. $\square$

Correction (11) :

1. Soit $m \in \mathbb{R}$. G_m est le noyau d'une forme linéaire non nulle, donc $\dim(G_m) = 2$. G_m est donc un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.

La dimension de F_m correspond au rang du système d'équations qui le définissent. On a donc

$$\dim F_m = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ m & 1 & -m \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftarrow C_1 + C_3} \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & m & 1 \\ 0 & 1 & -m \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

2. On a

$$F_m \cap G_m = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + my + z = mx + y - mz = x - my + z = 0\}$$

Encore une fois, la dimension de seu correspond au rang du système d'équations qui le définit. Donc

$$\begin{aligned} \dim F_m \cap G_m &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ m & 1 & -m \\ 1 & -m & 1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[\substack{C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \\ C_2 \leftarrow C_2 - mC_1}]{=} \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 1 - m^2 & -2m \\ 1 & -2m & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[\substack{L_2 \leftrightarrow L_3}]{=} \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2m & 0 \\ m & 1 - m^2 & -2m \end{pmatrix} \\ &= \begin{cases} 3 & \text{si } m \neq 0 \\ 2 & \text{si } m = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

□

Correction (12) :

On fait comme d'habitude et on trouve

$$\begin{cases} x - y + z = m \\ x + my - z = 1 \\ x - y - z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{m+1}{2} \\ y = 0 \\ z = \frac{m-1}{2} \end{cases}$$

et aussi

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases} \iff \begin{cases} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{m+1}{m+2} \\ \frac{1}{m+2} \\ \frac{(m+1)^2}{m+2} \end{pmatrix} & \text{si } m \neq -2 \\ \emptyset & \text{si } m = -2 \end{cases}$$

et enfin

$$\begin{cases} mx + y + z + t = 1 \\ x + my + z + t = m \\ x + y + mz + t = 1 + m \end{cases} \iff \begin{cases} \begin{pmatrix} y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 \\ z = x + \frac{m-1}{1-m} \\ t = \frac{x(m^2+m-2)+m}{1-m} \end{pmatrix} & \text{si } m \neq 1 \\ \emptyset & \text{si } m = 1 \end{cases}$$

□

Correction (13) :

On résout :

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{S}) \begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases} &\iff \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{pmatrix} 0 & b(1-a) & 1-a^2 \\ 0 & b(a-1) & 1-a \\ 1 & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a \\ b-1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - aL_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array} \\
 &\iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2-a-a^2 \\ 0 & b(a-1) & 1-a \\ 1 & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-a \\ b-1 \\ 1 \end{pmatrix} & L_1 \leftarrow L_1 + L_2
 \end{aligned}$$

On va donc faire une disjonction de cas :

- Si $a \neq 1$ et $a \neq -2$. Alors

$$(\mathcal{S}) \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & -1 \\ 1 & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a-b}{(a-1)(a+2)} \\ \frac{b-1}{a-1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

- ★ Si $b \neq 0$. Alors la matrice est inversible et le système est un système de Cramer. Il y a donc une unique solution que l'on détermine :

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{S}) &\iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & -1 \\ 1 & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a-b}{(a-1)(a+2)} \\ \frac{b-1}{a-1} \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a-b}{(a-1)(a+2)} \\ \frac{ab+b+2}{(a-1)(a+2)} \\ \frac{ab+a-2}{(a-1)(a+2)} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - aL_1 \end{array} \\
 &\iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a-b}{(a-1)(a+2)} \\ \frac{ab+b+2}{(a-1)(a+2)} \\ \frac{a-b-4}{(a-1)(a+2)} \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\
 &\iff \begin{cases} x = \frac{a-b}{(a-1)(a+2)} \\ y = \frac{ab+b+2}{b(a-1)(a+2)} \\ z = \frac{a-b-4}{(a-1)(a+2)} \end{cases}
 \end{aligned}$$

- ★ Si $b = 0$, alors

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{S}) &\iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{(a-1)(a+2)} \\ -\frac{1}{a-1} \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{(a-1)(a+2)} \\ \frac{2}{(a-1)(a+2)} \\ 1 \end{pmatrix} & L_2 \leftarrow L_2 + L_1
 \end{aligned}$$

Ce système est donc incompatible. Il n'y a donc pas de solutions.

- Si $a = -2$, alors

$$(\mathcal{S}) \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3b & 3 \\ 1 & b & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+2 \\ b-1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On aboutit donc à la disjonction de cas :

- ★ Si $b \neq -2$, le système est incompatible et il n'y a donc pas de solutions.
- ★ Si $b = -2$, alors

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{S}) &\iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - z \\ 1 + 2z \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - z \\ z \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{cases} x = z \\ y = -\frac{z+1}{2} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Donc il y a une infinité de solution paramétré par un paramètre (l'ensemble des solutions est une droite affine).

- Si $a = 1$, alors

$$(\mathcal{S}) \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-1 \\ b-1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

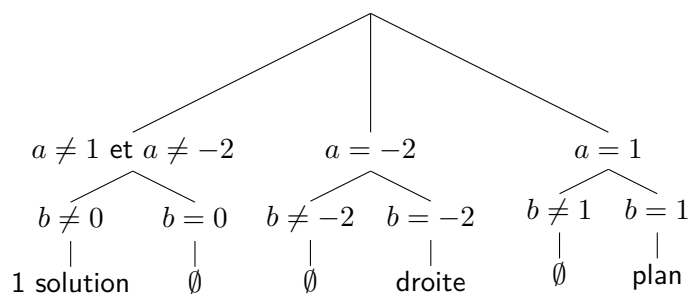
Et donc on refait une disjonction de cas :

- ★ Si $b \neq 1$, le système est incompatible et n'a pas de solutions.
- ★ Si $b = 1$, on

$$(\mathcal{S}) \iff x + y + z = 1$$

et on obtient donc une infinité de solutions à deux paramètres (c'est un plan affine).

On peut résumer la situation par un arbre :



□

Correction (14) :

On résout

$$\begin{cases} 3x + z = 1 \\ x - 3my + az = -1 \\ 5x + (3 - m)y + mz = a \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -3m & a \\ 5 & 3 - m & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 9m & -3a \\ 1 & -3m & a \\ 0 & 3+12m & m-5a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ a+5 \\ -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2 \end{array} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3m & a \\ 0 & 3m & -a \\ 0 & 3+12m & m-5a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4/3 \\ a+5 \end{pmatrix} & L_1/3 \leftrightarrow L_2 \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3m & -a \\ 0 & 3 & m-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 4/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2 \end{array} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & am-a-m^2 \\ 0 & 3 & m-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 4/3+m/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} & L_2 \leftarrow L_2 - mL_3 \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & m-a \\ 0 & 0 & am-a-m^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 4/3+m/3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Finalement :

- Si $am - a - m^2 \neq 0$, le système est e de Cramer et donc il y a une unique solution.
- Si $am - a - m^2 = 0$,
 - Si $m = -4$, il y a une infinité de solution qui est une droite vectorielle.
 - Si $m \neq -4$, le système est incompatible et donc, il n'y a pas de solutions.

□

Correction (15) :

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned}
&AX = \lambda X \text{ pas de Cramer} \\
&\Leftrightarrow (A - \lambda I_3)X = 0 \text{ pas de Cramer} \\
&\Leftrightarrow A - \lambda I_3 \notin \text{GL}_3(\mathbb{R}) \\
&\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_3) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -2 & 1-\lambda & 2 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 & 1 \\ -1-\lambda & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 & C_1 \leftarrow C_1 + C_2 \\
&\Leftrightarrow -(1+\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow (1+\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\
&\Leftrightarrow (1+\lambda)((2-\lambda)^2 - 1) = 0 \\
&\Leftrightarrow (\lambda+1)(1-\lambda)(3-\lambda) = 0
\end{aligned}$$

$$\iff \lambda \in \{-1, 1, 3\}.$$

Donc le système $AX = \lambda X$ a une unique solution si, et seulement si, $\lambda \notin \{-1, 1, 3\}$. Dans le cas où $\lambda \in \{-1, 1, 3\}$, il est facile de voir que $\text{rg}(A - \lambda I_3) = 1$ et donc le système $AX = \lambda X$ a une infinité de solutions paramétrée par un paramètre.

2. On résout

$$\begin{aligned} AX = -X &\iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \begin{aligned} L_2 &\leftarrow \frac{L_1+L_2}{2} \\ L_3 &\leftarrow \frac{L_1+L_3}{4} \end{aligned} \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff (x, y, z) \in \text{Vect}(1, 1, 0) \end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned} AX = X &\iff \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 & \begin{aligned} L_1 &\leftarrow -L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2/2 - L_1 \\ L_3 &\leftarrow \frac{L_3-L_1}{2} \end{aligned} \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff (x, y, z) \in \text{Vect}(1, 0, 1) \end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned} AX = 3X &\iff \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 & \begin{aligned} L_1 &\leftarrow -L_1 - L_3 \\ L_2 &\leftarrow -L_2/2 - L_3 \end{aligned} \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff (x, y, z) \in \text{Vect}(0, 1, 1) \end{aligned}$$

3. On pose $\varepsilon_1 = (0, 1, 1)$, $\varepsilon_2 = (1, 0, 1)$, $\varepsilon_3 = (1, 1, 0)$. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Alors

$$\det_{\mathcal{B}}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2.$$

Donc, par caractérisation des bases par le déterminant, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

4. On note f est l'application linéaire canoniquement associée à A . On note $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$. D'après la question précédente, $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} f(\varepsilon_1) & f(\varepsilon_2) & f(\varepsilon_3) \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{matrix}$$

5. Comme $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$ est diagonale, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f)^n = \text{diag}(3^n, 1, (-1)^n)$. Et par formule de changement de base,

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}).$$

Par une récurrence facile (classique mais à faire), $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) \text{diag}(3^n, 1, (-1)^n) \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$. De plus

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

D'où, finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (-1)^n + n & (-1)^n - n & n - (-1)^n \\ (-1)^n - 3^n & (-1)^n + 3^n & 3^n - (-1)^n \\ n - 3^n & 3^n - n & n + 3^n \end{pmatrix}$$

□

Correction (16) :

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a d'abord.

$$AX = \lambda X \iff \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 4-\lambda & -1 \\ -2 & 5 & -\lambda-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

On calcule le déterminant :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 4-\lambda & -1 \\ -2 & 5 & -\lambda-1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 2-\lambda & 4-\lambda & -1 \\ 2-\lambda & 5 & -1-\lambda \end{vmatrix} && C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 \\ &= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4-\lambda & -1 \\ 1 & 5 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5-\lambda & -2 \\ 0 & 6 & -2-\lambda \end{vmatrix} && \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \\ &= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ 6 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2-2\lambda & -2-\lambda \end{vmatrix} && C_1 \leftarrow C_1 + 2C_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1 - \lambda)(2 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 - \lambda \end{vmatrix} \\
&= (1 - \lambda)(2 - \lambda)^2
\end{aligned}$$

Par conséquent, pour $\lambda \notin \{1, 2\}$, le système est de Cramer est la seule solution est 0.

Avec $\lambda = 1$, on a

$$\begin{aligned}
AX = X &\iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{array} \\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\
&\iff (x, y, z) \in \text{Vect}(1, 0, -1).
\end{aligned}$$

On pose $\varepsilon_1 = (1, 0, -1)$.

Avec $\lambda = 2$, on a

$$\begin{aligned}
AX = 2X &\iff \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\
&\iff \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 + L_1 \\
&\iff \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\
&\iff \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\
&\iff (x, y, z) \in \text{Vect}(1, 1, 1)
\end{aligned}$$

On pose $\varepsilon_2 = (1, 1, 1)$.

2. On résout maintenant

$$\begin{aligned}
AX = 2X + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &\iff \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + y \\ -2 + y \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On pose alors $\varepsilon_3 = (1, 0, -2)$.

On note $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Alors

$$\det_{\mathcal{C}}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -1.$$

Donc la famille $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ par caractérisation des bases par le déterminant.

On note f l'application linéaire canoniquement associée à A . Alors, par construction et par isomorphisme de représentation matricielle, $f(\varepsilon_1) = \varepsilon_1$, $f(\varepsilon_2) = 2\varepsilon_2$ et $f(\varepsilon_3) = 2\varepsilon_3 + \varepsilon_2$. D'où

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{matrix} & \begin{matrix} f(\varepsilon_1) & f(\varepsilon_2) & f(\varepsilon_3) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{matrix} \end{matrix}$$

On pose enfin $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$. Alors, $P \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ et $P^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$. Puis, par formule de changement de bases,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) = PAP^{-1}.$$

□

Correction (17) :

1. On a

$$\begin{aligned} \text{rg}(M - \lambda I_3) &= \text{rg} \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & -2+\lambda & -2-\lambda \end{pmatrix} && C_2 \leftarrow C_2 - C_3 \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix} && L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1-\lambda & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} && C_1 \leftarrow C_1 + C_3 \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} && L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 1-\lambda & -1 \\ 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} && C_1 \leftrightarrow C_2 \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} && L_1 \leftrightarrow L_2 \\ &= \begin{cases} 3 & \lambda \notin \{2, 1, -1\} \\ 2 & \lambda \in \{2, 1, -1\} \end{cases} \end{aligned}$$

2. On résout

$$MX = X \iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & -3 \end{pmatrix} X = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} X = 0 & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0 & L_1 \leftarrow L_1 + L_2
\end{aligned}$$

Donc $\ker(M - I_3) = \text{Vect}(1, -1, 2)$. On pose $e_1 = (1, -1, 2)$.

3. Soit $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors

$$\begin{aligned}
MX = X + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -a \\ b \\ c - 2b - 4a \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donc le système est compatible si, et seulement si, $c - 2b - 4a = 0$. Or e_1 vérifie l'équation de cet hyperplan.

On pose $e_2 = (-1, -1, 0)$ une solution de ce système.

4. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. On résout

$$\begin{aligned}
MX = -X + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -10 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -10 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} a - 3b \\ b \\ c - 2b \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{array} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 10 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3b - a \\ b \\ c - a + b \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow -L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}
\end{aligned}$$

Donc le système a des solutions si, et seulement si, Y est dans l'hyperplan d'équation $c - a + b = 0$. Le vecteur $2e_1 - e_2$ vérifie cette condition.

On pose $e_3 = (2, -1, 4)$ une solution.

5. On a

$$\begin{aligned}
\text{rg}(e_1, e_2, e_3) &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\
&= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} & C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1 \\
&= \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} & L_1 \leftrightarrow L_2
\end{aligned}$$

$$= 3$$

Donc, par caractérisation des bases par le rang, (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

6. On note $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et

$$P = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(e_1, e_2, e_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

En inversant la matrice P par la méthode que l'on veut (P est inversible car matrice d'une base), on a

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3/2 \\ -1 & 0 & 1/2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Le calcul donne

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Puis on en déduit facilement M^n .

□

Correction (18) :

Si $AX = Y_0$, alors $\forall z \in \ker(A)$, si $Z = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(z)$ où $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$, on a $A(X + Z) = Y_0$. Donc $\ker(A) = \{0\}$ (sinon on a une infinité de solutions). Mais comme A est une matrice, carrée, on a donc $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$.

Et donc $AX = Y$ est un système de Cramer pour toute colonne Y .

□

Correction (??) :

1. La matrice de φ et ψ sont diagonales par blocs. Donc E_1 et E_2 sont stables par φ et ψ .

2. On a $A_1 = \text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(\varphi_1)$, $A_2 = \text{Mat}_{\mathcal{B}_2}(\varphi_2)$, $B_1 = \text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(\psi_1)$ et $B_2 = \text{Mat}_{\mathcal{B}_2}(\psi_2)$.

3. Par produit de matrices par blocs.

4. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Alors $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A_1^n = nA_1$ (matrice Attila) et $A_2 = 2I_2 + B_2$ avec $B_2^2 = 0$. Donc, par Newton, puisque I_2 et B_2 commutent,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, A_2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_2^k 2^{n-k} = 2^n I_2 + \frac{n(n-1)}{2} B_2 2^{n-1} = \begin{pmatrix} 2^n & n(n-1)2^{n-2} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Et donc, par produit de matrices par blocs,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, A^n = \begin{pmatrix} n & n & 0 & 0 \\ n & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & n(n-1)2^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

□

4.2 Inversion de matrices

Correction (19) :

En appliquant les méthodes du cours, on trouve

$$A^{-1} = \frac{1}{29} \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B^{-1} = \frac{1}{54} \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}$$

□

Correction (20) :

On trouve

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 11/4 & -7/4 & -1/4 \\ -9/4 & 17/12 & 1/12 \\ 1 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 5/24 & -1/24 & 0 \\ 5/24 & -25/24 & 1 \\ -1/24 & 5/24 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} -2/3 & -4/3 & 1 \\ -2/3 & 11/3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad E^{-1} = \begin{pmatrix} -3/8 & 1/4 & -3/8 \\ -3/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/8 & 1/4 & 1/8 \end{pmatrix}$$

□

Correction (21) :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3/2 & 1/8 & 5/4 & 5/8 \\ 1/2 & 3/8 & -1/4 & -1/8 \\ -1/2 & -1/8 & 3/4 & 3/8 \\ -1/2 & 1/8 & 1/4 & 5/8 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -9/38 & -3/76 & 11/76 & 5/76 \\ -1/12 & -1/8 & 7/24 & 5/24 \\ -1/57 & 1/19 & 8/57 & -5/57 \\ 1/228 & 17/152 & 41/456 & 67/456 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = C \quad D^{-1} = \begin{pmatrix} 5/8 & 1/4 & -1/8 & -3/4 \\ 3/2 & 1 & -3/2 & -2 \\ -1/8 & -1/4 & 5/8 & 3/4 \\ 1/4 & 1/2 & -1/4 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} -2/7 & -5/7 & -1/5 & 4/35 \\ 4/35 & 41/70 & 6/25 & -23/350 \\ 1/7 & 6/7 & 1/5 & -9/35 \\ -8/35 & -47/70 & -7/25 & 81/350 \end{pmatrix}$$

□

Correction (22) :

En essayant d'inverser classiquement la matrice (ou en résolvant un système), on trouve :

- A est tous le temps inversible et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -a & 1 \\ a+1 & a^2 & -a \\ -1 & 1-a & 1 \end{pmatrix}$$

- B est inversible si et seulement si $a \neq -1$ et dans ce cas

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -a/(a+1) & 1/(a+1) \\ 1 & a^2/(a+1) & -a/(a+1) \\ 0 & 1/(a+1) & 1/(a+1) \end{pmatrix}$$

- C est inversible si et seulement si $a \neq -1$ (on va rester dans $\mathbb{R}$) et

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1/(a^3+1) & a^2/(a^3+1) & -a/(a^3+1) \\ -a/(a^3+1) & 1/(a^3+1) & a^2/(a^3+1) \\ a^2/(a^3+1) & -a/(a^3+1) & 1/(a^3+1) \end{pmatrix}$$

□

Correction (23) :

1. On calcul le rang de f en manipulant la matrice de f :

$$\begin{aligned} \text{rg}(f) &= \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\stackrel{\substack{L_3 \leftarrow L_1 + L_4 \\ L_1 \leftarrow L_3 + 2L_4}}{=} \text{rg} \begin{pmatrix} 9 & -3 & 6 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 6 & -2 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\stackrel{\substack{C_3 \leftarrow C_3 - C_2 - C_1 \\ C_2 \leftarrow -C_2}}{=} \text{rg} \begin{pmatrix} 9 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\stackrel{\substack{C_1 \leftarrow C_1 - 4C_4 \\ C_2 \leftarrow C_2 - 3C_4}}{=} \text{rg} \begin{pmatrix} 9 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\stackrel{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}}{=} \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\stackrel{C_1 \leftarrow C_1 - 3C_2}{=} \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \text{rg } I_2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

On sait donc qu'une base de $\text{Im}(f)$ n'est composée que de deux vecteurs. Par ailleurs, il est facile (et on aurait pu l'utiliser avant pour calculer le rang, mais ne sachant pas quoi chercher, c'est plus difficile à trouver) de voir que $C_3(A) = C_1(A) + C_2(A)$. Autrement dit, si on note (e_1, e_2, e_3, e_4) les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$, $f(e_3) = f(e_1) + f(e_2)$. On en déduit donc

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)) = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_4))$$

par principe d'élimination dans une famille génératrice.

En cherchant une autre combinaison linéaire du même genre et en observant la deuxième ligne de la matrice, on trouve que $C_1(A) + 3C_2(A) + 5C_4(A) = 0$. Autrement dit, $f(e_1) + 3f(e_2) + 5f(e_4) = 0$. Et donc

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_4)) = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2))$$

toujours par principe d'élimination dans une famille génératrice.

On en déduit donc que $((2, 3, 1, 4), (1, -1, 3, -3))$ est une base de $\text{Im}(f)$ par caractérisation des bases en dimension finie (c'est une famille génératrice de deux vecteurs en dimension 2).

2. Par le théorème du rang, on a $\dim(\ker(f)) = \dim(\mathbb{R}^4) - \text{rg}(f) = 2$. Par ailleurs, dans la question précédente, on a trouvé $f(e_3) = f(e_1) + f(e_2)$. Donc par linéarité de f , on a $f(e_3 - e_1 - e_2) = 0$. Autrement dit, $e_3 - e_1 - e_2 = (-1, -1, 1, 0) \in \ker(f)$. De la même manière, on a $f(e_1 + 3e_2 + 5e_4) = 0$ et donc $e_1 + 3e_2 + 5e_4 = (1, 3, 0, 5) \in \ker(f)$.

Par ailleurs, la famille $((-1, -1, 1, 0), (1, 3, 0, 5))$ est une famille libre (facile à vérifier avec un système (à faire)). C'est donc une famille libre de deux vecteurs en dimension 2, c'est donc une base de $\ker(f)$ par caractérisation des bases en dimension finie.

On en déduit donc que $\ker(f) = \text{Vect}((1, 3, 0, 5), (1, 1, -1, 0))$ et que c'est une base de $\ker(f)$.

3. On pose $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x - y + z - 2t = 0\}$. Or $x \in f^{-1}(F) \iff f(x) \in F \iff f(x) \in \text{Im}(f) \cap F$. On commence donc par chercher $F \cap \text{Im}(F)$. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Alors

$$\begin{aligned} & (x, y, z, t) \in F \cap \text{Im}(f) \\ \iff & \exists a, b, c, d \in \mathbb{R}, f(a, b, c, d) = (x, y, z, t) \in F \\ \iff & \exists a, b, c, d \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ x - y + z - 2t \end{pmatrix} \\ \iff & \exists a, b, c, d \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ y \\ x \\ t \\ x - y + z - 2t \end{pmatrix} & L_1 \leftrightarrow L_3 \\ \iff & \exists a, b, c, d \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & -10 & -10 & 6 \\ 0 & -5 & -5 & 2 \\ 0 & -15 & -15 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ y - 3z \\ x - 2z \\ t - 4z \\ x - y + z - 2t \end{pmatrix} & \begin{aligned} L_2 &\leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 &\leftarrow L_4 - 4L_1 \end{aligned} \\ \iff & \exists a, b, c, d \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 5 & 5 & -3 \\ 0 & 10 & 10 & -6 \\ 0 & 15 & 15 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ -x + 2z \\ -y + 3z \\ 4z - t \\ x - y + z - 2t \end{pmatrix} & \begin{aligned} L_2 &\leftrightarrow -L_3 \\ L_4 &\leftarrow -L_4 \end{aligned} \\ \iff & \exists a, b, c, d \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 5 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ -x + 2z \\ 2x - y - z \\ 3x - 2z - t \\ x - y + z - 2t \end{pmatrix} & \begin{aligned} L_3 &\leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 &\leftarrow L_4 - 3L_2 \end{aligned} \end{aligned}$$

D'où l'on déduit

$$(x, y, z, t) \in F \cap \text{Im}(f) \iff \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 3x - 2z - t = 0 \\ x - y + z - 2t = 0 \end{cases} \quad \text{car syst précédent compatible}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{cases} y - 3z + 4t = 0 \\ 3y - 5z + 5t = 0 \\ x - y + z - 2t = 0 \end{cases} & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3 \end{array} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y - 3z + 4t = 0 \\ 4z - 7t = 0 \\ x - y + z - 2t = 0 \end{cases} & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z - 2t = 0 \\ y - 3z + 4t = 0 \\ 4z - 7t = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 4y - t = 0 \\ 4y - 5t = 0 \\ 4z - 7t = 0 \end{cases} & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 4L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow 4L_2 + 3L_3 \end{array} \\
&\Leftrightarrow (x, y, z, t) \in \{(6\alpha, 5\alpha, 7\alpha, 4\alpha), \alpha \in \mathbb{R}\} \\
&\Leftrightarrow (x, y, z, t) \in \text{Vect}(6, 5, 7, 4).
\end{aligned}$$

Donc $\text{Im}(f) \cap F = \text{Vect}(6, 5, 7, 4)$.

D'où l'on déduit enfin :

$$\begin{aligned}
(a, b, c, d) \in f^{-1}(F) &\Leftrightarrow f(a, b, c, d) \in F \cap \text{Im}(f) = \text{Vect}(6, 5, 7, 4) \\
&\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}, f(a, b, c, d) = (6\alpha, 5\alpha, 7\alpha, 4\alpha) \\
&\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 5 & 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\alpha \\ 5\alpha \\ 7\alpha \\ 4\alpha \end{pmatrix} \quad \text{cf premier système} \\
&\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 5 & 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\alpha \\ 8\alpha \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11\alpha \\ 8\alpha \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow 5L_1 - 3L_2 \\
&\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11\alpha - 5c + d \\ 8\alpha - 5c + 3d \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{5}\alpha - c + \frac{1}{5}d \\ \frac{8}{5}\alpha - c + \frac{3}{5}d \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

D'où l'on déduit que

$$f^{-1}(F) = \left\{ \left(\frac{11}{5}\alpha - c + \frac{1}{5}d, \frac{8}{5}\alpha - c + \frac{3}{5}d, c, d \right), \alpha, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

(On reconnaît une base de noyau en facteur des coefficients c et d)

□