Chapitre 25 - TD :

Intégration sur un segment

Indications

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

mardi 14 avril, 2026

1 Continuité uniforme, Fonctions continues par morceaux, Fonctions en escalier

Exercice	Indications
1	1. Il y a un lien entre les deux. Retrouver dans différents chapitres le lien entre la dérivabilité et la continuité uniforme. 2. Raisonner par l'absurde. Utiliser le TAF pour aboutir à une contradiction.
2	Il suffit de l'écrire. C'est un jeu sur les définitions avec les ε.
3	Le plus simple est d'utiliser la caractérisation séquentielle de la continuité uniforme. Il faut choisir de “bonnes suites”.

2 Propriété de l'intégrale

Exercice	Indications
4	Il y a déjà une indication.
5	Il y a déjà une indication. La forme de l'énoncé doit vous donner une indication sur la disjonction à faire. Vous pouvez vous inspirer des premiers exos faits du chapitre sur les relations d'ordres.
6	Le sens indirecte est facile. Ce n'est que de la vérification. Attention aux signes. Le sens directe est plus intéressant. Faire une disjonction de cas sur le signe *du réel*.
7	Calculer d'abord $\int_0^1 tdt$. Ça devrait vous donner une idée déjà utilisée régulièrement.
8	Il y a déjà une indication. Attention, elle contient des sous-entendus. Il faut traiter aussi les sous-entendus. Penser aussi à l'exemple fondamental juste après l'inégalité triangulaire intégrale.
9	Cet exercice devrait vous faire penser à un exemple du cours. C'est une sorte de généralisation.
10	Attention à la variable. Une variable n'est pas une variable. Enfin si. Mais pas tout à fait. Ça dépend de qui est la variable. Bien savoir de qui on parle. En écrivant calmement tout, en analysant bien la situation, c'est très facile.
11	Il faut revenir aux définitions et utiliser des ε.

3 Avec des primitives

Exercice	Indications
12	Il peut être nécessaire de faire quelques transformations sur l'expression des fonctions pour pouvoir avoir des idées de primitives.
13	Idem qu'au dessus, mais avec, cette fois-ci, des intégrales en plus.
14	Il faut commencer par linéariser l'expression. Ensuite, il faut faire une disjonction de cas.
15	Reprendre la définition d'une primitive, puis calculer.
16	Commencer par l'unicité, c'est plus facile. Pour l'existence, utiliser le théorème fondamental de l'intégration pour construire une primitive. Puis, choisir une primitive qui fonctionne (on a un lien entre toutes les primitives).
17	C'est le théorème fondamental.
18	C'est encore le théorème fondamental. Attention aux hypothèses ! I faut être *exactement* dans le cadre du théorème pour pouvoir l'utiliser ! Si on y est pas, il faudra faire des petites modifications pour s'y ramener.

4 IPP et changement de variables

Exercice	Indications
20	Bon, c'est clair. Les choix le sont moins. Mais c'est le but. Faire des tests.
21	C'est clair aussi. Le changement de variable à utiliser moins. Mais là encore, c'est le but. Regarder bien l'expression. Il y a des morceaux qui devraient vous ennuyer. Ça donne des indications.
19	N'aurait-on pas vu un moyen de calculer directement les dérivées n-ème dans un chapitre précédent ? On ne pourrait pas l'utiliser ici ?
22	Changement de variables, puis changement de variables. Pour la valeur des intégrales, essayer de faire la somme.
23	Comme au dessus.
24	Vu la propriété que vérifies f, vous devriez avoir envie de faire un changement de variable.
26	C'est le théorème fondamental, clairement. Attention en l'utilisant.
27	C'est un exercice du chapitre dérivabilité. Mais dont l'expression de la fonction utilise des intégrales. Il faut mélanger tous les chapitres. Pour la question 2, il faut réussir à encadrer la fonction pour pouvoir utiliser le théorème des gendarmes. Et pour ça, penser à l'exercice 8. Pour la question 3, il y a plusieurs façons de procéder. Revoir le théorème satanique pour plus de précisions.
28	C'est le théorème fondamental, clairement. Là encore, pour la question 2, il faut utiliser le théorème des gendarmes. Et pour ça, s'inspirer de l'exercice 8.
29	C'est comme les exercices précédents, mais en plus dur. C'est beaucoup des questions de traductions. Si vous reformulez les questions, c'est assez simple, finalement. L'expressions de F' s'obtient par une petite manipulation sur les intégrales.

5 Formules de Taylor, Sommes de Riemann and co

Exercice	Indications
30	Ce sont trois sommes de Riemann. Évidemment, ça ne se voit pas nécessairement au premier coup d'œil. Il suffit donc de les faire apparaître pour reconnaître les fonctions auxquelles elles sont associées.
31	C'est indiqué, c'est une somme de Riemann. Sauf que là, on a un produit. N'y aurait-il pas un moyen de transformer un produit en somme ?... Ensuite, il faut faire des simplifications pour faire apparaître la forme des sommes de Riemann.
32	1. Ce sont des sommes de Riemann. Clairement. 2. Cette inégalité peut se démontrer de plusieurs façons. Il est recommandé de le faire en utilisant les formules de Taylor (oui mais laquelle ?...). C'est un meilleur entraînement. c'est pédagogiquement plus intéressant. Et plus formateur. 3. C'est indiqué. Il faut utiliser la question précédentes. Avec un peu de chances, on va réussir à encadrer w_n à l'aide de u_n et v_n. À partir de là, on devrait pouvoir s'en sortir.
33	Dans le cours, il y a une l'inégalité de Taylor-Lagrange. N'y aurait-il pas moyen de reprendre la démo de l'inégalité de Taylor-Lagrange et bifurqué à un moment donné ? Le lien entre inégalité et égalité devrait vous faire penser à un autre couples de théorèmes du même genre. On devrait pouvoir s'en inspirer. Voir même l'utiliser.
34	Vous devriez reconnaître certains éléments dans la valeur absolue. Ça devrait vous donner une piste.
35	C'est la même chose que l'exercice précédent. Mais c'est un peu moins guidé.
36	Il faut raisonner par analyse-synthèse. Pour l'analyse, on a une expression théorique à l'aide de Taylor avec reste intégral. Ensuite, on manipule pour préciser ce que doit être la fonction f.

6 Avec des suites

Exercice	Indications
37	Il y a un moyen classique pour faire des relations de récurrences. Une fois établie, on peut en déduire l'expression de $I_{p,q}$ en fonction d'un $I_{N,0}$ (avec N bien choisi, évidemment). Et à partir de là, on peut finir.
38	1. Il y a des exemples de ce type éparpillés à différents endroits du cours. Il suffit de s'en inspirer. 2. Il y a une méthode classique pour avoir des relations de récurrences pour des suites d'intégrales. Ça paraît raisonnable de commencer par là. 3. On a une relation de récurrence et on a la limite de la suite. En mélangeant les deux informations, ça donnerait quoi ?
39	1. Bon. C'est du calcul. Pas de problème. 2. Relation de récurrence. On a des méthode classique pour ça. 3. Faire des inégalités sur les intégrales, on a des outils pour le faire. Attention, il ne faut pas être trop brutal. Sinon, on risque de ne pas avoir ce qu'il faut. Mais surtout, on a aucun moyen, *a priori*, d'avoir des inégalités strictes. Pas directement en tous cas. Commencer déjà par établir les inégalités larges. Puis on verra ensuite si les cas d'égalités sont possibles. 4. La limite, c'est facile. Une équivalent, ça l'est un peu moins. Mais ne pas oublier qu'on a une relation de récurrence. Ça ressemble un peu à ce qu'on peut faire avec des suites implicites. 5. Tiens, une suite récurrente. Cette relation ne vous rappelle rien ?
40	Reprendre les remarques au-dessus.