



## Chapitre 24

# Déterminant

Simon Dauguet  
*simon.dauguet@gmail.com*

vendredi 3 avril, 2026

*La devise Shadok de la semaine*



S'IL N'Y A PAS DE SOLUTION  
C'EST QU'IL N'Y A PAS DE PROBLÈME.

Le déterminant est un outil très utile en algèbre linéaire. Il permet de traduire beaucoup d'éléments d'algèbre linéaire d'un point de vue calculatoire. Plus spécifiquement, il permet de déterminer si une famille est libre ou non. Il suffira donc de faire un petit calcul pour répondre à la question. Mais bien sûr, ça ne me marchera pas toujours. Il faut certaines conditions pour que le déterminant puisse être calculé.

Géométriquement, le déterminant correspond à l'aire du parallélogramme défini par deux vecteurs dans le plan ou par le volume du parallélépipède défini par 3 vecteurs de l'espace. En dimension  $n$ , le déterminant est la généralisation de ce principe. Le déterminant mesure donc le volume défini par  $n$  vecteurs en dimension  $n$ .

We [Irving Kaplansky and Paul Halmos] share a philosophy about linear algebra : we think basis-free, we write basis-free, but when the chips are down we close the office door and compute with matrices like fury.

---

Irving Kaplansky

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Approche théorique</b>	<b>3</b>
1.1	Applications multilinéaires . . . . .	3
1.2	Déterminant d'une matrice . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Calcul concret du déterminant</b>	<b>14</b>
2.1	Déterminant $2 \times 2$ . . . . .	14
2.2	Déterminant $3 \times 3$ . . . . .	15
2.3	Déterminant $n \times n$ . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Propriétés algébriques</b>	<b>20</b>
3.1	Déterminant de matrice particulières . . . . .	20
3.2	Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes . . . . .	23
3.3	Déterminant et produit matriciel . . . . .	26
3.4	Déterminant et inversibilité . . . . .	28
3.5	Déterminant par blocs . . . . .	29
3.6	Cas des déterminants de Vandermonde . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Retour à la généralisation vectorielle</b>	<b>32</b>
4.1	Déterminant d'une famille de vecteurs . . . . .	32
4.2	Déterminant d'un endomorphisme . . . . .	34
<b>5</b>	<b>Applications</b>	<b>37</b>
5.1	Systèmes de Cramer . . . . .	37
5.2	Comatrice . . . . .	39
5.3	Information matricielle . . . . .	41

## 1 Approche théorique

On va commencer par introduire le déterminant d'un point de vue théorique. Cette approche est très abstraite mais à l'avantage de réduire toutes les propriétés du déterminant à seulement quelques lignes. C'est une approche très efficace qui permet également de définir rapidement le déterminant et donc d'en avoir une vision globale assez facilement.

Nous ferons une seconde approche ensuite, beaucoup plus calculatoire. Elle aura l'avantage d'être "terre-à-terre", mais la lourdeur des notations et des calculs rend difficile la reconnaissance des différentes propriétés du déterminant. Les calculs rendent la lecture difficile.

### 1.1 Applications multilinéaires

Définition 1.1 (Application multilinéaire) :

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev et  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- Une application  $n$ -linéaire de  $E$  dans  $F$  est une application à  $n$  variables

$$f : E^n \rightarrow F$$

qui est linéaire par rapport à chacune de ses variables, c'est-à-dire telle que pour tout vecteur  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$  et  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ , l'application

$$\begin{array}{ccc} E & \rightarrow & F \\ y & \mapsto & f(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_n) \end{array}$$

est une application linéaire.

On note  $\mathcal{L}_n(E, F)$  l'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $F$ .

- Une application multilinéaire est une application  $n$ -linéaire pour un certain  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- Une application multilinéaire de  $E^2$  dans  $F$  est appelée une application bilinéaire. Et une application multilinéaire de  $E^3$  dans  $F$  est une application trilinéaire.
- Si  $F = \mathbb{K}$ , on parle alors de forme multilinéaire.

#### Exemple 1.1 :

Les applications

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ (A, B) & \mapsto & AB \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X] & \rightarrow & \mathbb{K}[X] \\ (P, Q) & \mapsto & PQ \end{array}$$

sont des applications bilinéaires.

On a déjà croisé d'autres exemples d'applications bilinéaires dans les différents chapitres d'algèbres linéaires. Notamment, la composition est une application bilinéaire sur les applications.

**!!! ATTENTION !!!**


$$\mathcal{L}_n(E, F) \neq \mathcal{L}(E^n, F).$$

Si  $f \in \mathcal{L}_2(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(E^2, F)$  alors dans les deux  $f, g : E^2 \rightarrow F$ . Mais :

$$\forall x, y, x', y' \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \begin{cases} f(x + \lambda y, x' + \lambda y') = f(x, x') + \lambda f(x, y') + \lambda f(x', y) + \lambda^2 f(y, y') \\ g(x + \lambda y, x' + \lambda y') = g(x, x') + \lambda g(y, y'). \end{cases}$$



**Contre-exemple :**

Le produit matricielle est bilinéaire mais la somme matricielle est linéaire.

**Remarque :**

L'application nulle est une application  $n$ -linéaire.

**Remarque :**

Si  $E$  est de dimension finie, comme pour toute application linéaire, une application multilinéaire est déterminé par l'image d'une base. Attention ici au sens de l'image d'une base : si  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$  est une base de  $E$ , alors  $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall x_i = \sum_{j=1}^p a_{i,j} e_j$ ,

$$f(x_1, \dots, x_n) = f\left(\sum_{j=1}^p a_{1,j} e_j, \dots, \sum_{j=1}^p a_{n,j} e_j\right) = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_n \leq p} \left(\prod_{k=1}^n a_{i_k, k}\right) f(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}).$$

**Proposition 1.1 (Image d'une famille contenant 0) :**

Soit  $E, F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev et  $f : E^n \rightarrow F$  une application  $n$ -linéaire et  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ .

Si  $\exists i \in \{1, \dots, n\}, x_i = 0_E$ , alors  $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ .

*Démonstration :*

Ça vient du fait que  $y \mapsto f(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_n)$  est linéaire et donc s'annule en 0. □

**Proposition 1.2 :**

Soit  $E, F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$\mathcal{L}_n(E, F)$  est un  $\mathbb{K}$ -ev.

*Démonstration :*

Il suffit de montrer que  $\mathcal{L}_n(E, F)$  est un sev de  $\mathcal{F}(E^n, F)$ . □

Définition 1.2 (Application multilinéaire symétrique, antisymétrique, alternée) :

Soit  $E, F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev et  $f : E^n \rightarrow F$  une application  $n$ -linéaire.

- On dit que  $f$  est *symétrique* si  $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j,$

$$f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

autrement dit si l'ordre des variables n'importe pas.

- On dit que  $f$  est *antisymétrique* si  $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j,$

$$f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = -f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

autrement dit, en inversant deux variables, on multiplie le résultat par  $-1$ .

- On dit que  $f$  est *alternée* si  $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \text{ t.q. } \exists i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j \text{ t.q. } x_i = x_j,$  on a

$$f(x_1, \dots, x_n) = 0$$

**Exemple 1.2 :**

- L'application

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}^2)^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ ((x, y), (x', y')) &\mapsto xx' + yy' \end{aligned}$$

est une forme bilinéaire symétrique sur  $\mathbb{R}^2$  (c'est le produit scalaire canonique sur  $\mathbb{R}^2$ ).

- L'application

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}^2)^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ ((x, y), (x', y')) &\mapsto xy' - x'y \end{aligned}$$

est une forme bilinéaire antisymétrique et alternée.

**Proposition 1.3 (Caractérisation des applications linéaires symétriques, antisymétriques et alternées) :**

Soit  $E, F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev et  $f$  une application  $n$ -linéaire de  $E$  dans  $F$ .

(i)  $f$  est symétrique si et seulement si

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \forall x_1, \dots, x_n \in E, f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, \dots, x_n).$$

(ii)  $f$  est antisymétrique si et seulement si

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \forall x_1, \dots, x_n \in E, f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)f(x_1, \dots, x_n).$$

(iii)  $f$  est alternée si et seulement si

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, (x_1, \dots, x_n) \text{ liée} \implies f(x_1, \dots, x_n) = 0_F.$$

*Démonstration :*

1. Toute permutation étant le produit de transpositions, si  $f$  est symétrique, alors on a facilement la propriété annoncée.  
Inversement, en spécifiant dans le cas d'une transposition,  $f$  est symétrique.
2. Là encore, on décompose une permutation en produit de transpositions, ce qui donne le résultat immédiatement.
3. Supposons  $f$  alternée. Soit  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$  liée. Alors l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille. Donc  $\exists k \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n-1}$  tel que  $x_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j x_j$ . Et donc

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_j, \dots, x_n) = 0$$

Réciproquement, en considérant une famille  $(x_1, \dots, x_n)$  avec deux vecteurs égaux, la famille est liée et donc  $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ . Donc  $f$  est alternée. □

**!!! ATTENTION !!!**



Ce n'est qu'une implication dans le troisième point. Ce n'est pas parce que  $f(x_1, \dots, x_n) = 0$  que la famille est automatiquement liée, même si  $f$  est alternée.

**Théorème 1.4 (Les applications alternées sont les applications antisymétriques) :**

Soit  $E, F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev.

(i)  $f$  alternée  $\implies f$  antisymétrique.

(ii) Si  $\mathbb{K}$  n'est pas de caractéristique 2, alors  $f$  alternée  $\iff f$  antisymétrique.

**Remarque :**

On rappelle que si un corps est de caractéristique  $n$ , alors multiplié par  $n$  revient à multiplier par 0.

*Démonstration :*

Il suffit d'écrire, avec une petite astuce. Il faut regarder le  $n$ -uplet  $(x_1, \dots, x_i + x_j, \dots, x_i + x_j, \dots, x_n)$  dont l'image donne 0 par  $f$  puisqu'elle est alternée. Et la multilinéarité finit le travail : Soit  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ . Soit  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  avec  $i \neq j$ . Alors, comme  $f$  est alternée, on a

$$\begin{aligned}
 & f(x_1, \dots, x_i + x_j, \dots, x_i + x_j, \dots, x_n) = 0 \\
 \iff & f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i + x_j, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i + x_j, \dots, x_n) = 0 && \begin{array}{l} \text{par linéarité de } f \\ \text{par rapport à la} \\ \textit{i-ème variable} \end{array} \\
 \iff & f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) \\
 & \quad + f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_j, \dots, x_n) = 0 && \begin{array}{l} \text{par linéarité de } f \\ \text{par rapport à la} \\ \textit{j-ème variable} \end{array} \\
 \iff & f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n) = 0 && \text{car } f \text{ alternée} \\
 \iff & f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n) = -f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n)
 \end{aligned}$$

Et donc, par définition,  $f$  est antisymétrique.

Supposons maintenant  $f$  antisymétrique. Soit  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$  et  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  avec  $i \neq j$  tel que  $x_i = x_j$ . Alors, en permutant les deux positions  $i$  et  $j$ , on a

$$f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) = -f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

Et donc  $2f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) = 0_F$ . Si  $\mathbb{K}$  n'est pas de caractéristique 2, alors 2 est inversible dans  $\mathbb{K}$  et donc  $2 \neq 0$  et donc  $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) = 0_F$ . Donc  $f$  est bien alternée.  $\square$

**Remarque :**

Nous avons déjà croisé des corps de caractéristique 2. L'étude de tels corps sera plus poussée en MP avec les anneaux  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . En particulier,  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  est un corps de caractéristique 2.

Notation :

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension  $n$ .

On note  $\Lambda_n(E)$  l'ensemble des formes linéaires alternées sur  $E$ .

**Remarque :**

Il est facile de montrer que  $\Lambda_n(E)$  est un sev de  $\mathcal{L}_n(E, \mathbb{K})$ .

**Théorème 1.5 (Structure des formes  $n$ -linéaires alternées) :**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension  $n$ .

Alors  $\Lambda_n(E)$  l'ensemble des formes  $n$ -linéaires alternées sur  $E$  est une droite vectorielle.

*Démonstration :*

Commençons par le cas  $n = 2$  pour se clarifier les idées. Soit donc  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension 2. Soit  $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$  une base de  $E$ . Soit  $f, g$  deux formes bilinéaires alternées sur  $E$ . Soit  $a, b, c, d \in \mathbb{K}$ . On a donc :

$$\begin{aligned} g(ae_1 + be_2, ce_1 + de_2) &= ag(e_1, ce_1 + de_2) + bg(e_2, ce_1 + de_2) \\ &= acg(e_1, e_1) + adg(e_1, e_2) + bcg(e_2, e_1) + bdg(e_2, e_2) \\ &= adg(e_1, e_2) + bcg(e_2, e_1) \\ &= (ad - bc)g(e_1, e_2) \end{aligned}$$

puisque  $g$  est alternée. De même,  $f(ae_1 + be_2, ce_1 + de_2) = (ad - bc)f(e_1, e_2)$ .

Si  $f(e_1, e_2) = 0$ , on a donc  $f = 0$  et  $f = 0 \times g$ . Supposons maintenant que  $f(e_1, e_2) \neq 0$ . Alors  $g(e_1, e_2) = \frac{g(e_1, e_2)}{f(e_1, e_2)} f(e_1, e_2)$ . On pose  $\lambda = \frac{g(e_1, e_2)}{f(e_1, e_2)} \in \mathbb{K}$ . Et dans ce cas

$$g(ae_1 + be_2, ce_1 + de_2) = (ad - bc)g(e_1, e_2) = \lambda(ad - bc)f(e_1, e_2) = \lambda f(ae_1 + be_2, ce_1 + de_2)$$

Donc  $\forall x, y \in E$ ,  $g(x, y) = \lambda f(x, y)$ . Et donc l'espace vectoriel des formes bilinéaires sur  $E$  est bien une droite vectorielle.

Passons au cas général. Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension  $n$ . Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Soit  $x_1, \dots, x_n \in E$  avec  $\forall j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $x_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i$ . Alors

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_n \leq n} \left( \prod_{k=1}^n a_{k, i_k} \right) f(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}).$$

$f$  étant alternée, si deux indices  $i_k$  et  $i_\ell$  sont égaux, le scalaire  $f(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$  est nul. On peut donc restreindre la somme aux indices deux à deux distincts.

Or trouver des indices  $(i_1, \dots, i_n) \in \{1, \dots, n\}$  deux à deux distincts à considérer une application  $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  avec  $\forall k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\sigma(k) = i_k$ . Les indices devant être deux à deux distincts, l'application  $\sigma$  correspondante est donc injective. Et donc surjective d'après la chapitre

sur les ensembles finis. Donc choisir des indices  $(i_1, \dots, i_n)$  deux à deux distincts revient à choisir une permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  en posant  $\forall k \in \{1, \dots, n\}, i_k = \sigma(k)$ .

Dans ce cas,

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{k=1}^n a_{k, \sigma(k)} f(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}).$$

Mais ici,  $\mathbb{K}$  est de caractéristique nulle, donc  $f$  est également antisymétrique. Par caractérisation des applications antisymétriques, on a

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, f(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(e_1, \dots, e_n).$$

Donc,

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \left( \prod_{k=1}^n a_{k, \sigma(k)} \right) f(e_1, \dots, e_n) \\ &= \left( \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n a_{k, \sigma(k)} \right) f(\mathcal{B}). \end{aligned}$$

On pose alors

$$\varphi : \begin{array}{ccc} E^n & \rightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n a_{k, \sigma(k)} \end{array}$$

On vient de montrer que

$$\forall f \in \Lambda_n(E), f = f(\mathcal{B})\varphi.$$

Donc  $\Lambda_n(E) \subset \text{Vect}(\varphi)$ . Il suffit donc de montrer que  $\varphi \in \Lambda_n(E)$ .

Les applications coordonnées (qui à  $x$  associe sa coordonnée selon  $e_i$  dans la base  $\mathcal{B}$ ) sont des applications linéaires. Donc  $\varphi$  est la somme de produits de  $n$  applications linéaires et donc est  $n$ -linéaire. De plus,

$$\varphi(\mathcal{B}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n \delta_{k, \sigma(k)} = \prod_{k=1}^n \delta_{k, \text{Id}(k)} = 1$$

donc  $\varphi \neq 0$ . Enfin, si  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{E}^n$  avec  $\forall j \in \{1, \dots, n\}, x_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i$ , alors en prenant  $1 \leq i \neq j \leq n$  et  $\tau = (i j)$  la permutation,

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n a_{k, \sigma(k)} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n a_{\tau(k), \sigma(\tau(k))} && \text{comm} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} -\varepsilon(\sigma \circ \tau) \prod_{k=1}^n a_{\tau(k), \sigma(\tau(k))} \\ &= - \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\gamma) \prod_{k=1}^n a_{\tau(k), \gamma(k)} && \gamma = \sigma \circ \tau \\ &= -\varphi(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(n)}) \end{aligned}$$

et donc  $\varphi$  est alternée. Donc  $\varphi \in \Lambda_n(E)$ .

D'où  $\Lambda_n(E) = \text{Vect}(\varphi)$ . □

**Remarque :**

Le démonstration en dimension 3 se fait bien. Les calculs sont un peu plus lourds, mais il est fortement conseillé de la faire pour bien se familiariser avec la notion de trilinearité.

**Remarque :**

En particulier, deux formes  $n$ -linéaires alternées sur  $\mathbb{K}$ -ev de dimension  $n$  sont toujours proportionnelles.

On notera que la démonstration nous fournit une forme linéaire alternée non nulle explicite. C'est la naissance du déterminant qui apparaît sous nos yeux. Cependant, cette construction dépend du choix d'une base. Donc a priori, les changements de bases vont modifier les choses.

**1.2 Déterminant d'une matrice****Proposition 1.6 (Formule de Sarrus du déterminant d'une matrice) :**

Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

On définit le déterminant de la matrice  $A$ , noté  $\det(A)$ , par

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in \tilde{\mathfrak{S}}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n a_{k,\sigma(k)}.$$

Alors

$$\det : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \rightarrow & \mathbb{K} \\ A & \mapsto & \det(A) \end{array}$$

est une forme  $n$ -linéaire alternée en les colonnes de  $A$  et  $\det(I_n) = 1$ . (i.e. , l'application  $\det : (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))^n \rightarrow \mathbb{K}$  est  $n$ -linéaire alternée).

*Démonstration :*

La démonstration du fait que c'est une forme  $n$ -linéaire alternée est faite au dessus. □

**Remarque :**

Cette formule est un peu compliquée de prime abord, mais elle a de gros avantages. Entre autre, on voit que le déterminant est une fonction polynomiale des coefficients de la matrice et donc est continu. En fait, cette formule permet de tout démontrer très facilement.

**Théorème 1.7 (Existence et unicité du déterminant [✓]) :**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Il existe une unique application  $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$  telle que :

1.  $f$  est linéaire par rapport à chacune des colonnes de sa variable.
2.  $f$  est antisymétrique (ou alternée) par rapport aux colonnes de sa variable.
3.  $f(I_n) = 1$

**Remarque :**

En fait, les deux premières propriétés nous dit que c'est juste une forme  $n$ -linéaire alternée sur  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  et on sait qu'elles sont toutes proportionnelles. En fixant une valeur non nulle, on fixe donc la forme linéaire et il n'y en a plus qu'une qui correspond. C'est à ça que sert le 3ème point.

*Démonstration :*

On sait que  $\Lambda_n(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$  est une droite vectorielle. Ce qui achève la démonstration.

Refaisons la démonstration dans le cas des matrices  $2 \times 2$  pour s'en convaincre : cette démo est donc la version matricielle du théorème sur la droite vectorielle des formes  $n$ -linéaire alternée sur un espace vectoriel de dimension  $n$ . On rajoute la dernière condition pour fixer le coefficient.

Pour montrer l'existence en dimension  $n$ , on a besoin de la formule de Sarrus ci-dessus. On va se contenter de la démo en dimension 2. On pourrait faire la généralisation en dimension 3, mais ça alourdit beaucoup. On le fera éventuellement pour les intéressés et si on a du temps.

On considère l'application

$$\Delta : \begin{matrix} \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) & \rightarrow & \mathbb{K} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & ad - bc \end{matrix}$$

On va montrer que cette application est bilinéaire par rapport aux colonnes de la matrice. Puis qu'elle est alternée (ou antisymétrique) par rapport aux colonnes. Puis que l'image de  $I_2$  est 1. Et enfin, on montrera l'unicité.

Soit donc  $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{K}$ . Alors

$$\begin{aligned} \Delta \begin{pmatrix} a + \alpha & b + \beta \\ c + \gamma & d + \delta \end{pmatrix} &= (a + \alpha)(d + \delta) - (b + \beta)(c + \gamma) \\ &= ad + a\delta + \alpha d + \alpha\delta - bc - b\gamma - \beta c - \beta\gamma \\ &= (ad - bc) + (a\delta - c\beta) + (\alpha d - \gamma b) + (\alpha\delta - \beta\gamma) \\ &= \Delta \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \Delta \begin{pmatrix} a & \beta \\ c & \delta \end{pmatrix} + \Delta \begin{pmatrix} \alpha & b \\ \gamma & d \end{pmatrix} + \Delta \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc  $\Delta$  est bien linéaire par rapport aux colonnes de la matrice. Par ailleurs,

$$\Delta \begin{pmatrix} a & a \\ c & c \end{pmatrix} = ac - ac = 0$$

donc  $\Delta$  est bien alternée ce qui nous donne aussi l'antisymétrie :

$$\Delta \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix} = bc - da = -(ad - bc) = -\Delta \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Puis

$$\Delta(I_2) = \Delta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 - 0 = 1$$

Il reste donc à vérifier l'unicité. Supposons qu'il existe une autre application  $D : \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$  bilinéaire par rapport aux colonnes de la matrice, alternée (ou antisymétrique) et dont l'image de  $I_2$  est 1. On a alors

$$\begin{aligned} D \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= D \left( a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= abD \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + adD(I_2) + bcD \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + cdD \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= ad - bc \\ &= \Delta \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ce qui nous donne donc  $D = \Delta$  et donc l'unicité. □

**Théorème 1.8 (Propriété du déterminant) :**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $C_1, \dots, C_n$  ses colonnes. Alors

1. Si l'une des colonnes de  $A$  est nulle, alors  $\det(A) = 0$
2. Si on permute deux colonnes de  $A$ , alors le déterminant est multiplié par  $-1$ , *i.e.*

$$\det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n) = -\det(C_1, \dots, C_j, \dots, C_i, \dots, C_n)$$

3. Si on multiplie une colonne de  $A$  par un scalaire  $\lambda \in \mathbb{K}$ , alors le déterminant est multiplié par  $\lambda$ , *i.e.*

$$\det(C_1, \dots, C_{i-1}, \lambda C_i, C_{i+1}, \dots, C_n) = \lambda \det(C_1, \dots, C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, \dots, C_n)$$

4. Si on écrit  $C_i = C'_i + C''_i$ , alors le déterminant de  $A$  est la somme des déterminants, *i.e.*

$$\det(C_1, \dots, C_{i-1}, C'_i + C''_i, C_{i+1}, \dots, C_n) = \det(C_1, \dots, C_{i-1}, C'_i, C_{i+1}, \dots, C_n) + \det(C_1, \dots, C_{i-1}, C''_i, C_{i+1}, \dots, C_n)$$

5. Si deux colonnes sont identiques, le déterminant est nul, *i.e.* :

$$\det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_i, \dots, C_n) = 0$$

6. Si on ajoute à une colonne de  $A$  une combinaison linéaire des autres colonnes de  $A$ , le déterminant est inchangé, *i.e.*

$$\det \left( C_1, \dots, C_{i-1}, C_i + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \lambda_k C_k, C_{i+1}, \dots, C_n \right) = \det(C_1, \dots, C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, \dots, C_n)$$

7. Si les colonnes de  $A$  sont liées, alors  $\det A = 0$

Autrement dit :

- Le déterminant d'une matrice dont deux colonnes sont égales est nul
- Le déterminant d'une matrice comportant au moins une colonne nulle est nul
- $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall \lambda \in \mathbb{K}, \det(\lambda M) = \lambda^n \det(M)$ .

**!!! ATTENTION !!!**



On en déduit en particulier que le déterminant **N'EST PAS** linéaire en la matrice ! Dont  $\det(M + N) \neq \det(M) + \det(N)$ . Par exemple

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

*Démonstration :*

Le point 1 est le fait que le déterminant est une forme linéaire. Le point 2, que c'est une antisymétrique (puisque  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ). Le point 3 et 4 est la linéarité par rapport à chacune des colonnes. Le point 5 est le fait que c'est une forme alternée. Le point 6 n'est qu'une conséquence immédiate de la multilinéarité et de "l'alternance". Le point 7 est une conséquence directe du point 6.  $\square$

## 2 Calcul concret du déterminant

On va ici montrer comment calculer concrètement le déterminant. En fait, on va le calculer par récurrence sur la taille de la matrice. C'est une définition récursive qu'on va donner (il y a donc un lien directe avec [python](#) ... )

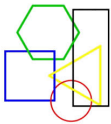
### 2.1 Déterminant $2 \times 2$

On sait que pour une matrice  $2 \times 2$ , le déterminant est donné par

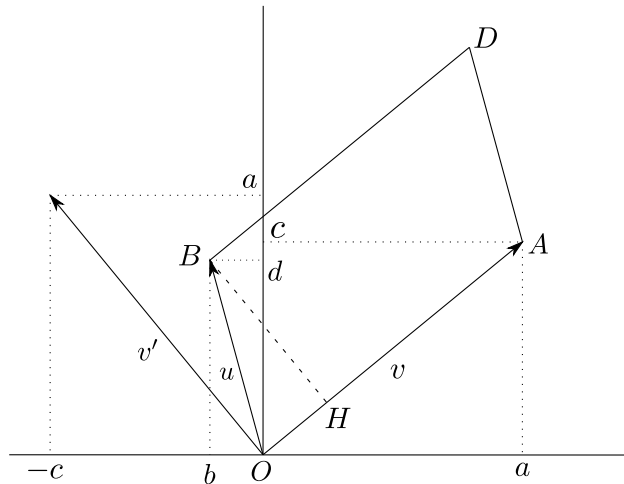
$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

On l'a déjà vu dans la définition du dessus.

Géométriquement, dans  $\mathbb{R}^2$ , le déterminant  $2 \times 2$  correspond à l'aire du parallélogramme défini par les deux vecteurs dont les coordonnées sont les colonnes de la matrice.



Par exemple, si on considère le déterminant  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ , et les deux vecteurs  $v = (a, c)$  et  $u = (b, d)$ . On peut introduire le vecteur  $v' = (-c, a)$  qui est orthogonal à  $v$  et de même norme. Et alors, l'air du parallélogramme devient  $|v' \cdot u| = |\det(u, v)|$ .

**Exemple 2.1 :**

Calculer les déterminants

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$$

**2.2 Déterminant  $3 \times 3$** 

Par la formule de Sarrus, on a

$$\det A = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = ab'c'' + a'b''c + a''bc' - a''b'c - a'bc'' - ab''c'$$

Ce déterminant peut être exprimé à partir de déterminant  $2 \times 2$ . En effet :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} &= a(b'c'' - b''c') - b(a'c'' - a''c') + c(a'b'' - a''b') \\ &= a \begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} a' & a'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{vmatrix} \end{aligned}$$

On peut reconnaître ces trois termes dans le premiers déterminant :

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$$

On dit qu'on a développé le premier déterminant selon la première colonne. Mais on aurait pu développer selon la première ligne aussi :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} &= a(b'c'' - b''c') - a'(bc'' - b''c) + a''(bc' - b'c) \\ &= a \begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} - a' \begin{vmatrix} b & b'' \\ c & c'' \end{vmatrix} + a'' \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} \end{aligned}$$

que l'on peut voir dans le premier déterminant :

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$$

et l'on dit alors qu'on a développé suivant la première ligne.

Bien sûr, vous vous en doutez, si on prend la peine de préciser le numéro de la ligne ou de la colonne suivant laquelle on développe, c'est qu'on a le choix. Par exemple, on va développer suivant la 2ème colonne. Alors

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} &= -a'(bc'' - cb'') + b'(ac'' - a''c) - c'(ab'' - a''b) \\ &= -a' \begin{vmatrix} b & b'' \\ c & c'' \end{vmatrix} + b' \begin{vmatrix} a & a'' \\ c & c'' \end{vmatrix} - c' \begin{vmatrix} a & a'' \\ b & b'' \end{vmatrix} \end{aligned}$$

et bien sûr, on reconnaît :

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$$

Donc pour développer suivant une ligne ou une colonne, on sélectionne cette ligne (ou colonne), puis, successivement, on retire la ligne et la colonne de chaque terme, ce qui nous laisse avec une matrice de taille un de moins. Et on multiplie l'élément de la ligne ou la colonne selon laquelle on développe par le "petit déterminant" qui apparaît. Ces termes sont coefficienté aussi d'un signe.

On notera l'alternance des signes qui apparaît. Pour savoir le signe qu'il faut mettre (outre la formule générale qu'on donnera plus bas), il suffit de remplir une matrice de même taille en alternant les signes et en commençant par un + :

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Il suffit alors de placer le signe correspondant à la place du terme selon lequel on développe.

**Exemple 2.2 :**

Calculer les déterminants

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 10 & 4 & 3 \\ 15 & 8 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & b+c & bc \\ 1 & a+c & ac \\ 1 & a+b & ab \end{vmatrix}$$

**2.3 Déterminant  $n \times n$** 

On définit le déterminant d'une matrice par récurrence à partir de ce qui précède.

Définition 2.1 (Mineurs, Cofacteurs) :

Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

- Soit  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ . On appelle *mineur de  $A$  d'indice  $(i, j)$* , noté  $A_{i,j}$  le déterminant de la matrice  $A$  en enlevant la ligne  $L_i$  et la colonne  $C_j$ .
- Soit  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ . On appelle *cofacteur de  $A$  d'indice  $(i, j)$* , noté  $\Delta_{i,j}(A)$ , le nombre  $\Delta_{i,j}(A) = (-1)^{i+j} A_{i,j}$ .

**Remarque :**

Les signes sont déterminées par la position de l'élément central qu'on supprime (dont on supprime la ligne et la colonne). Le signe correspond donc à la place  $(i, j)$  dans la matrice

$$\left( (-1)^{i+j} \right)_{1 \leq i,j \leq n} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \dots & (-1)^{n+1} \\ -1 & 1 & -1 & \dots & (-1)^{n+2} \\ 1 & -1 & 1 & \dots & (-1)^{n+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n+1} & (-1)^{n+2} & (-1)^{n+3} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

**Proposition 2.1 (Développements par rapport à une ligne ou une colonne) :**

Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

(i) Soit  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Alors

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} A_{i,j} = \sum_{j=1}^n a_{i,j} \Delta_{i,j}(A).$$

La somme  $\sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} A_{i,j}$  s'appelle le *développement de  $\det(A)$  par rapport à la  $i$ -ème ligne*.

(ii) Soit  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Alors

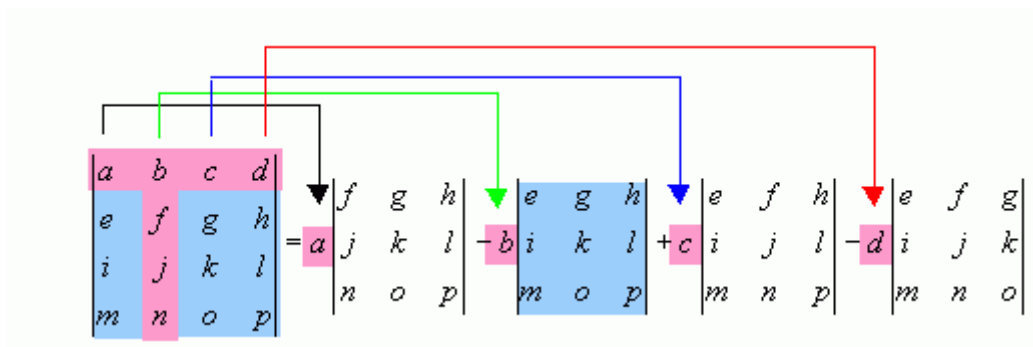
$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} A_{i,j} = \sum_{i=1}^n a_{i,j} \Delta_{i,j}(A).$$

La somme  $\sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} A_{i,j}$  s'appelle le *développement de  $\det(A)$  par rapport à la  $j$ -ème colonne*.

Autrement dit, en développant selon la première colonne, on a

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = a_{1,1}A_{1,1} - a_{2,1}A_{2,1} + \dots + (-1)^{n+1}a_{n,1}A_{n,1} \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i,1} A_{i,1} \end{aligned}$$

En dimension 4, on obtient :



**Remarque :**

On rappelle qu'on peut voir une matrice comme étant simplement la représentation matricielle de ses vecteurs colonnes. Dans ce cas, le déterminant est alors une application de  $n$  variables dont chacune d'elle est un vecteurs de  $\mathbb{K}^n$ . On va avoir besoin de ce point de vue. Il va nous permettre entre autre d'étendre la notion de déterminant à espace vectoriels de dimension finie quelconque, et plus seulement aux matrices .

**Remarque :**

Plus une ligne ou une colonne contiendra de 0 et moins le développement par rapport à cette ligne ou colonne aura de terme. Donc, l'un des buts, lors du calcul d'un déterminant, est d'essayer de fabriquer, à l'aide des propriétés du déterminant, une ligne ou colonne avec un maximum de 0, puis développer selon cette ligne ou colonne, par se ramener à des déterminants plus petits et en petit nombre.

*Démonstration :*

On rappelle

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, C_j(A) = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n a_{i,j} E_i$$

où  $(E_1, \dots, E_n)$  est la base canonique de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ .

Soit  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Par linéarité de  $\det$  par rapport à la  $j$ -ème colonne, on a donc

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det \left( C_1, \dots, C_{j-1}, \sum_{i=1}^n a_{i,j} E_i, C_{j+1}, \dots, C_n \right) \\ &= \sum_{i=1}^n a_{i,j} \det(C_1, \dots, C_{j-1}, E_i, C_{j+1}, \dots, C_n) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( a_{i,j} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n a_{k, \sigma(k)}^{(i)} \right) \end{aligned}$$

où les coefficients de la matrice  $(C_1, \dots, C_{j-1}, E_i, C_{j+1}, \dots, C_n)$  sont notés  $(a_{k,\ell}^{(i)})_{1 \leq k, \ell \leq n}$  avec

$$\forall k, \ell \in \{1, \dots, n\}, a_{k,\ell}^{(i)} = \begin{cases} a_{k,\ell} & \ell \neq j \\ \delta_{k,i} & \ell = j \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{i=1}^n \left( a_{i,j} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n a_{\sigma^{-1}(k),k}^{(i)} \right) && \text{comm} \\ &= \sum_{i=1}^n \left( a_{i,j} \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \sigma^{-1}(j)=i}} \varepsilon(\sigma) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n a_{\sigma^{-1}(k),k} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( a_{i,j} \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \sigma(i)=j}} \varepsilon(\sigma) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n a_{k, \sigma(k)} \right) \end{aligned}$$

Fixons  $i \in \{1, \dots, n\}$ . On note  $\tau_i = (i \ i+1 \ \dots \ n) \in \mathfrak{S}_n$  et  $\tau_j = (j \ j+1 \ \dots \ n) \in \mathfrak{S}_n$  des permutations circulaires. Si  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , avec  $\sigma(i) = j$ , alors  $\tau_j^{-1} \circ \sigma \circ \tau_i \in \mathfrak{S}_n$  et  $\tau_j^{-1} \circ \sigma \circ \tau_i(n) = \tau_j^{-1}(\sigma(i)) = \tau_j^{-1}(j) = n$ . Donc  $n$  est un point fixe. Et donc  $\tau_j^{-1} \circ \sigma \circ \tau_i \in \mathfrak{S}_{n-1}$ .

Réciproquement, si  $\sigma \in \mathfrak{S}_{n-1}$ , alors  $\tau_j \circ \sigma \circ \tau_i^{-1} \in \mathfrak{S}_n$  envoyant  $i$  sur  $j$  (en étendant par l'identité les permutations).

Alors

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{i=1}^n \left( a_{i,j} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n-1}} \varepsilon(\tau_j \circ \sigma \circ \tau_i^{-1}) \prod_{k=1}^{n-1} a_{k, \tau_j \circ \sigma \circ \tau_i^{-1}(k)} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( a_{i,j} (-1)^{i+j} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n-1}} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n-1} a_{k, \tau_j \circ \sigma \circ \tau_i^{-1}(k)} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n a_{i,j} (-1)^{i+j} \det(C_1^{(i)}, \dots, C_{j-1}^{(i)}, C_{j+1}^{(i)}, \dots, C_n^{(i)}) \\ &= \sum_{i=1}^n a_{i,j} (-1)^{i+j} A_{i,j} \end{aligned}$$

où  $C_k^{(i)}$  est la  $k$ -ème colonne de  $A$  à laquelle on a enlevé le  $i$ -élément. □

**Exemple 2.3 :**

Calculer

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

### 3 Propriétés algébriques du déterminant

On va donner toutes les propriétés du déterminant. Y compris celles qu'on a déjà vue. On va se répéter, mais comme ça, tout sera rassemblé. C'est plus pratique. Et se répéter ne peut pas être une mauvaise idée.

#### 3.1 Déterminant de matrice particulières

**Proposition 3.1 (Déterminant d'une transposée) :**

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det(A) = \det({}^t A)$$

*Démonstration :*

Par récurrence sur la taille de  $A$ . Pour  $n = 1$  ou  $2$ , ça fonctionne. Supposons que ça marche encore pour toute matrice de taille  $(n-1) \times (n-1)$ . On considère donc une matrice  $A$  de taille  $n \times n$ . On va noter  $a'_{i,j}$  les éléments de  ${}^tA$  et  $A'_{i,j}$  les cofacteurs de  ${}^tA$ . Alors, en développant par rapport à la première colonne par exemple, on a

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i,1} A_{i,1} \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a'_{1,i} A'_{1,i} \\ &= \det({}^tA) \end{aligned}$$

□

**Remarque :**

En d'autres termes, on pourra effectuer des opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes pour donner une forme agréable à la matrice pour pouvoir calculer son déterminant. Attention au coefficient qui apparaissent dans les combinaisons linéaires ! Par exemple, faire  $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$  ne change pas le déterminant, mais  $L_2 \leftarrow L_1 - L_2$  le multiplie par  $-1$ .

**Proposition 3.2 (Déterminant d'une matrice diagonale) :**

Soit  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ .

Alors

$$\det(\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \prod_{k=1}^n \lambda_k$$

*Démonstration :*

Encore par récurrence sur  $n$ . Pour  $n = 2$ , ça fonctionne. Supposons que ça fonctionne pour un certain  $n \geq 2$ . On considère donc  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{K}$ . En développant suivant la dernière ligne par exemple, on trouve

$$\begin{aligned} \det(\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1})) &= \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{n+j+1} a_{n+1,j} \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1})_{n+1,j} \\ &= \lambda_{n+1} \det(\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) \\ &= \prod_{k=1}^{n+1} \lambda_k \end{aligned}$$

□

**Proposition 3.3 (Déterminant d'une matrice triangulaire) :**

Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ .

Alors

$$\det A = \prod_{i=1}^n a_{i,i}$$

*Démonstration :*

On va traiter seulement le cas triangulaire supérieure. Et on va le faire par récurrence. Encore.

Pour  $n = 2$ , tout se passe bien, c'est facile. Supposons que ça fonctionne pour des matrices triangulaires supérieures de taille  $n$  pour un certain  $n \geq 2$ . Soit  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{T}_{n+1}^+(\mathbb{K})$ . On va développer suivant la première colonne (celle avec le plus de 0). Donc

$$\det A = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} a_{i,1} A_{i,1} = a_{1,1} A_{1,1}$$

et

$$A_{1,1} = \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n+1} \\ 0 & a_{3,3} & \dots & a_{3,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix}$$

qui est donc le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure de taille  $n$ . Et l'hypothèse de récurrence finit la démo.  $\square$

Moralité, pour calculer un déterminant, on fera toujours des combinaisons linéaires sur les lignes et/ou les colonnes (en prenant garde au coefficients), des permutations sur les lignes et/ou les colonnes (attention aux signes) pour triangulariser la matrices. Et alors, c'est simplement le produit des termes de la diagonale.

Ou alors, on développera selon une rangée pour réduire la taille des matrices. Et tant qu'à faire, on choisira une rangée avec un maximum de 0 pour annulé un maximum de termes.

**Proposition 3.4 :**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$$

*Démonstration :*

On le sait déjà.  $\square$

L'idée essentielle donc, pour calculer un déterminant, est de faire des opérations élémentaires sur



2. On a

$$I_n + (\lambda - 1)E_{i,i} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \lambda & \dots \\ & & & & 1 & \\ (0) & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \leftarrow i$$

Donc c'est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont tous non nuls.

3. On a  $\mathcal{E}_{i,j}^2 = I_n$ . Donc  $\mathcal{E}_{i,j}$  est inversible (et  $\mathcal{E}_{i,j}^{-1} = \mathcal{E}_{i,j}$ ).

□

On rappelle :

**Proposition 3.6 :**

Soit  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ .

Alors  $\forall k, \ell \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$AE_{\ell,k} = \begin{pmatrix} & k & \\ & \downarrow & \\ (0) & a_{1,\ell} & (0) \\ & \vdots & \\ & a_{p,\ell} & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & C_\ell(A) & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

et

**Proposition 3.7 :**

Soit  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ .

Alors  $\forall k, i \in \{1, \dots, p\}$ ,

$$E_{k,i}A = \begin{pmatrix} & & & \\ & (0) & & \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,n} & \\ & & & \\ & & & (0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ L_i(A) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow k$$

**Proposition 3.8 (Opérations élémentaires sur les colonnes) :**

Soit  $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ .

1. Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$  et  $1 \leq i \neq j \leq n$ , alors  $A(I_n + \lambda E_{i,j})$  est obtenue en ajoutant  $\lambda$  fois la  $i$ -ème colonne de  $A$  à la  $j$ -ème colonne de  $A$ .

On note cette manipulation  $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$ .

2. Soit  $\lambda \in \mathbb{K}^*$  et  $1 \leq i \leq n$ . La matrice  $A(I_n + (\lambda - 1)E_{i,i})$  est la matrice obtenue en multipliant la  $i$ -ème colonne de  $A$  par  $\lambda \neq 0$ .

On note cette manipulation  $C_i \leftarrow \lambda C_i$ .

3. Soit  $1 \leq i \neq j \leq n$ . La matrice  $A\mathcal{E}_{i,j}$  est obtenue en échangeant la  $i$ -ème colonne et la  $j$ -ème colonne.

On note cette manipulation  $C_i \leftrightarrow C_j$ .

De même avec les opérations élémentaires sur les lignes.

**Lemme 3.9 (Déterminant et opération élémentaire sur les lignes et les colonnes) :**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall i \neq j \in \{1, \dots, n\}, \det(A(I_n + \lambda E_{i,j})) = \det((I_n + \lambda E_{i,j})A) = \det(A)$$

et

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}^*, \forall i \in \{1, \dots, n\}, \det(A(I_n + (\lambda - 1)E_{i,i})) = \det((I_n + (\lambda - 1)E_{i,i})A) = \lambda \det(A)$$

et

$$\forall i \neq j \in \{1, \dots, n\}, \det(A\mathcal{E}_{i,j}) = \det(\mathcal{E}_{i,j}A) = -\det(A)$$

*Démonstration :*

Soit  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Alors on a

$$\det(A(I_n + \lambda E_{i,j})) = \det(C_1(A), \dots, C_i(A) + \lambda C_j(A), \dots, C_n(A)) = \det(A)$$

et

$$\det(A(I_n + (\lambda - 1)E_{i,i})) = \det(C_1(A), \dots, \lambda C_i(A), \dots, C_n(A)) = \lambda \det(A)$$

et

$$\begin{aligned} \det(A\mathcal{E}_{i,j}) &= \det(C_1(A), \dots, C_j(A), \dots, C_i(A), \dots, C_n(A)) \\ &= -\det(C_1(A), \dots, C_i(A), \dots, C_j(A), \dots, C_n(A)) \\ &= -\det(A) \end{aligned}$$

Grâce à l'invariance du déterminant par transposition, on obtient la même chose en multipliant à gauche.  $\square$

**Exemple 3.1 :**

Calculer

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

**3.3 Déterminant et produit matriciel****Théorème 3.10 (Déterminant d'un produit) :**

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det(AB) = \det(A) \det(B)$$

*Démonstration :*

Supposons d'abord que  $B$  ne soit pas inversible. Alors dans ce cas  $\text{rg}(AB) \leq \text{rg} B < n$ . Donc  $AB$  n'est pas non plus inversible. Mais dans ce cas, les colonnes de  $AB$  et les colonnes de  $B$  sont liées. Alors  $\det(AB) = 0$  et  $\det(B) = 0$ . Donc  $\det(AB) = 0 = \det(A) \det(B)$ . On a donc égalité. On se place donc désormais dans le cas où  $B$  est inversible.

Comme  $B$  est inversible, sa transposée  ${}^tB$  l'est également. L'algorithme du Pivot de Gauss nous permet, en faisant des opérations élémentaires sur les lignes de  ${}^tB$  de transformer  ${}^tB$  en une matrice triangulaire supérieure. L'algorithme n'utilise que des inversions de lignes ou l'ajout à une ligne  $\lambda$  fois une autre. Autrement dit, on ne fait que multiplier par des  $\mathcal{E}_{i,j}$  ou des  $I_n + \lambda E_{i,j}$ .

Via la transposition, cela revient à multiplier  $B$  à droite par des matrices d'opérations élémentaires donc, on applique l'algorithme du pivot de Gauss sur les colonnes de  $B$  pour transformer  $B$  en une matrice triangulaire inférieure.

Quitte à continuer l'algorithme de pivot de Gauss "en remontant" et à diviser par les pivots, on peut donc transformer  $B$  en  $I_n$  (cf chapitre sur les systèmes linéaires).

Donc il existe une matrice  $Q$  inversible telle que  $BQ = I_n$ . Et  $Q$  sera le produit de matrices élémentaires de la forme  $\mathcal{E}_{i,j}$  avec  $i \neq j$  ou  $I_n + \lambda E_{i,j}$  avec  $\lambda \in \mathbb{K}$  et  $i \neq j$  ou encore  $I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$  avec  $\lambda \in \mathbb{K}^*$ . On note  $E_1, \dots, E_p$  ces matrices. Donc  $Q = E_1 \times \dots \times E_p$  et  $I_n = BQ$ .

Mais la proposition précédente nous permet de calculer  $\det(BQ)$ . En fait, en multipliant par  $E_k$ , le déterminant est multiplié par  $\lambda_k$  avec  $\lambda_k = 1$  si  $E_k = I_n + \lambda E_{i,j}$ ,  $\lambda_k = -1$  si  $E_k = \mathcal{E}_{i,j}$  ou  $\lambda_k = \lambda \neq 0$  si  $E_k = I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$ . Donc  $\det(BE_1) = \lambda_1 \det(B)$ . Et bien sûr  $\det(BE_1E_2) = \lambda_2 \det(BE_1) = \lambda_1 \lambda_2 \det(B)$ . Puis par une récurrence facile,  $\det(BQ) = \det(BE_1 \times \dots \times E_p) = \lambda_1 \dots \lambda_p \det(B)$ . Mais  $BQ = I_n$ , et comme  $\det(I_n) = 1$ , on en déduit donc  $\det(B) = \frac{1}{\lambda_1 \dots \lambda_p}$ .

Et par associativité,  $(AB)Q = A(BQ) = A$ .

Là encore, la même récurrence que dans le paragraphe précédent nous permet d'avoir  $\det(ABQ) =$

$\lambda_1 \dots \lambda_p \det(AB)$ . Mais d'un autre côté,  $\det(ABQ) = \det(A)$ . Donc

$$\det(AB) = \det(A) \frac{1}{\lambda_1 \dots \lambda_p} = \det(A) \det(B)$$

□

**Remarque :**

On notera que les trois premiers paragraphes permettent également de démontrer que le déterminant d'une matrice est non nul si et seulement si la matrice est inversible.

**Corollaire 3.11 :**

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall p \in \mathbb{N}, \det(A^p) = \det(A)^p$$

*Démonstration :*

Très facile avec la proposition précédente.

□

**Proposition 3.12 (Déterminant et conjugaison complexe) :**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Alors

$$\det(\overline{A}) = \overline{\det A}$$

*Démonstration :*

On va le faire par récurrence sur  $n$ . Pour  $n = 1$  ou  $2$ , c'est pas dur. Supposons que la formule soit vraie pour toute matrice de taille  $(n - 1) \times (n - 1)$ .

Soit  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On va développer suivant la première colonne (par exemple)

$$\begin{aligned} \det(\overline{A}) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \overline{a_{i,1}} (\overline{A})_{i,1} \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \overline{a_{i,1}} \overline{A_{i,1}} \\ &= \overline{\det A} \end{aligned}$$

□

**Exemple 3.2 :**

Soit  $n \geq 2$ . On pose  $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$  et  $A = \left( \omega^{(k-1)(j-1)} \right)_{1 \leq j, k \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Calculer  $|\det(A)|$ .

**3.4 Déterminant et inversibilité**

C'est l'intérêt essentiel du déterminant.

**Théorème 3.13 (Caractérisation d'inversibilité par le déterminant [✓]) :**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors

$$A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det(A) \neq 0$$

et dans ce cas  $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$

*Démonstration :*

Si  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ , alors  $1 = \det(AA^{-1}) = \det(A) \det(A^{-1})$  d'où  $\det A \neq 0$  et  $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$ .

Réciproquement, si  $\det A \neq 0$ , alors les colonnes de  $A$  sont linéairement indépendantes. Donc elles forment une famille libre de  $n$  vecteurs, donc une base de  $\mathbb{K}^n$ . Donc la matrice  $A$  est inversible.  $\square$

Inutile de préciser que ce théorème est absolument indispensable.

**Remarque :**

On peut alors, rétrospectivement, montrer facilement que les matrices d'opérations élémentaires sont inversibles. C'est beaucoup plus pratique.

**Exemple 3.3 :**

Parmi les matrices suivantes, déterminer celles qui sont des matrices inversibles :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & \alpha \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$$

### 3.5 Déterminant par blocs

**Proposition 3.14 (Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs) :**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ . Alors

$$\begin{vmatrix} A & * \\ 0_{p,n} & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0_{n,p} \\ * & B \end{vmatrix} = \det(A) \det(B).$$

Ce résultat se généralise à des matrices triangulaires par blocs avec plus de blocs.

*Démonstration :*

En remarquant que

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0_{p,n} & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ 0_{n,p} & I_p \end{pmatrix}$$

puis en développant le déterminant selon les lignes ou colonnes, on a le résultat.  $\square$

!!! ATTENTION !!!



$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \neq \det(A) \det(D) - \det(C) \det(B)$$

même si les matrices sont toutes carrées ! Ce n'est pas non plus  $\det(AD - BC)$ . Aucune formule n'est valable en général. Seul le cas des matrices *triangulaire par blocs* fonctionne.

### 3.6 Cas des déterminants de Vandermonde

Définition 3.2 (Matrice de Vandermonde) :

Soit  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ .

On appelle *matrice de Vandermonde* en  $(x_1, \dots, x_n)$ , la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

**Proposition 3.15 (Déterminant de Vandermonde) :**

Soit  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ . Alors

$$V(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

*Démonstration :*

**Première méthode : récurrence**

On effectue les opérations élémentaires sur les colonnes  $C_j \leftarrow C_j - x_n C_{j-1}$  pour  $2 \leq j \leq n$  et en commençant par la dernière colonne :

$$v(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 - x_n & x_1(x_1 - x_n) & \dots & x_1^{n-2}(x_1 - x_n) \\ 1 & x_2 - x_n & x_2(x_2 - x_n) & \dots & x_2^{n-2}(x_2 - x_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Puis, en développant selon la dernière ligne, on a

$$\begin{aligned} V(x_1, \dots, x_n) &= (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} x_1 - x_n & x_1(x_1 - x_n) & \dots & x_1^{n-2}(x_1 - x_n) \\ x_2 - x_n & x_2(x_2 - x_n) & \dots & x_2^{n-2}(x_2 - x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n-1} - x_n & x_{n-1}(x_{n-1} - x_n) & \dots & x_{n-1}^{n-2}(x_{n-1} - x_n) \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} (x_k - x_n) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-2} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix} \\ &= \prod_{k=1}^{n-1} (x_n - x_k) V(x_1, \dots, x_{n-1}). \end{aligned}$$

et on termine la récurrence.

**Deuxième méthode : avec des polynômes**

On pose  $P(X) = V(x_1, \dots, x_{n-1}, X)$ . Donc

$$P(X) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} \\ 1 & X & \dots & X^{n-1} \end{vmatrix}$$

En développant selon la dernière ligne, on obtient donc

$$P(X) = \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} D_{n,j} X^{j-1}$$

où  $D_{n,j}$  ne contient pas de  $X$ . Donc  $P \in \mathbb{R}[X]$  et  $\deg(P) \leq n-1$ .

De plus,  $\forall k \in \{1, \dots, n-1\}$ ,  $\tilde{P}(x_k) = 0$ . En effet, on a alors 2 lignes identiques et donc le déterminant est nul.

Si  $\exists 1 \leq i, j \leq n-1$  tel que  $x_i = x_j$ , alors  $P(X) = 0$ ,  $V(x_1, \dots, x_n) = 0$  et le produit est nul aussi. Supposons  $(x_1, \dots, x_{n-1})$  deux à deux distincts. Alors  $P$  a  $n-1$  racines distinctes. Donc  $P$  est scindé à racines simples et  $P(X) = \lambda \prod_{k=1}^{n-1} (X - x_k)$ , où  $\lambda$  est le coefficient dominant de  $P$ . Et donc

$$\lambda = D_{n,n} = V(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Donc  $P(X) = V(x_1, \dots, x_{n-1}) \prod_{k=1}^{n-1} (X - x_k)$ . Et donc, on en déduit immédiatement,

$$V(x_1, \dots, x_n) = \tilde{P}(x_n) = V(x_1, \dots, x_{n-1}) \prod_{k=1}^{n-1} (x_n - x_k).$$

Puis on termine par récurrence. □

**Remarque :**

En particulier, le déterminant de Vandermonde  $V(x_1, \dots, x_n)$  est non nul, si et seulement si,  $(x_1, \dots, x_n)$  sont deux à deux distincts.

**Exemple 3.4 :**

Calculer le rang de

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 8 & 9 & 4 \\ 1 & 131 & 132 & 8 \end{pmatrix}$$

**Exemple 3.5 :**

Si on considère  $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  deux à deux distincts et  $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ , trouver le polynôme interpolateur de Lagrange en les points  $((x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n))$  revient à calculer des déterminant de Vandermonde.

## 4 Retour à la généralisation vectorielle

On aurait pu commencer directement par la généralisation à partir de l'introduction théorique du déterminant, puis on en aurait déduits le calcul sur les matrices et toutes les propriétés en auraient découlées. Il me semble plus aisé de prendre le point de vu inverse et de commencer par étudier les matrices qui permettent de mieux "voir" ce qui se passe, puis d'étendre les propriétés du déterminant matriciel au déterminant vectoriel.

### 4.1 Déterminant d'une famille de vecteurs

On rappelle que si  $E$  est de dimension  $n$ , alors  $\Lambda_n(E)$ , l'ensemble des formes  $n$ -linéaires alternées sur  $E$ , est une droite vectorielle.

En particulier,

**Définition-Propriété 4.1 (Déterminant d'une famille de vecteurs relativement à une base) :**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension  $n$  et  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ .

Alors il existe une unique forme  $n$ -linéaire sur  $E$  envoyant  $\mathcal{B}$  sur 1. On la note  $\det_{\mathcal{B}}$ .

Plus précisément, si  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ , on définit le déterminant de la famille  $(x_1, \dots, x_n)$  relativement à la base  $\mathcal{B}$  comme le déterminant de la matrice de la famille  $(x_1, \dots, x_n)$  dans la base  $\mathcal{B}$ , autrement dit,

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n))$$

**Théorème 4.1 (Changement de bases) :**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie  $n$ ,  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  deux bases de  $E$  et  $(x_1, \dots, x_n)$  une famille de vecteurs de  $E$ . Alors

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \det_{\mathcal{B}'}(x_1, \dots, x_n)$$

*Démonstration :*

Par la formule de changement de base,

$$\begin{aligned}\det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)) &= \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(x_1, \dots, x_n)) \\ &= \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')) \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(x_1, \dots, x_n))\end{aligned}$$

□

**Proposition 4.2 :**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev et  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ .

Alors

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$$

*Démonstration :*

C'est parce que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = I_n$ .

□

**Proposition 4.3 (Caractérisation des bases par le déterminant) :**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie  $n$ ,  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  et  $\mathcal{C}$  une famille de  $n$  vecteurs de  $E$ .

$\mathcal{C}$  est une base de  $E$  si et seulement si  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) \neq 0$

*Démonstration :*

Supposons que  $\mathcal{C}$  est une base de  $E$ . Alors, par la formule de changement de base précédente, on a

$$1 = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) \det_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$$

donc  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) \neq 0$  et  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = \frac{1}{\det_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})}$

Inversement, si  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) \neq 0$ , alors  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ . Donc les colonnes de  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$  est une base de  $\mathbb{K}^n$  et donc les vecteurs qu'ils représentent forment une base de  $E$ . □

**Remarque :**

Par contraposée, on a  $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = 0 \iff (x_1, \dots, x_n)$  liée. Ce qu'on savait déjà sur les colonnes des matrices. Ce n'est que la version vectorielle.

**Remarque :**

On notera que si  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  sont deux bases de  $E$ , alors  $\det_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})^{-1}$ .

**Exemple 4.1 :**

Les vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  suivants sont-ils linéairement indépendants ?

$$u = (1, -1, 2), \quad v = (2, -1, -1), \quad w = (1, 2, 1)$$

**4.2 Déterminant d'un endomorphisme**

Définition 4.2 (Déterminant d'un endomorphisme) :

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie  $n$ ,  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ .

On appelle déterminant de  $f$  le scalaire

$$\det f = \det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B})) = \det \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$$

**Théorème 4.4 (Indépendance du choix de la base du déterminant d'un endomorphisme [✓]) :**

Le déterminant d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie ne dépend pas du choix de la base dans lequel on calcul le déterminant.

Autrement dit, si  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie  $n$ ,  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de  $E$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$ , alors

$$\det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u))$$

*Démonstration :*

On va utiliser la formule de changement de base :

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}'}(u(\mathcal{B}')) &= \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u(\mathcal{B}'))) \\ &= \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}'}(u)) \\ &= \det \left( \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{Id}_E) \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(u) \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\text{Id}_E) \right) \\ &= \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})) \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B}))) \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')) \\ &= \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B})) \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \\ &= \det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B})) \end{aligned}$$

□

Ce qui justifie a posteriori le choix des termes de la définition (et qu'aucune base n'apparaisse dans la définition).

**Remarque :**

Donc la matrice d'un endomorphisme correspond au déterminant de sa matrice dans n'importe quelle base. Donc tous ce qu'on sait sur les matrices s'applique sur les endomorphismes.

**Exemple 4.2 :**

On définit  $f$  sur  $\mathbb{R}_2[X]$  par  $f(P) = (X^2 + X + 1)P''(X) + XP'(X) - 2XP(X)$ . Déterminer la matrice de  $f$  dans la base canonique puis dans la base  $(X^2, X, 1 + X + X^2)$ . Calculer le déterminant de ces deux matrices.

**Proposition 4.5 :**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie.

$$\det(\text{Id}_E) = 1$$

*Démonstration :*

Pas dur. □

**Proposition 4.6 :**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie. Alors

$$\forall u \in \mathcal{L}(E), \forall \lambda \in \mathbb{K}, \det(\lambda u) = \lambda^n \det(u)$$

*Démonstration :*

Avec tout ce qu'on sait faire sur les matrices, c'est pas dur. □

**!!! ATTENTION !!!**



$$\det(\lambda u + \mu v) \neq \lambda^n \det(u) + \mu^n \det(v)$$

Le déterminant se comporte très mal par rapport à l'addition. On le sait déjà sur les matrices, c'est toujours valable sur les endomorphismes.

**Théorème 4.7 (Déterminant d'une composée) :**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie.

$$\forall u, v \in \mathcal{L}(E), \det(u \circ v) = \det(u) \det(v)$$

*Démonstration :*

Il faut revenir à la définition. Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ .

$$\begin{aligned} \det(u \circ v) &= \det_{\mathcal{B}}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u \circ v)) \\ &= \det_{\mathcal{B}}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v)) \\ &= \det_{\mathcal{B}}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)) \det_{\mathcal{B}}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v)) \\ &= \det(u) \det(v) \end{aligned}$$

□

**Remarque :**

Et donc également,  $\det : (\text{GL}(E), \circ) \rightarrow (\mathbb{K}^*, \times)$  est un morphisme de groupe.

**Corollaire 4.8 :**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finies,

$$\forall u \in \mathcal{L}(E), \forall p \in \mathbb{N}, \det(u^p) = \det(u)^p$$

**Théorème 4.9 (Caractérisation des automorphismes par le déterminant) :**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Alors on a équivalence entre

(i)  $u \in \text{GL}(E)$

(ii)  $\det(u) \neq 0$

et dans ce cas  $\det(u^{-1}) = \frac{1}{\det u}$

*Démonstration :*

Cela vient du résultat équivalent sur les matrices. □

**Exemple 4.3 :**

L'endomorphisme suivant est-il un automorphisme ?

$$u : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

$$(x, y, z, t) \mapsto (2x + y + z, x - t + y, 2z - 2x + t, y + 2z - t)$$

## 5 Applications

Ce ne sont pas les seules applications du déterminant. Vous en verrez d'autres l'année prochaine bien plus intéressantes que celles présentées ici.

### 5.1 Systèmes de Cramer

**Définition 5.1 (Système de Cramer) :**

On appelle système de Cramer toute équation en  $X$  de la forme  $AX = B$  où  $A \in GL_n(\mathbb{K})$ ,  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ .

**Théorème 5.1 (Solution d'un système de Cramer) :**

Soit  $A \in GL_n(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ . Si  $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ , le système de Cramer  $AX = B$  a une unique solution donnée par

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}}$$

*Démonstration :*

Comme  $\det A \neq 0$ , la matrice est inversible et donc il existe une unique solution qui sera  $A^{-1}B$ . Si  $C_1, \dots, C_n$  sont les colonnes de  $A$ , alors on a

$$AX = \sum_{k=1}^n x_k C_k = B$$

Alors  $\det A = \det(C_1, \dots, C_n)$ . Si  $j \in \{1, \dots, n\}$ , la linéarité du déterminant par rapport à la  $j$ -ème variable nous donne

$$\begin{aligned} \det(C_1, \dots, C_{j-1}, B, C_{j+1}, \dots, C_n) &= \det\left(C_1, \dots, C_{j-1}, \sum_{k=1}^n x_k C_k, C_{j+1}, \dots, C_n\right) \\ &= \sum_{k=1}^n x_k \det(C_1, \dots, C_{j-1}, C_k, C_{j+1}, \dots, C_n) \\ &= x_j \det(C_1, \dots, C_n) \\ &= x_j \det A \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat puisque  $\det A \neq 0$ . □

**Exemple 5.1 :**

Considérons le système

$$\begin{cases} ax + y = 1 \\ 2x + (1 + a)y = 1 \end{cases}$$

Résoudre le système.

**Exemple 5.2 :**

Considérons le système

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases}$$

avec  $a, b, c \in \mathbb{R}$  deux à deux distincts.

Résoudre ce système.

## 5.2 Comatrice

On a vu ce qu'étaient les cofacteurs. À partir des cofacteurs d'une matrice  $A$ , on peut définir la comatrice :

Définition 5.2 (Comatrice) :

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

On appelle comatrice de  $A$ , noté  $\text{com}(A)$  la matrice

$$\text{com}(A) = ((-1)^{i+j} A_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

composé des cofacteurs de la matrice  $A$ .

### Exemple 5.3 :

Donner la comatrice de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

et de la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

### Théorème 5.2 (Expression de l'inverse d'une matrice) :

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors

$${}^t(\text{com}(A))A = A{}^t(\text{com}(A)) = \det(A)I_n$$

*Démonstration :*

On pose  $\text{com}(A) = (b_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$  et  ${}^t\text{com}(A)A = (c_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ . Alors

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, c_{i,j} = \sum_{k=1}^n b_{k,i} a_{k,j} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+i} A_{k,i} a_{k,j}.$$

En particulier,

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, c_{i,i} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+i} a_{k,i} A_{k,i} = \det(A)$$

car c'est le développement de  $\det(A)$  par rapport à la  $i$ -ème colonne. Donc tous les éléments diagonaux de  ${}^t\text{com}(A)A$  sont  $\det(A)$ .

Soit  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  avec  $i \neq j$ . L'expression de  $c_{i,j}$  ressemble au développement d'un déterminant. On considère la matrice  $A^{(i,j)}$  dont les colonnes sont les mêmes que celles de  $A$  sauf la  $i$ -ème qui a été remplacé par la  $j$ -ème colonne de  $A$ . Autrement dit,

$$A^{(i,j)} = \text{Mat}(C_1, \dots, C_{i-1}, C_j, C_{i+1}, \dots, C_n).$$

Alors  $\det(A^{(i,j)}) = 0$ . Et en développant ce dernier déterminant selon la  $i$ -ème colonne, on obtient :

$$0 = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{k,j} A_{i,k}$$

Et donc finalement,  ${}^t\text{com}(A)A = \det(A)I_n$ . □

### Corollaire 5.3 :

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

$$A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det(A) \neq 0 \quad \text{et} \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t(\text{com}(A)).$$

### Exemple 5.4 :

Donner l'inverse de  $A$  si

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

en supposant bien sûr que la matrice est inversible.

Donner l'inverse de la matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

### Exemple 5.5 :

Soit  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ .

1. Montrer que  $\det(\text{com}(A)) = \det(A)^{n-1}$ .
2. En déduire  $\text{com}(\text{com}(A))$ .

**Remarque :**

On rappelle que le rang d'une matrice est également la taille de la plus grande sous-matrice inversible extraite de  $A$ . Et pour montrer qu'une matrice est inversible, on peut utiliser le déterminant. Donc le rang, c'est aussi la taille de la plus grande sous-matrice de  $A$  de déterminant non nul.

**5.3 Information matricielle**

Grâce aux propriétés qu'on connaît bien maintenant, le déterminant permet entre autres, de détecter des familles libres de vecteurs. Mais du coup, il permet aussi de détecter des bases. Si on prend  $n$  vecteurs d'un  $ev$  de dimension  $n$  et que le déterminant de ces vecteurs dans une base quelconque est non nul, la famille est libre et c'est donc une base de l'espace vectoriel grâce à la caractérisation des bases en dimension finie.

Le déterminant permet donc aussi de détecter des isomorphismes. Il suffit que l'image d'une base soit une famille libre, donc de déterminant non nul.

De même, il permet de pouvoir donner le rang d'une famille assez facilement dans certains cas. Si le déterminant d'une famille de vecteurs est non nul, c'est que la famille est libre et donc de rang maximal.

Bref, on peut relier le déterminant à toutes les petites propriétés symaps d'algèbre linéaire qu'on aime bien. Il est bon de savoir utiliser le déterminant comme ça.