Chapitre 24 - TD :
Déterminants

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

mardi 7 avril, 2026

1 Calcul de déterminant

Exercice 1 :
Mettre sous forme factorisée les déterminants suivant

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos a & \cos b & \cos c \\ \sin a & \sin b & \sin c \end{vmatrix}$$

Exercice 2 :
Calculer

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

et en déduire, en utilisant la multilinéarité du déterminant :

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & a+c \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & a^2+c^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & a^3+c^3 \end{vmatrix}$$

Exercice 3 :
Soit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. Calculer $\det(a_{\max(i,j)})_{1\leq i,j\leq n}$.

En déduire $\det(\max(i,j))_{1\leq i,j\leq n}$ et $\det(\min(i,j))_{1\leq i,j\leq n}$.

Exercice 4 :

Soit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. Calculer

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a_2 \\ (a_1) & & & a_1 \end{vmatrix}$$

Exercice 5 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$\forall k \in \{1, \dots, n\},\ S_k = \sum_{i=1}^{k} i$$

Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} S_1 & S_1 & S_1 & \dots & S_1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & \dots & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \dots & S_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \dots & S_n \end{vmatrix}$$

Exercice 6 ([✓]) :

Calculer

$$\begin{vmatrix} a & & (b) \\ & \ddots & \\ (b) & & a \end{vmatrix}$$

En déduire

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & n & n-1 & \dots & 2 \\ 2 & 1 & & & 3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ n-1 & n-2 & \dots & 1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Exercice 7 :

En utilisant des récurrences, calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & \dots & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

et (un peu plus dur)

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Exercice 8 ([✓]) :

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & b & \dots & b \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \dots & a & a+b \end{vmatrix}$$

1. Montrer que la suite $(D_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie une relation de récurrence.
2. Montrer alors que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ D_n = \begin{cases} \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} & \text{si } a \neq b \\ (n+1)a^n & \text{si } a = b \end{cases}$$

2 Exercices plus théorique

Exercice 9 ([✓]) :
Soit $A \in \mathcal{A}_{2n+1}(\mathbb{K})$. Montrer que $\det(A) = 0$

Exercice 10 :
Déterminer les $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $\exists A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB + BA = 0$.

Exercice 11 :
Soit $n \geq 2$, $P \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$. Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} \widetilde{P}(1) & \widetilde{P}(2) & \dots & \widetilde{P}(n) \\ \widetilde{P}(2) & \widetilde{P}(3) & \dots & \widetilde{P}(n+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widetilde{P}(n) & \widetilde{P}(n+1) & \dots & \widetilde{P}(2n-1) \end{vmatrix}$$

Exercice 12 :
Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \det(A+X) = \det(A) + \det(X)$$

1. Montrer que $\det(A) = 0$
2. En déduire en suite que $A = 0$. On utilisera le fait que A est équivalente à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $r = \mathrm{rg}(A)$ et on choisira judicieusement X.
3. Que dire de deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\det(A+X) = \det(B+X)$?

Exercice 13 ([✓]) :
Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-ev E de dimension n tel que $f^2 = -\mathrm{Id}_E$. Montrer que n est paire.

Exercice 14 ([✓]) :

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha \\ \alpha & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $\det M$
2. En déduire pour quelle valeur de α la matrice M est inversible.
3. Déterminer le rang de M selon les valeurs de α.

Exercice 15 ([✓]) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -2 & 6 & 6 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Pour quelles valeurs de λ a-t-on $\det(\lambda I_3 - A) = 0$?
2. En résolvant $f(x) = \lambda x$ pour les valeurs de λ trouvé à la question précédente, déterminer une base $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de E telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 16 (Déterminant de Vandermonde [✓]) :
Soit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. On note

$$V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \dots & a_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Calculer $V(a_1, \dots, a_n)$. On pourra considérer la manipulation $C_k \leftarrow C_k - a_1 C_{k-1}$ pour $2 \leq k \leq n$.

Exercice 17 :
Le but de cet exercice est de montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall x \in [-\varepsilon, \varepsilon],\ A + xB \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}).$$

2. Montrer que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\exists p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geq p_0$, $A + \frac{1}{p} I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 18 :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$.
Montrer que $2^{n-1} | \det(A)$.

Exercice 19 :
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On pose $M' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall j \in \{1, \dots, n\}$, $C_j(M') = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^n C_k(M)$.
Calculer $\det(M')$ en fonction de $\det(M)$.

Exercice 20 (* [✓]) :
Montrer que deux matrices réelles semblables dans $\mathbb{C}$ sont semblables sur $\mathbb{R}$.
i.e. montrer que si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A \underset{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}{\sim} B$, alors $A \underset{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}{\sim} B$.

3 Déterminant par blocs

Exercice 21 (Centrale MP) :

1. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \geq 0$.
2. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$. Montrer que $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.
3. Trouver un contre-exemple si A et B ne commutent pas.
4. Soit $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AC = CA$. Montrer que
$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - CB).$$

Exercice 22 (**) :
Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. Montrer que
$$\det(I_p - AB) = \det(I_q - BA).$$

4 Applications du déterminant

Exercice 23 :
Soit a, b, c trois éléments distincts de $\mathbb{K}$ et $d \in \mathbb{K}$. Résoudre les systèmes

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^3x + b^3y + c^3z = d^3 \end{cases}$$

Exercice 24 :
Résoudre
$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x + jy + j^2z = b \\ x + j^2y + jz = c \end{cases}$$

Exercice 25 :

Soit $a \in \mathbb{C}$. Résoudre le système

$$\begin{cases} x + ay + a^2 z = 0 \\ \overline{a}x + y + az = 0 \\ \overline{a}^2 x + \overline{a}y + z = 0 \end{cases}$$

en fonction de a.

Exercice 26 ([✓]) :

On considère l'application

$$T : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \to & {}^t M \end{array}$$

Justifier que $T \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ puis calculer $\operatorname{tr}(T)$ et $\det(T)$ (on choisira une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ judicieuse).

Exercice 27 :

Les matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ sont des matrices à coefficients entiers inversibles dont l'inverse est encore à coefficients entiers.

1. Montrer que si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, alors $\det(A) \in \mathbb{Z}^\times = \{-1, 1\}$.
2. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall k \in \{0, \ldots, 2n\}$, $A + kB \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. Calculer $\det(A)$ et $\det(B)$.

Exercice 28 (Des petits cailloux (***)) :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose de $2n+1$ cailloux. On suppose que chaque ensemble de $2n$ cailloux peut se partager en deux sous-ensembles de même masse de n cailloux. Le but est de montrer que tous les cailloux ont la même masse.

1. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $a_{i,j} = 0$ si $i = j$ et $a_{i,j} \in \{\pm 1\}$ si $i \neq j$. Montrer que si n est pair, alors A est inversible.
2. On pose, pour tout $i \in \{1, \ldots, 2n+1\}$, la masse m_i du i-ème cailloux. Pour tout $i \in \{1, \ldots, 2n+1\}$, on sépare les $2n$ cailloux restant après avoir enlevé le cailloux i en deux ensembles A_i et B_i de même masse. On note alors $M \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ la matrice associée à ce découpage : la i-ème ligne correspond à la séparation en deux sous-ensembles de même masse en enlevant le cailloux i. Donc $\forall i \in \{1, \ldots, 2n+1\}$, $\forall j \in \{1, \ldots, 2n+1\}$, $m_{i,i} = 0$ et $m_{i,j} = 1$ si le cailloux j est dans A_i et $m_{i,j} = -1$ si le cailloux j est dans B_i.

   En utilisant la matrice M, montrer que les cailloux ont tous la même masse.

5 Comatrices, Rang etc

Exercice 29 :
Inverser les matrices suivantes

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 8 \\ -7 & -9 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_5 = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_6 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 1 & \overline{\alpha} & \overline{\alpha}^2 \\ \alpha & 1 & \overline{\alpha} \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{pmatrix} \qquad \alpha \in \mathbb{C} \qquad A_8 = \begin{pmatrix} i & -1 & 2i \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 30 (Autour de la comatrice (CCINP MP)) :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Donner le rang de $B = {}^t\mathrm{com}(A)$ en fonction de celui de A.
2. On se place dans le cas où $\mathrm{rg}(A) = n-1$. Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AC = CA = 0$. Montrer que $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ telle que $C = \lambda B$.

Exercice 31 :
Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Montrer que si A et B commutent, alors $\mathrm{com}(A)$ et $\mathrm{com}(B)$ commutent.

Exercice 32 :
Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

1. Montrer que $\det(A), \det(B) \in \mathbb{Z}$.
2. On suppose $\det(A) \wedge \det(B) = 1$. Montrer que $\exists U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que $AU + BV = I_n$.