



## Chapitre 21 - TD

# Systèmes Linéaires

Simon Dauguet  
*simon.dauguet@gmail.com*

17 mars 2026

### 1 Résolution de système

#### Exercice 1 :

Soit  $a, b \in \mathbb{R}$ . Résoudre le système

$$\begin{cases} x + 2y = a \\ ax + 3y = b \end{cases}$$

Interpréter géométriquement les résultats obtenues.

Faire de même avec le système

$$\begin{cases} x + y + az = 0 \\ x + ay + z = 0 \\ ax + y + z = b \end{cases}$$

#### Exercice 2 :

Déterminer les matrices échelonnées équivalente par ligne aux matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & -5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & -8 & 1 \end{pmatrix}$$

#### Exercice 3 :

Résoudre les systèmes suivants

$$(\mathcal{S}_1) \begin{cases} 2x + y - 3z = a \\ 3x + 2y + z = a + 3 \\ 7x + 4y - 5z = 2a + 5 \end{cases} \quad (\mathcal{S}_2) \begin{cases} x + y - z + t = 2 \\ 2x - 2y + z - 3t = 1 \\ -x + y + z - 2t = -2 \end{cases}$$

$$(\mathcal{S}_3) \begin{cases} x + 2y - z + t = 1 \\ x + 3y + z - t = 1 \\ -x + y + 7z + 2t = 1 \\ 2x + y - 8z + t = a \end{cases}$$

**Exercice 4 :**

Résoudre les systèmes suivants

$$(\mathcal{S}_1) \begin{cases} 2x + 3y - z = -1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ 3x + 4y - 5z = -4 \end{cases} \quad (\mathcal{S}_2) \begin{cases} 3x + 4y + z + 2t = 3 \\ 6x + 8y + 2z + 6t = 7 \\ 9x + 12y + 3z + 10t = 0 \end{cases}$$

**Exercice 5 :**Résoudre dans  $\mathbb{R}_+^*$  le système

$$\begin{cases} xyz = 1 \\ xy^2z^4 = 2 \\ xy^3z^9 = 3 \end{cases}$$

**Exercice 6 :**

Résoudre le système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \cdots + 2x_n = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + 3x_n = 1 \\ \vdots \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n = 1 \end{cases}$$

**Exercice 7 :**Résoudre les systèmes suivants en fonction des paramètres  $m, a, b$ 

$$(\mathcal{S}_1) \begin{cases} x + y + (2m - 1)z = 1 \\ mx + y + z = 1 \\ x + my + z = 3(m + 1) \end{cases} \quad (\mathcal{S}_2) \begin{cases} x - my + m^2z = m \\ mx - m^2y + mz = 1 \\ mx + y - m^3z = 1 \end{cases}$$

$$(\mathcal{S}_3) \begin{cases} 2x + y + z + t = 3 \\ x + 2y + z + t = 1 \\ x + y + 2z + t = 2 \\ x + y + z + 2t = 4 \\ 4x - 3y + 3z - 4t = a \\ 2x + 7y + 7z + 2t = b \end{cases}$$

**Exercice 8 (\*\*):**Déterminer les couples  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tels que le système suivant n'admette qu'une unique solution :

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ ax + by = 1 \\ a^2x + b^2y = 2 \\ a^3x + b^3y = 3 \end{cases}$$

**Exercice 9 :**Soit  $a, b, c \in \mathbb{R}$  avec  $a \neq b$ . Montrer que l'ensemble des solutions du système suivant est non vide si et seulement

si  $c \in \{a, b\}$ .

$$\begin{cases} x + ay + z + bt = 1 \\ ax + a^2y + bz + b^2t = c \\ a^2x + a^3y + b^2z + b^3t = c^2 \end{cases}$$

**Exercice 10 :**

Déterminer le rang des systèmes homogènes associés aux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 4 & -1 & 5 \\ 3 & 9 & 11 & -2 & 19 \end{pmatrix}$$

**Exercice 11 :**

On considère les sev de  $\mathbb{R}^3$  dépendant d'un paramètre  $m \in \mathbb{R}$  par

$$F_m = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + my + z = 0, mx + y - mz = 0\}$$

et

$$G_m = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - my + z = 0\}$$

1. Déterminer la dimension de  $F_m$  et  $G_m$  en fonction de  $m$ .
2. Déterminer la dimension de  $F_m \cap G_m$  en fonction de  $m$ .

**Exercice 12 :**

Résoudre les systèmes suivants en fonction du paramètre  $m$ .

$$\begin{cases} x - y + z = m \\ x + my - z = 1 \\ x - y - z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} mx + y + z + t = 1 \\ x + my + z + t = m \\ x + y + mz + t = 1 + m \end{cases}$$

**Exercice 13 :**

Soit  $a, b \in \mathbb{C}$ . Résoudre le système

$$\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}$$

**Exercice 14 (CCINP 2021) :**

Soit  $(a, m) \in \mathbb{R}^2$ . Résoudre le système et discuter en fonction des valeurs de  $a$  et  $m$  :

$$\begin{cases} 3x + z = 1 \\ x - 3my + az = -1 \\ 5x + (3 - m)y + mz = a \end{cases}$$

**Exercice 15 :**

Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

1. Déterminer le nombre de solutions en fonction du paramètre  $\lambda$  du système  $AX = \lambda X$ . Pour quelles valeurs de  $\lambda$  ce système est-il un système de Cramer ?
2. Résoudre le système  $AX = \lambda X$  pour toutes les valeurs de  $\lambda$  pour lesquelles ce système n'est pas un système de Cramer.
3. Montrer que les vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  canoniquement associés aux solutions des systèmes de Cramer de la question précédente forment une base de  $\mathbb{R}^3$ .
4. Si  $f$  est l'application linéaire canoniquement associée à  $A$ , écrire la matrice de  $f$  dans cette nouvelle base.
5. En déduire l'expression de  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 16 (Trigonalisation) :**

Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ .

1. Résoudre le système  $AX = \lambda X$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
2. Montrer qu'il existe une matrice inversible  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  tel que

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 17 (Trigonalisation \*\*) :**

Soit

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Soit  $f$  l'application linéaire canoniquement associée à  $M$ .

1. Déterminer le nombre de solutions de l'équation  $MX = \lambda X$  d'inconnue  $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  selon les valeurs de  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
2. Résoudre l'équation  $MX = X$ . On nommera  $e_1$  un vecteur de  $\mathbb{R}^3$  dont la représentation matricielle relativement à la base canonique est solution de cette équation.
3. Résoudre le système  $MX = 2X + Y$  selon les valeurs de  $Y \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ . Montrer que ce système a des solutions lorsque  $Y$  est la matrice de  $e_1$ . On appellera  $e_2$  un vecteur non nul de  $\mathbb{R}^3$  dont la représentation matricielle est solution de ce système.
4. Montrer que le système  $MX = -X + Y$  a des solutions si et seulement si  $Y$  est dans un hyperplan de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  dont on donnera une équation. Vérifier que la colonne représentative de  $2e_1 - e_2$  est dans cet hyperplan. On appellera  $e_3$  un vecteur solution de ce système.

5. Montrer que  $(e_1, e_2, e_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
6. On appelle  $P$  la matrice représentative de  $(e_1, e_2, e_3)$  dans la base canonique. Calculer  $P^{-1}MP$ . Calculer alors  $M^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 18 :**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On suppose  $\exists Y_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  telle que l'équation  $AX = Y_0$  d'inconnue  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  possède une unique solution  $X_0$ .

Montrer que pour tout  $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ , l'équation  $AX = Y$  admet une unique solution.

## 2 Inversion de matrices

**Exercice 19 :**

Inverser les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$$

**Exercice 20 :**

Inverser les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 8 \\ -7 & -9 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Exercice 21 :**

Inverser les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -4 & 5 \\ -3 & 5 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

**Exercice 22 :**

Discuter l'inversibilité des matrices suivantes en fonction des paramètres

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 23 (\*\*\*) :**

Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$  dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le rang de  $f$ . Donner une base de  $\text{Im}(f)$ .
2. Donner une base de  $\ker(f)$ .
3. Déterminer l'image réciproque par  $f$  de l'hyperplan de  $\mathbb{R}^4$  d'équation  $x - y + z - 2t = 0$  dans la base canonique.