

Chapitre 25 - TD : Intégration sur un segment

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

mardi 14 avril, 2026

1 Continuité uniforme, Fonction continues par morceaux, Fonctions en escalier

Exercice 1 :

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable.

1. On suppose f' bornée sur \mathbb{R}_+ . Montrer que f est uniformément continue sur \mathbb{R}_+ .
2. On suppose $|f'(x)| \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$. Montrer que f n'est pas uniformément continue sur \mathbb{R}_+ .

Exercice 2 :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uniformément continue bornée et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

Montrer que $g \circ f$ est uniformément continue.

Exercice 3 :

Montrer que $t \mapsto \sin(t^2)$ n'est pas uniformément continue sur \mathbb{R} .

2 Propriété de l'intégrale

Exercice 4 :

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que

$$\int_0^1 f = 0.$$

On pose $m = \min_{[0,1]} f$ et $M = \max_{[0,1]} f$. Montrer que

$$\int_0^1 f(t)^2 dt \leq -mM.$$

Indic : On pourra considérer $\varphi(t) = (f(t) - m)(M - f(t))$.

Exercice 5 :

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $c \in]a, b[$. Montrer que

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \leq \max \left(\frac{1}{c-a} \int_a^c f(t) dt, \frac{1}{b-c} \int_c^b f(t) dt \right)$$

Indic : Faire une disjonction de cas.

Exercice 6 :

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| = \int_a^b |f(t)| dt \iff f \geq 0 \text{ ou } f \leq 0$$

Exercice 7 (Théorème du point fixe) :

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et telle que

$$\int_0^1 f = 1/2$$

Montrer que f admet un point fixe (sans utiliser les versions du théorème du point fixe déjà vues).

Exercice 8 (Formule de la moyenne) :

Soit $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues avec $g \geq 0$.

Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(c) \int_a^b g(t)dt$$

Indic : Si $\int_a^b g \neq 0$, observer $\frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g}$ et utiliser le TVI.

Exercice 9 (Mines PC (*)) :

Soit $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $n \in \mathbb{N}$ telle que

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \int_a^b t^k f(t) dt = 0$$

On va montrer que la fonction f s'annule au moins $n + 1$ fois sur $[a, b]$.

1. Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \int_a^b \tilde{P}(t) f(t) dt = 0$.

2. Supposons que f ne s'annule pas plus de n fois sur l'intervalle $[a, b]$.

(a) Soit $x_1 < x_2 < \dots < x_p$ (avec $p \leq n$) les points où f s'annule en changeant de signe. Étudier le signe de $x \mapsto f(x) \prod_{k=1}^p (x - x_k)$ sur l'intervalle $[a, b]$.

(b) Calculer $\int_a^b f(t) \prod_{k=1}^p (t - x_k) dt$.

(c) Conclure.

Exercice 10 :

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que

$$g : x \mapsto \int_a^b f(t) \sin(xt) dt$$

est Lipschitzienne.

Exercice 11 ()** :

Déterminer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+\frac{2}{x}} t \arctan(1/t) dt.$$

3 Avec des primitives**Exercice 12 :**

Donner une primitive pour chacune des fonctions suivantes

$$\begin{array}{lll} f_1 : t \mapsto te^{t^2} & f_2 : t \mapsto \frac{\ln t}{t} & f_3 : t \mapsto \frac{1}{t \ln t} \\ f_4 : t \mapsto \cos(t) \sin(t) & f_5 : t \mapsto \tan(t) & f_6 : t \mapsto \cos(t)^3 \\ f_7 : t \mapsto \frac{t^2}{1+t^3} & f_8 : t \mapsto \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} & f_9 : t \mapsto \frac{t}{1+t^4} \\ f_{10} : t \mapsto \frac{1}{1+it} & f_{11} : t \mapsto e^t \cos(t) & f_{12} : t \mapsto t \sin(t) e^t \end{array}$$

Exercice 13 :

Calculer les intégrales

$$\begin{array}{lll} I_1 = \int_1^2 \frac{dt}{t^2} & I_2 = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} & I_3 = \int_0^{1/2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ I_4 = \int_0^{2\pi} \cos(t)^2 dt & I_5 = \int_1^2 \ln(t) dt & I_6 = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} dt \\ I_7 = \int_2^3 \frac{x^4+1}{x^4-1} dx & I_8 = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1-\sin(x)^3}{\sin(x)^2} dx & I_9 = \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^2} dx \\ I_{10} = \int_1^e \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x} dx \end{array}$$

Exercice 14 :Pour tout $m, n \in \mathbb{N}$, calculer

$$I_{m,n} = \int_0^{2\pi} \cos(mt) \cos(nt) dt$$

Exercice 15 :Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $a = \Re(\lambda)$, $b = \Im(\lambda)$. Établir

$$t \mapsto \ln |t - \lambda| + i \arctan\left(\frac{t - a}{b}\right)$$

est une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t-\lambda}$ **Exercice 16 :**Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que f possède une unique primitive F telle que

$$\int_0^1 F = 0.$$

Exercice 17 :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $T > 0$ tel que

$$\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \int_x^{x+T} f(t) dt = C.$$

Montrer que f est périodique.

Exercice 18 :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Justifier que les fonctions suivantes sont \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et calculer leur dérivée.

$$g(x) = \int_0^x x f(t) dt \quad h(x) = \int_{2x}^{x^2} f(t) dt \quad k(x) = \int_0^x f(t+x) dt$$

Exercice 19 :

On considère la fonction $f : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$. Calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4 IPP et changement de variables**Exercice 20 :**

Calculer les intégrales suivantes par des IPP :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \ln(1+t^2) dt & I_2 &= \int_1^e t^n \ln(t) dt, n \in \mathbb{N} & I_3 &= \int_1^{e^\pi} \sin(\ln t) dt \\ I_4 &= \int_0^1 \arctan(t) dt & I_5 &= \int_0^{1/2} \arcsin(t) dt & I_6 &= \int_0^1 t \arctan(t) dt \\ I_7 &= \int_0^1 \frac{\arctan(x)}{x^2+1} dx & I_8 &= \int_0^\pi t \cos(t) e^t dt & I_9 &= \int_1^e \ln(x)^2 dx \\ I_{10} &= \int_0^1 t \arctan(t)^2 dt & I_{11} &= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2-x+1}{x(x^2+1)^2} dx \end{aligned}$$

Exercice 21 :

Calculer les intégrales suivantes par des changements de variables :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_1^e \frac{dt}{t+t(\ln t)^2} & I_2 &= \int_1^e \frac{dt}{t\sqrt{\ln(t)+1}} & I_3 &= \int_0^1 \frac{dt}{e^{t+1}} \\ I_4 &= \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt & I_5 &= \int_0^1 t^2 \sqrt{1-t^2} dt & I_6 &= \int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt \\ I_7 &\stackrel{\text{Bioche}}{=} \int_0^\pi \frac{\sin t}{3+\cos(t)^2} dt & I_8 &= \int_1^2 \frac{dt}{2t+\sqrt{t}} & I_9 &= \int_1^2 \frac{\ln(1+t)-\ln(t)}{t^2} dt \\ I_{10} &\stackrel{\text{Bioche}}{=} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\cos(x)-2} dx & I_{11} &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos(x)+\sin(x)} dx & I_{12} &= \int_0^{\pi/4} \frac{\cos(x)(1+\sin(x))^2}{1-\sin(x)^4} dx \\ I_{13} &= \int_0^{1/2} e^{\arcsin(x)} dx & I_{14} &= \int_0^{\pi/6} \frac{1}{\cos(x)(1-\sin(x))} dx \end{aligned}$$

Exercice 22 :

Montrer que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\cos(t) + \sin(t)} dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\cos(t) + \sin(t)} dt = \pi/4$$

et en déduire

$$\int_0^1 \frac{dt}{t + \sqrt{1-t^2}}$$

Exercice 23 :

À l'aide d'un changement de variable, montrer que

$$\int_0^{\pi/4} \ln(\cos(t)) dt = \int_0^{\pi/4} \ln(\cos(\pi/4 - t)) dt$$

et en déduire

$$\int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan(t)) dt$$

Exercice 24 :

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in [a, b], f(a + b - x) = f(x)$.

Montrer que

$$\int_a^b x f(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx$$

Exercice 25 :

Le but de cet exercice est de montrer que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan(x)}{x^3} = \frac{1}{3}$$

dans utiliser les formules de Taylor (aucunes).

Soit $x \neq 0$.

1. Montrer que $\frac{x - \arctan(x)}{x^3} = \frac{1}{x^3} \int_0^x \frac{t^2}{1+t^2} dt$.
2. Montrer que $\frac{1}{x^3} \int_0^x \frac{t^2}{1+t^2} dt = \int_0^1 \frac{t^2}{1+x^2 t^2} dt$.
3. Calculer $\int_0^1 t^2 dt$.
4. En déduire que

$$\left| \frac{x - \arctan(x)}{x^3} - \frac{1}{3} \right| \leq \frac{x^2}{5}.$$

5. Conclure.

Exercice 26 :

Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $\varphi(t) = \frac{\text{sh}(t)}{t}$ étendue par continuité en 0. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \int_x^{2x} \varphi(t) dt.$$

1. Justifier que f est bien définie et étudier la parité de f .
2. Justifier que f est dérivable et calculer $f'(x)$.
3. Dresser le tableau de variation de f .

Exercice 27 :

Soit

$$f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\operatorname{ch}(t)}{t} dt.$$

1. Étudier la parité de f . On l'étudie donc désormais sur \mathbb{R}_+^* .
2. Prolonger f en 0.
3. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ .

Exercice 28 :

1. Montrer que la fonction

$$f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$$

est définie et dérivable sur \mathbb{R}^* .

2. Déterminer la limite de f en 0 à l'aide d'encadrement.

Exercice 29 ():**Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 et $F : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \neq 0, F(x) = \frac{1}{2x} \int_{-x}^x f(t) dt.$$

1. Montrer que F peut être prolonger par continuité en 0. On considérera F ainsi prolonger désormais.
2. Montrer que F est dérivable sur \mathbb{R}^* et $\forall x \neq 0, F'(x) = \frac{1}{2x^2} \int_{-x}^x t f'(t) dt$.
3. (Bonus ***) Montrer que $F'(x) = \frac{1}{2x^2} \int_{-x}^x t(f'(t) - f'(0)) dt$. En déduire que F est dérivable en 0 et $F'(0) = 0$.

5 Formules de Taylor, Sommes de Riemann and co**Exercice 30 :**

Déterminer les limites des suites définies par

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2} \quad v_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2} \quad w_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}$$

Exercice 31 :

En utilisant des sommes de Riemann, montrer que la suite de terme général

$$\left(\frac{(2n)!}{n^n n!} \right)^{1/n}$$

est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 32 :

1. Étudier la convergence de la suite (u_n) et (v_n) de terme général

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^3}$$

2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+, x - x^3/6 \leq \sin(x) \leq x$.
 3. En déduire la nature de la suite (w_n) définie par

$$w_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \sin(1/k)$$

Exercice 33 (Égalité de Taylor-Lagrange) :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. Montrer que si f est de classe C^{n+1} alors

$$\forall x \in I, \exists c \in I, f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

Exercice 34 :

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1} e^{|x|}}{(n+1)!}$$

En déduire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

Exercice 35 :

En utilisant une formule de Taylor, établir que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2$$

Exercice 36 (*) :

Soit $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Déterminer les fonctions $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que

$$f(1) = f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f'' = g$$

6 Avec des suites

Exercice 37 :

Soit $a < b$. Pour $p, q \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_{p,q} = \int_a^b (t-a)^p (t-b)^q dt$$

1. Soit $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Donner une relation liant $I_{p,q}$ et $I_{p+1,q-1}$
2. Donner une expression de $I_{p,q}$ à l'aide de factorielle.

Exercice 38 :

On pose $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x dx$$

1. Montrer que la suite (I_n) tend vers 0
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$$

3. En déduire finalement

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

Exercice 39 :

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$$

1. Calculer I_0, I_1 .
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, établir une relation liant I_n et I_{n+1} .
3. En déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < I_n < \frac{e}{n+1}$$

4. Déterminer la limite puis un équivalent simple de (I_n) , puis un développement asymptotique de deux termes de I_n .
5. Soit (u_n) une suite réelle définie par

$$u_0 = a \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = e - (n+1)u_n$$

On suppose que $a \neq I_0$. Montrer, en étudiant $D_n = |u_n - I_n|$, que $|u_n| \rightarrow +\infty$

Exercice 40 :

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$$

1. Calculer u_0, u_1 et u_2 .
2. Montrer que (u_n) est une suite strictement croissante
3. Montrer que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$.

4. Établir

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1+x^n) dx$$

5. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \ln(1+x^n) dx = 0$$

et en déduire que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{\ln 2}{n} + o(1/n)$$