

## Chapitre 26

# Séries

Simon Dauguet  
*simon.dauguet@gmail.com*

mardi 12 mai, 2026



La question de pouvoir faire des sommes infinies est une question qui apparaît naturellement lors d'étude de suites. Nous y avons nous même été confrontés à plusieurs reprises. Les premières études de séries apparaissent déjà dans la Grèce antique, mais seulement dans dans cas très spécifique, sans généralisation ni critère de convergence.

Il faudra attendre le XIV<sup>ème</sup> siècle pour voir les premiers résultats généraux en Inde. C'est le mathématicien et astronome indien Madhava qui considère le premier des développements de fonctions trigonométriques sous forme de séries. Il donnera les premiers critères de convergence.

On peut voir les séries comme des "intégrales discrétisées". Les séries sont aux suites, ce que les intégrales sont aux fonctions. En quelque sortes. Les idées sont globalement les mêmes. Il est possible de faire des changements de variables (on sait déjà les faire depuis le début de l'année), on peut faire des majorations et il est même possible de faire des sortes d'IPP (ça s'appelle des transformations d'Abel). Mais ces dernières ne nous seront pas d'une très grandes utilités.

En fait, pour être plus précis, les séries sont plus proche des intégrales impropres, au programme de la spé.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Séries Numériques</b>	<b>3</b>
1.1	Définition . . . . .	3
1.2	Convergence . . . . .	5
1.3	Opérations sur les séries convergentes . . . . .	9
1.3.1	Linéarité . . . . .	9
1.3.2	Positivité . . . . .	11
1.3.3	Cas complexe . . . . .	12
1.4	Limite du terme général d'une série convergente . . . . .	13
1.5	Cas des SATP . . . . .	14
1.6	Comparaison entre SATP . . . . .	15
1.7	Convergence absolue . . . . .	17
1.8	Convergence par relation de comparaison à une SATP . . . . .	19
1.9	Produit de Cauchy . . . . .	22
<b>2</b>	<b>Critères de convergences</b>	<b>25</b>
2.1	Séries de références . . . . .	25
2.2	Critère de convergence . . . . .	28
2.3	Cas des séries alternées . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Applications</b>	<b>31</b>
3.1	Comparaison série/intégrale . . . . .	31
3.2	Développement décimal . . . . .	33
3.3	Fonction exponentielle . . . . .	35
<b>4</b>	<b>Familles sommables - Ordre de sommation</b>	<b>39</b>
4.1	Cas des réels positifs . . . . .	40
4.2	Cas des familles complexes . . . . .	43

# 1 Séries Numériques

## 1.1 Définition

Il est facile de voir qu'il est possible de sommer *tous* les termes de certaines suites (en prenant garde à la définition du mot *tous*). Par exemple, pour les suites géométriques, on sait le faire à condition que la raison soit dans  $] - 1, 1[$ . Il est alors naturel de se poser la question des autres suites. Existe-t-il des suites "sommables" ? Si oui, quelles sont elles ? À quelles conditions une suite est-elle "sommable" ?

Définition 1.1 (Sommes partielles) :

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite numérique. On appelle  $n$ -ème somme partielle de la suite  $(u_n)$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

Définition 1.2 (Série numérique) :

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite numérique, i.e.  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ . On appelle série de terme général  $u_n$ , l'objet noté  $\sum u_n$  dont l'étude permet de définir la convergence de la suite des sommes partielles. Autrement dit, étudier la convergence de la série  $\sum u_n$  revient à étudier la convergence de la suite des sommes partielles de  $(u_n)$ .

**Remarque (Notations) :**

On note parfois aussi  $\sum_{n \geq 0} u_n$  la série. L'indice est là, dans ce cas précis, pour spécifier l'indice du premier terme de la suite. Ainsi, si  $u$  est une suite dont le premier terme est d'indice 1 (i.e. si  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ), on pourra noter  $\sum_{n \geq 1} u_n$  la série correspondante pour bien spécifier que le premier terme est d'indice démarre à 1.

On peut noter aussi  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ . Mais c'est un peu moins utilisé.

**Remarque :**

Cette définition n'est pas tout à fait exacte. En fait, les séries sont des objets abstraits (et même formels) qui ont été fabriqué de façon très artificiel pour pouvoir répondre à un problème.

La question sous-jacente est de savoir si l'on peut sommer *tous* les termes d'une somme. Par exemple, dans le cas d'une suite géométrique, on peut trouver facilement les conditions sur la raison pour pouvoir sommer tous les termes de la suite (il faut et il suffit que la raison soit dans  $] - 1, 1[$ ). Et donc, l'étude d'une série revient, essentiellement, à étudier la suite des sommes partielles.

Toutefois, se restreindre à l'étude des sommes partielles est se tromper d'objectif, et par suite, de nature d'objet. On ne souhaite pas étudier la suite des sommes partielles, en tant que suite. Ce que l'on souhaite, c'est savoir s'il est possible de donner un sens à la somme de *tous* les termes de la suite, à partir seulement de l'étude du terme général.

Étudier la suite des sommes partielles serait faire intervenir une suite intermédiaire qui ne nous intéresse pas vraiment. Elle n'est qu'un moyen, une étape (obligatoire pour le moment, mais dont nous allons essayer de nous affranchir au fur et à mesure du cours) pour pouvoir répondre à la question.

L'objet  $\sum u_n$  est donc, a strictement parlé, un objet un peu artificiel qui nous permet de faire le lien entre le terme général  $u_n$  de la série et la somme que l'on voudrait existante (ou pas).

Attention donc à ne pas systématiquement repasser par les sommes partielles et de ne pas confondre les deux objets. Il faut considérer les séries comme des objets à part entière, un nouveau type d'objet. À l'instar de l'indéterminée  $X$  que l'on doit considérer comme étant une entité spécifiques mais que l'on peut voir comme étant une suite. Les séries sont des objets spécifiques dont la nature profonde est d'être des suites. On essaie donc de les étudier en tant que séries et on ne fait appel à leur définition de suites que si on y est contraint et forcé.

Il y a donc une difficulté conceptuelle. Ce qui nous intéresse, c'est la série dans sa globalité. Les propriétés de la série proviennent essentiellement des propriétés du terme général.

Le principe générale étant d'abord étudier une suite, et dans un second temps de se demander s'il est possible de sommer tous les termes de la suite. Et on espère qu'il soit possible de répondre à cette question uniquement à partir de l'étude de la suite de départ.

### **Exemple 1.1 (Série arithmétique) :**

La série  $\sum n$  est la série dont les sommes partielles sont les

$$S_n = \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

### **Exemple 1.2 (Série géométrique) :**

La série  $\sum q^n$  est la série dont la somme partielles sont les

$$S_n = \sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

### **Exemple 1.3 (Série harmonique) :**

La série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  s'appelle la série harmonique et c'est la série dont les sommes partielles

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Sur cet exemple, on voit qu'on peut aussi définir des séries pour  $n \geq 1$ . Exactement comme pour les suites. En fait, on peut même faire une version un peu plus générale et définir les séries comme  $\sum_{n \geq n_0} u_n$  à partir de  $n_0$ . Mais par un changement de variable, on peut se ramener à une série définie à partir de 0. Comme pour les suites.

**Remarque :**

Cette année, nous ne parlerons que de séries numériques. Mais il est possible de définir des séries de beaucoup d'objets de natures différentes. Il existe par exemple des séries de vecteurs, des séries de matrices (vous en avez touché du bout du doigt dans un DM), des séries de fonctions ... Toutes ces séries sont au programme de MP.

## 1.2 Convergence

Définition 1.3 (Série convergente, Somme d'une série) :

Soit  $\sum u_n$  une suite numérique.

- On dit qu'une série  $\sum u_n$  converge si la suite de ses sommes partielles converge. Autrement dit, on dit que  $\sum u_n$  converge si la suite  $(\sum_{k=0}^n u_k)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

Dans ce cas, on note  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  le réel vers lequel converge la série. Ce réel s'appelle la *somme de la série*. Et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N u_n$$

- Dans le cas où  $\sum u_n$  ne converge pas, on dit que la série diverge.

**Remarque :**

La convergence ou divergence de la série correspond à la nature de la série. Comme pour les suites. Donc étudier la nature d'une série, c'est étudier sa convergence.



La somme d'une série est donc une limite (ça se voit à la présence du symbole  $+\infty$ ). Ça se manipule donc comme une limite. On ne peut donc pas calculer avec. Il faut donc toujours justifier d'abord que l'existence de toutes les sommes en présence avant d'écrire et avant de faire quoi que ce soit. Il faut y penser comme une limite. C'EST une limite.

Il faudra pendre garde aux envies qui vont vous démanger de manipuler ça comme une somme classique. Ce n'est pas le cas. C'est une limite. Il y a donc tous les problèmes liés aux limites ainsi que tous les problèmes liés aux sommes en même temps.

Une condition nécessaire à la réussite de l'oral reste donc de différencier, une bonne fois pour toutes, les notions suivantes relatives aux séries : somme partielle, suite des sommes partielles, série et somme d'une série et les utiliser à bon escient. [CCINP 2022]

**Exemple 1.4 :**

Étudier la série  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$  pour  $n \geq 2$ .

**Théorème 1.1 (Décalage d'une série) :**

Soit  $\sum u_n$  une série numérique et  $n_0 \in \mathbb{N}$ . On a équivalence entre

- (i)  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge
- (ii)  $\sum_{n \geq n_0} u_n$  converge

*Démonstration :*

C'est très simple. On a  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  converge ssi  $(\sum_{k=0}^n u_k)_{n \in \mathbb{N}}$  converge ssi  $(\sum_{k=n_0}^n u_k)_{n \geq n_0}$  converge ssi  $\sum_{n \geq n_0} u_k$  converge.  $\square$

**Corollaire 1.2 :**

On ne change pas la nature d'une série en modifiant un nombre fini de valeurs de cette série.

C'est comme pour les suites. La nature d'une suite ne dépend pas des premiers termes de la suite. La nature d'une suite ne change pas si on modifie un nombre fini de terme de la suite.

**!!! ATTENTION !!!**



Si on ne modifie pas la nature de la série en changeant les premiers termes, on modifie en revanche la somme, la valeur de la limite des sommes partielles. Forcément. Comme on change certains termes, on change la somme de ces termes. Et donc la somme de la série.

**Exemple 1.5 :**

Pour tout  $n \geq 2$ , on note  $u_n = \frac{1}{n(n-1)}$  et  $\forall n \geq 1$ , on note  $v_n = \frac{1}{n(n+1)}$ . Montrer que les séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont convergentes et calculer leurs sommes. Comparer ces deux séries.

**Proposition 1.3 (Caractérisation de la convergence d'une suite par des séries [✓]) :**

Soit  $(u_n)$  une suite numérique.

La suite  $(u_n)$  converge si et seulement si  $\sum(u_{n+1} - u_n)$  converge.

*Démonstration :*

C'est du télescopage.  $\sum(u_{n+1} - u_n)$  converge ssi  $(u_{n+1} - u_0)$  converge ssi  $(u_n)$  converge.  $\square$

Définition 1.4 (Reste) :

Soit  $\sum u_n$  une série numérique.

Si  $\sum u_n$  converge, on peut introduire la suite  $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^n u_k.$$

qui est appelé la suite des restes de la série  $\sum u_n$ . Le terme  $R_n$  est le reste de rang  $n$  de la série  $\sum u_n$ .

**!!! ATTENTION !!!**



La notion de reste d'une série n'a de sens que pour une série convergente. En effet, dans l'expression du reste de rang  $n$ , la somme que l'on a contient une infinité de terme. Le reste de rang  $n$  correspond à la somme de la série en enlevant les premiers termes. Il faut donc pouvoir sommer une infinité de termes et donc que la série soit convergente.

**Proposition 1.4 (Lien restes et sommes partielles, nature de la suite des restes) :**

Soit  $\sum u_n$  une série numérique.

Si  $\sum u_n$  converge, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^n u_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = S_n + R_n$$

et de plus

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

*Démonstration :*

Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé et  $N > n$ . Alors

$$\sum_{k=0}^N u_k = \sum_{k=0}^n u_k + \sum_{k=n+1}^N u_k$$

Comme la série  $\sum u_n$  converge, on sait que la suite  $\left(\sum_{k=0}^N u_k\right)_{N \in \mathbb{N}}$  converge (puisque c'est la suite des sommes partielles de la série) et  $\left(\sum_{k=n+1}^N u_k\right)_{N \in \mathbb{N}}$  également puisque c'est la suite des sommes partielles décalé d'une constante (en l'occurrence  $\sum_{k=0}^n u_k$ ). En passant à la limite  $\lim_{N \rightarrow +\infty}$ , on obtient donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^n u_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

ce qui est le premier résultat de la proposition. On écrit alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = S_n + R_n$$

Puis en isolant le reste de rang  $n$  et faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$ , on montre le dernier point. □

**Proposition 1.5 (Expression du terme générale à partir des sommes partielles et des restes) :**

Soit  $\sum u_n$  une série numérique. Alors

$$\forall n \geq 1, u_n = S_n - S_{n-1}$$

et si  $\sum u_n$  converge, alors en plus

$$\forall n \geq 1, u_n = R_{n-1} - R_n$$

*Démonstration :*

C'est facile. □

## 1.3 Opérations sur les séries convergentes

### 1.3.1 Linéarité

**Théorème 1.6 (Linéarité) :**

Soit  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries convergentes de  $\mathbb{K}$  et soit  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ .

Alors la série  $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$  est une série convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

*Démonstration :*

Ça se démontre facilement avec la définition d'une série convergente (suite des sommes partielles convergentes) et la structure de  $\mathbb{K}$ -ev des suites convergentes et la linéarité de la limite. □

**Corollaire 1.7 (Structure des séries convergentes) :**

L'ensemble des séries convergentes sur  $\mathbb{K}$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriels (de dimension infinie) et l'application  $\sum u_n \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  est une forme linéaire sur cet espace vectoriel.

**Exemple 1.6 :**

Montrer que si  $\sum u_n$  et  $\sum(u_n + v_n)$  converge, alors  $\sum v_n$  converge.

**!!! ATTENTION !!!**

Attention ! Pour écrire une relation du type

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$



il faut que chacun des termes ait un sens. Il faut donc que les trois séries engagées soient convergentes. Il faut donc vérifier la convergence des trois séries. Ce n'est pas parce que l'une converge que les deux autres aussi.

En fait, avec la remarque précédente et la structure de  $\mathbb{K}$ -ev, il suffit de vérifier la convergence de deux seulement des séries impliquées. Mais il faut tout de même le vérifier. Une seule ne suffit pas. Il est absolument nécessaire de vérifier la convergence d'au moins deux des séries. C'est même vitale. Exactement comme pour les suites. Ce qui permet d'éviter d'écrire des aberrations du type

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 0 = \sum_{n=0}^{+\infty} 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)$$

**Exemple 1.7 :**

Montrer que si  $\sum u_n$  converge et  $\sum v_n$  diverge, alors  $\sum (u_n + v_n)$  diverge également.

**!!! ATTENTION !!!**



Si  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  divergent, on ne peut rien dire de  $\sum (u_n + v_n)$ . Par exemple, pour  $u_n = 1$  et  $v_n = -1$ ,  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  divergent, mais  $\sum (u_n + v_n)$  converge.

Et dans l'autre sens, si  $u_n = 1 + 1/n^2$  et  $v_n = -1$ , alors  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  divergent, mais  $\sum (u_n + v_n) = \sum 1/n^2$  converge (de somme  $\zeta(2)$  que l'on reverra un peu plus loin).

## 1.3.2 Positivité

**Théorème 1.8 (Positivité de la somme) :**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$  une suite à termes positifs.

Si  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  converge, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \geq 0$$

*Démonstration :*

Par définition de la convergence d'une série, on a  $\left(\sum_{n=0}^N u_n\right)_{N \geq 0}$  converge vers  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ . Et comme la suite est à termes positifs, on a  $\forall N \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^N u_n \geq 0$ . Puis par passage à la limite dans les inégalités, on trouve le résultat.  $\square$

J'utiliserais souvent l'abréviation SATP pour "suite à terme positifs". Ce qui pourra également servir pour "série à terme positifs" (ce qui est rigoureusement la même chose).

**Proposition 1.9 (Croissance de la somme) :**

Soit  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites réelles vérifiant  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$ .

Si  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  convergent, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

*Démonstration :*

On pose  $w_n = v_n - u_n$ . C'est une suite à terme positifs et on peut appliquer la positivité de la somme pour une SATP.  $\square$

**Proposition 1.10 (Nullité) :**

Soit  $(u_n)$  une SATP.

Si  $\sum u_n$  converge et  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 0$ , alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0$$

*Démonstration :*

On note  $(S_n)$  la suite des sommes partielles. Alors  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$  donc la suite des sommes partielles est croissante. C'est également une SATP. Et elle converge vers 0. Donc par le théorème de la limite monotone, on a  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq S_n \leq 0$ . Donc  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n = 0$  ce qui nous donne immédiatement  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = 0$ .  $\square$

### 1.3.3 Cas complexe

**Théorème 1.11 (Conjugaison et convergence) :**

Soit  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ .

Si  $\sum z_n$  converge alors  $\sum \bar{z}_n$  converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \bar{z}_n = \overline{\sum_{n=0}^{+\infty} z_n}$$

*Démonstration :*

Il suffit de repasser aux sommes partielles et d'appliquer ce que l'on sait sur les suites. Une suite complexe converge si et seulement si la suite conjuguée converge. Et on finit avec la limite qui est une forme linéaire compatible avec la conjugaison.  $\square$

**Théorème 1.12 (Convergence d'une série complexe par la convergence des séries des parties réelles et imaginaires) :**

Soit  $(z_n)$  une suite complexe. On a équivalence entre :

- (i)  $\sum z_n$  converge
- (ii)  $\sum \Re(z_n)$  et  $\sum \Im(z_n)$  convergent

et dans ce cas :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \Re(z_n) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \Im(z_n)$$

*Démonstration :*

$(i) \implies (ii)$  Il suffit de se rappeler  $\Re(z_n) = 1/2(z_n + \bar{z}_n)$  et  $\Im(z_n) = 1/2(z_n - \bar{z}_n)$  et d'appliquer le résultat le précédent, la structure de  $\mathbb{C}$ -ev et enfin la linéarité de la somme.

$(ii) \implies (i)$  C'est encore plus bête :  $z_n = \Re(z_n) + i \Im(z_n)$ . Là encore, la structure de  $\mathbb{C}$ -ev

et la linéarité de la somme finissent le travail. □

## 1.4 Limite du terme général d'une série convergente

**Théorème 1.13 (Condition nécessaire de convergence d'une série [✓]) :**

Soit  $\sum u_n$  une série numérique.

Si  $\sum u_n$  converge, alors  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

*Démonstration :*

On a  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$u_n = S_n - S_{n-1}$$

Mais  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(S_{n-1})_{n \in \mathbb{N}^*}$  sont deux suites convergentes. Donc la différence est encore une suite convergente (puisque l'ensemble des suites numériques convergentes est un espace vectoriel) de limite, la différence des limites (la limite est linéaire). Donc  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

Mais comme ces deux suites ont la même limite  $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ , on trouve alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = S - S = 0$$

□

**Définition 1.5 (Divergence grossière) :**

Soit  $\sum u_n$  une série numérique.

On dit que  $\sum u_n$  diverge grossièrement si  $u_n \not\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .

**Remarque :**

En effet, on rappelle que  $\sum u_n$  converge  $\implies u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ . Donc par contraposition, on a  $u_n \not\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \implies \sum u_n$  diverge. Et c'est ce type de divergence de la série qu'on appelle divergence grossière.

**!!! ATTENTION !!!**



Toute série divergente ne diverge pas grossièrement. En fait, les séries qui diverge grossièrement sont les moins intéressantes. Justement parce qu'elles sont grossières. Elles sont donc très loin de converger et n'ont donc que peu d'intérêt. Les séries divergentes mais dont le terme général tend quand même vers 0 sont presque convergentes. Elles sont donc presque intéressantes. Donc elles peuvent avoir un intérêt quand même.

Mais attention aux raccourcis. Ce n'est pas parce que le terme général tend vers 0 que la série est convergente. Ce serait trop facile. Et ce n'est pas parce que la série diverge qu'elle diverge grossièrement. Ça ne suffit pas.

### Exemple 1.8 :

La série harmonique  $\sum 1/n$  diverge mais ne diverge pas grossièrement.

## 1.5 Cas des SATP

### Théorème 1.14 (Critère de convergence des SATP [✓]) :

Soit  $\sum u_n$  une série numérique telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$ . Alors on a équivalence entre

(i)  $\sum u_n$  converge

(ii)  $\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n u_k \leq M$  (i.e. la suite des sommes partielles est bornée).

*Démonstration :*

On note, comme à l'accoutumée,  $(S_n)$  la suite des sommes partielles. Alors  $(S_n)$  est une suite croissante. Et donc, par théorème de la limite monotone, elle est convergente si et seulement si elle est majorée. □

### Remarque :

Par contraposition, si  $\sum u_n$  est une SATP divergente, alors  $\sum_{k=0}^n u_k \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ .

### Exemple 1.9 :

Montrer que  $\sum \frac{1+\sin(n)}{n(n+1)}$  converge.

## 1.6 Comparaison entre SATP

### **Théorème 1.15 ([✓]) :**

Soit  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux SATP telles que  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n$ .

- (i) Si  $\sum v_n$  converge, alors  $\sum u_n$  converge
- (ii) Si  $\sum u_n$  diverge, alors  $\sum v_n$  diverge.

Dans le cas où les deux séries sont convergentes, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

*Démonstration :*

- (i) On a  $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n u_k \leq \sum_{k=0}^n v_k \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n = M$  (indépendant de  $n$ ). Donc  $\sum u_n$  est une SATP dont la suite des sommes partielles est majorée. Donc  $\sum u_n$  converge.
- (ii) c'est la contraposée du point précédent.

□

### **Remarque :**

Le résultat est identique si l'on a la relation de comparaison seulement APCR. En effet, enlever les premiers termes ne va enlever qu'un nombre fini d'élément et donc ne rien changer à la convergence.

### **Exemple 1.10 :**

Montrer que  $\sum 1/n^2$  converge.

### **Exemple 1.11 :**

Montrer que  $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n+1}$  diverge.

**Théorème 1.16 (Nature d'une SATP par équivalence [✓]) :**

Soit  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries numériques telles que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$  et  $v_n \geq 0$ .

Si  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$  alors  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  ont même nature.

*Démonstration :*

On sait qu'APCR, on a  $1/2v_n \leq u_n \leq 2v_n$ . Et comme ce sont des SATP, le théorème de comparaison des SATP nous fournit alors le résultat.  $\square$

**Exemple 1.12 :**

Déterminer la nature de  $\sum \frac{1}{n^2+n}$  et  $\sum \frac{1}{n+\sqrt{n}}$ .

**Remarque :**

Évidemment, on a une version similaire pour les série à terme négatif. On ne le précisera pas à chaque fois. Il suffit de multiplier par  $-1$ .

**!!! ATTENTION !!!**



Pour que le théorème fonctionne, il faut avoir des séries à termes de signes constants et de même signe. Sinon, ça ne fonctionne pas.

**Exemple 1.13 :**

On considère  $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$  et  $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ . Alors  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$  mais  $\sum u_n$  diverge, alors que  $\sum v_n$  converge. Voir le cas des séries alternées.

**Remarque :**

On sait que si  $u_n \sim v_n$ , alors les suites ont le même signe APCR. Donc dans la pratique, il suffira de

vérifier l'équivalence entre les deux suites puis le signe de l'une seule des deux. Le signe de la seconde suite sera alors obligatoirement comme il faut.

## 1.7 Convergence absolue

J'ai déjà laissé entendre au cours de l'année qu'il existait plusieurs type de continuité et également plusieurs types de convergence. Et bien voila un nouveau type de convergence.

Définition 1.6 (Convergence absolue, Convergence simple) :

Soit  $\sum u_n$  une série numérique (donc réelle ou complexe).

- On dit que  $\sum u_n$  converge absolument si  $\sum |u_n|$  converge.
- On dit que  $\sum u_n$  converge simplement si  $\sum u_n$  converge.

On notera que peu importe si  $\sum u_n$  est une suite réelle ou complexe,  $\sum |u_n|$  est toujours une SATP.

**Exemple 1.14 :**

La série  $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$  converge absolument

Je noterai souvent "cv" pour convergence, "cvs" pour convergence simple (pour insister) et "cva" pour convergence absolue.

**Théorème 1.17 (CVA  $\implies$  CVS [✓]) :**

Soit  $\sum u_n$  une série numérique.

Si  $\sum u_n$  converge absolument, alors  $\sum u_n$  converge et

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| \quad \text{[Inégalité triangulaire]}$$

*Démonstration :*

Il faut distinguer trois cas.

- (i) Supposons que  $\sum u_n$  est une SATP. Dans ce cas, il n'y a rien à démontrer. Elle est égale à la suite de ses valeurs absolues.
- (ii) Supposons que  $\sum u_n$  est une série réelle. On introduit les suites  $(u_n^+)$  et  $(u_n^-)$  définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n^+ = \max(0, u_n), \quad u_n^- = -\min(0, u_n)$$

Dans ce cas, les suites  $(u_n^+)$  et  $(u_n^-)$  sont deux SATP et on a  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = u_n^+ - u_n^-$  et  $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$ . Comme on a  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$0 \leq u_n^+, u_n^- \leq |u_n|$$

la comparaison des SATP nous permet de dire que  $\sum u_n^+$  et  $\sum u_n^-$  convergent. Dans ce cas, les séries  $\sum(u_n^+ - u_n^-)$  converge également comme somme de deux séries convergentes et donc  $\sum u_n$  converge en particulier. Et enfin,  $\forall N \in \mathbb{N}$ ,

$$\left| \sum_{n=0}^N u_n \right| \leq \sum_{n=0}^N |u_n|$$

ce qui nous donne le résultat final par passage à la limite.

- (iii) Supposons maintenant que  $\sum u_n$  est une suite complexe. On a alors  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $|\Re(u_n)|, |\Im(u_n)| \leq |u_n|$  et donc,  $\sum \Re(u_n)$  et  $\sum \Im(u_n)$  sont des séries convergentes en vertu du point précédent. Enfin, par combinaison linéaire, on en déduit que  $\sum u_n = \sum(\Re(u_n) + i\Im(u_n))$  est une série convergente. On peut alors écrire l'ingégalité triangulaires au niveau des sommes partielles et passer ensuite à la limite comme au dessus.

□

### Remarque :

On a donc

tous le temps : CVA  $\implies$  CVS  
 et  
 pour les SATP : CVA  $\iff$  CVS



Il n'y a pas équivalence ! La convergence simple n'implique PAS la convergence absolue. La convergence absolue est plus forte que la convergence simple. C'est plus dure de converger absolument que de converger simplement.



La raison essentielle est que dans la convergence absolue, on ne prend pas en compte les signes. Donc la série que l'on considère doit avoir les bonnes propriétés pour pouvoir converger indépendamment des considérations de compensation dû à des changements de signe. Alors que dans la convergence simple, la série pourrait être essentiellement moche mais les changements de signes pourraient compenser suffisamment la laideur de la série pour faire en sorte que globalement, la série converge.

Par exemple, la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$  converge simplement mais ne converge pas absolument.

**Exemple 1.15 :**

Montrer la convergence de la série

$$\sum \frac{\sin(n^2)}{(n+1)^2}$$

**Remarque (Semi-convergence) :**

En fait, les séries simplement convergentes mais qui ne sont pas absolument convergentes s'appellent des séries semi-convergentes. Cette notion est hors programme pour cette année.

**Remarque :**

On vient de voir ici une nouvelle forme de convergence : la convergence absolue. Un peu comme la continuité uniforme par rapport à la continuité simple. Il existe d'autres types de convergence mais qui ne sont toujours pas au programme et qui ne s'utilisent pas dans le cadre des séries. Vous en verrez une nouvelle l'année prochaine avec les séries entières (la convergence normale).

En tout, il existe 3 types de convergences. Il y a la convergence simple pour les suites ; la convergence simple et la convergence absolue pour les séries numériques ; la convergence simple, la convergence uniforme pour les suites de fonction ; la convergence simple, la convergence uniforme, la convergence absolue, la convergence normale pour les séries de fonctions.

Avec les séries entières de deuxième année, qui sont des séries de fonctions un peu particulières, vous verrez ces différents types de convergences.

**1.8 Convergence par relation de comparaison à une SATP**

On va utiliser les relations de comparaisons que l'on avait introduit sur les suites, c'est-à-dire que nous allons utiliser les équivalences de suites, les  $o$  et les  $O$ .



Pour que l'on puisse déduire quelque chose d'une relation de comparaison entre deux suites, il faudra toujours se ramener à des SATP. Si l'on a pas des SATP, on ne pourra rien dire.

**Théorème 1.18 (Comparaison à une SATP avec des  $O$  [✓]) :**

Soit  $\sum u_n$  une série numérique (réelle ou complexe) et  $\sum v_n$  une **SATP** (donc réelle) et telle que  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$ .

(i) Si  $\sum v_n$  converge, alors  $\sum u_n$  converge absolument et de plus

$$\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\sum_{k=n}^{+\infty} v_k\right)$$

(ii) Si  $\sum u_n$  diverge, alors  $\sum v_n$  diverge et de plus,

$$\sum_{k=0}^n u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\sum_{k=0}^n v_k\right)$$

*Démonstration :*

Par définition,  $\exists M \in \mathbb{R}_+$  et  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  tels que  $\forall n \geq n_0$ ,  $|u_n| \leq Mv_n$ . Comme  $\sum v_n$  converge, on a  $\sum u_n$  cva et donc cvs. Par ailleurs, au niveau des sommes partielles, par inégalités triangulaires, on a

$$\forall n \geq n_0, \left| \sum_{k=n_0}^n u_k \right| \leq \sum_{k=n_0}^n |u_k| \leq M \sum_{k=n_0}^n v_k$$

et donc en faisant tendre  $n$  vers l'infini,

$$\forall n \geq n_0, \left| \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k \right| \leq M \sum_{k=n_0}^{+\infty} v_k$$

d'où

$$R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\sum_{k=n_0}^{+\infty} v_k\right)$$

Le second point est essentiellement la contraposée du premier point. Il faut juste montrer la relation de comparaison. On a  $\forall n \geq n_0$ ,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^n u_k \right| &\leq \left| \sum_{k=0}^{n_0} u_k \right| + \sum_{k=n_0+1}^n |u_k| \\ &\leq cst + M \sum_{k=n_0+1}^n v_k \\ &\leq cst + M \sum_{k=0}^n v_k \end{aligned}$$

La constante est indépendante de  $n$  et positive. Et  $\sum v_n$  est une SATP divergente, donc  $cst \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\sum_{k=0}^n v_k\right)$ . Donc  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists n_1 \geq n_0$  tel que  $\forall n \geq n_1$ ,  $\left| \sum_{k=0}^n u_k \right| \leq (\varepsilon + M) \sum_{k=0}^n v_k$ . Finalement, en prenant  $\varepsilon = M$  par exemple, on a  $\forall n \geq n_1$ ,  $\left| \sum_{k=0}^n u_k \right| \leq 2M \sum_{k=0}^n v_k$ . Autrement dit,  $\sum_{k=0}^n u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\sum_{k=0}^n v_k\right)$ .  $\square$

On obtient un résultat similiaire pour les  $o$  et  $\sim$ .

**Corollaire 1.19 (Comparaison à une SATP avec des  $o$ ) :**

Soit  $\sum u_n$  une série numérique (réelle ou complexe) et  $\sum v_n$  une **SATP** (donc réelle) et  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$ .

(i) Si  $\sum v_n$  converge, alors  $\sum u_n$  converge absolument et de plus,

$$\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\sum_{k=n}^{+\infty} v_k\right)$$

(ii) Si  $\sum u_n$  diverge, alors  $\sum v_n$  diverge et de plus,

$$\sum_{k=0}^n u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\sum_{k=0}^n v_k\right)$$

**Corollaire 1.20 (Comparaison à une SATP avec des  $\sim$ ) :**

Soit  $\sum u_n$  une série réelle et  $\sum v_n$  une **SATP** (donc réelle) et  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ .

(i) Si  $\sum v_n$  converge, alors  $\sum u_n$  converge absolument et de plus,

$$\sum_{n=N}^{+\infty} u_n \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{n=N}^{+\infty} v_n$$

(ii) Si  $\sum u_n$  diverge, alors  $\sum v_n$  diverge.

$$\sum_{n=0}^N u_n \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{n=0}^N v_n$$

Les deux démonstrations précédentes sont très similaires à la précédente. Dans le cas  $o$ , on remplace simplement les  $O$  par des  $o$  et les  $M$  par des  $\varepsilon > 0$ . Dans le cas  $u_n \sim v_n$ , on utilise la caractérisation  $u_n - v_n = o(v_n)$  et reprendre le résultat sur les  $o$ .

**Exemple 1.16 :**

Déterminer la nature de la série  $\sum \frac{e^{-n} \sin(n) + \cos(n)}{(n^3 - n + 6) \sin(1/n)}$ .



Il est indispensable de se référer à une SATP. Si on ne compare pas à une SATP, tout peut devenir faux.

**Contre-exemple :**



On considère  $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$  et  $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ . On peut montrer facilement que  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ . De plus,  $\sum v_n$  converge (voir les séries alternées) alors que  $\sum u_n$  diverge à cause de la série harmonique.

**Contre-exemple :**



On pose  $u_n = 1/n$  et  $v_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ . Alors  $\sum u_n$  diverge (série harmonique) mais  $\sum v_n$  converge (voir les séries alternées). Pourtant  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$ .

**Remarque :**

Dans le cas des équivalences, comme deux suites équivalentes ont le même signe, dès que l'une est de signe constant, la seconde le sera aussi. Ce qui n'est pas le cas pour les autres relations de comparaisons.

## 1.9 Produit de Cauchy

Définition 1.7 (Produit de Cauchy) :

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ .

On définit le *produit de Cauchy* des deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  par la suite  $(w_n)$

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^n u_{n-k} v_k = \sum_{p+q=n} u_p v_q.$$

**Proposition 1.21 (Produit de Cauchy de séries absolument convergentes) :**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  et  $(w_n)$  la suite des produit de Cauchy associée.

Si  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont absolument convergentes, alors  $\sum w_n$  est absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right).$$

*Démonstration :*

Commençons par le cas des SATP. Posons  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n$ ,  $V_n$  et  $W_n$  les sommes partielles des trois suites  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$ . On a alors

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, W_n &= \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k u_i v_{k-i} \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq n \\ i+j=k}} u_i v_j \\ &= \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq n \\ i+j \leq n}} u_i v_j \\ &\leq \sum_{0 \leq i, j \leq n} u_i v_j && \text{car } u, v \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}} \\ &= \left( \sum_{i=0}^n u_i \right) \left( \sum_{j=0}^n v_j \right) \\ &\leq \left( \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right) \end{aligned}$$

Donc  $\sum_{n \in \mathbb{N}} w_n$  converge par critère de convergence des SATP. On a alors automatiquement, par passage à la limite dans les inégalités ou par théorème de limite monotone,  $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n \leq \left( \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right)$ .

De plus,

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, U_n V_n &= \left( \sum_{i=0}^n u_i \right) \left( \sum_{j=0}^n v_j \right) \\ &= \sum_{0 \leq i, j \leq n} u_i v_j \\ &= \sum_{\substack{i, j \in \mathbb{N} \\ i, j \leq n}} u_i v_j \\ &\leq \sum_{\substack{i, j \in \mathbb{N} \\ i+j \leq 2n}} u_i v_j && \text{car SATP} \\ &= \sum_{k=0}^{2n} \sum_{i+j=k} u_i v_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{2n} \sum_{j=0}^k u_j v_{k-j} \\
&= \sum_{k=0}^{2n} w_k \\
&= W_{2n}
\end{aligned}$$

Avec les deux calculs précédents, on a donc  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $W_n \leq U_n V_n \leq W_{2n}$ . Or  $(W_n)$  converge (suite des sommes partielles),  $(U_n)$  et  $(V_n)$  également, donc, par sous-suite d'une convergente et par passage à la limite dans les inégalités, on en déduit  $W = UV$ , *i.e.*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right).$$

Revenons au cas général. On considère donc  $(u_n), (v_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  absolument convergentes, et la suite  $(w_n)$  obtenu par produit de Cauchy des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ . On pose  $(U_n), (V_n), (W_n)$  les suites des sommes partielles respectives de  $(u_n), (v_n)$  et  $(w_n)$  et  $(U'_n), (V'_n)$  les suites des sommes partielles des suites  $(|u_n|), (|v_n|)$  respectivement. On note enfin  $(W'_n)$  la suite obtenue par produit de Cauchy de  $(|u_n|)$  et  $(|v_n|)$ .

Alors, par inégalité triangulaire,

$$\forall n \in \mathbb{N}, |w_n| \leq \sum_{k=0}^n |u_k| |v_{n-k}|.$$

Or, par le cas précédent, la série de terme générale  $(\sum_{k=0}^n |u_k| |v_{n-k}|)$  est une SATP convergente. Donc, par comparaison de SATP,  $\sum |w_n|$  converge. Et donc  $\sum w_n$  converge absolument.

De plus,

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}, |U_n V_n - W_n| &= \left| \sum_{0 \leq i, j \leq n} u_i v_j - \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq n \\ i+j \leq n}} u_i v_j \right| \\
&= \left| \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq n \\ i+j > n}} u_i v_j \right| \\
&\leq \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq n \\ i+j > n}} |u_i v_j| && \text{inég. tri} \\
&= \sum_{0 \leq i, j \leq n} |u_i| |v_j| - \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq n \\ i+j \leq n}} |u_i| |v_j| \\
&= U'_n V'_n - W'_n
\end{aligned}$$

Or  $(W'_n)$  correspond à la suite des sommes partielles de la série produit de Cauchy des suites  $(|u_n|)$  et  $(|v_n|)$  dont les suites des sommes partielles sont  $(U'_n)$  et  $(V'_n)$ . Donc, d'après le cas précédent  $(W'_n)$  converge vers la même limite que le produit  $(U'_n V'_n)$ . Autrement dit,  $U'_n V'_n - W'_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

## 2 CRITÈRES DE CONVERGENCES

---

Donc  $U_n V_n - W_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Et donc, par unicité de la limite,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right).$$

□

### Exemple 1.17 :

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  telle que  $\sum u_n$  est absolument convergente. Soit  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n 2^k u_k$ .  
Montrer que la série  $\sum v_n$  est absolument convergente et déterminer sa somme.

## 2 Critères de convergences

### 2.1 Séries de références

Pour justifier des convergences (ou divergence) de séries, on peut se ramener à des séries de références et utiliser des comparaisons des termes généraux.

#### Théorème 2.1 (Séries de Riemann [✓]) :

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

La série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$  converge si, et seulement si,  $\alpha > 1$ .

*Démonstration :*

Supposons  $\alpha \leq 1$ .

Alors  $\forall n \geq 1, \frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$ . Or la série harmonique diverge, donc par comparaison des SATP,  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$  diverge.

Supposons  $\alpha > 1$ .

La fonction  $x \mapsto 1/x^\alpha$  est décroissante sur  $]0, +\infty[$ . Donc  $\forall k \geq 2, \forall x \in [k-1, k], \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{x^\alpha} \leq \frac{1}{(k-1)^\alpha}$  et donc, par intégration,

$$\forall k \geq 2, \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^k \frac{dx}{x^\alpha}$$

On en déduit facilement par sommation,

$$\forall n \geq 2, \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_1^n \frac{dx}{x^\alpha} = \left[ \frac{-1}{\alpha-1} \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right]_1^n = \frac{1}{\alpha-1} \left( 1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \right) \leq \frac{1}{\alpha-1}$$

Et en notant  $(S_n)$  la suite des sommes partielles de la série  $\sum_{n \geq 1} 1/n^\alpha$ , on obtient donc

$$\forall n \geq 2, S_n = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \frac{1}{\alpha - 1} = M$$

Donc la série des sommes partielles est majorée. Mais d'autre part, la série est une SATP donc par caractérisation des SATP convergente, la série  $\sum_{n \geq 1} 1/n^\alpha$  converge.  $\square$

**Remarque :**

Attention à ne pas confondre SÉRIES de Riemann et SOMMES de Riemann.

**Remarque (Fonction  $\zeta$  de Riemann) :**

On notera donc  $\zeta$  la fonction définie sur  $]1, +\infty[$  qui vérifie

$$\forall \alpha > 1, \zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

En particulier, on retiendra :

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

**Exemple 2.1 :**

Discuter (ou rediscuter) de la nature de  $\sum 1/n$ ,  $\sum 1/n^2$ ,  $\sum 1/\sqrt{n}$ .

**Remarque :**

Puisque  $\sum_{n \geq 1} 1/n^\alpha$  est une SATP, il est possible de s'en servir comme point de comparaison pour déterminer la nature d'une série. Et c'est d'ailleurs ce qu'il faut faire. Une fois qu'on se donnera une série, on essaiera de la comparer ( $\sim$ ,  $o$ ,  $O$ ,  $\leq$ ) à une série de Riemann qui nous permettra de déterminer la convergence de la série à étudier. Il faudra donc bien choisir le  $\alpha$  et la relation de comparaison pour pouvoir en déduire ce que l'on veut.

Attention cependant, ça ne marche pas à tous les coups. Les séries de Riemann sont bien, mais pas encore assez pour donner la nature de toutes les séries. Par exemple, avec seulement les séries de Riemann, il n'est pas possible de déterminer la nature de la série  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n}$ .

On retiendra donc :

**Comparaison à une série de Riemann**

- (i) Si  $u_n \not\rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$ , alors  $\sum u_n$  diverge grossièrement

(ii) Si  $u_n \sim \frac{C}{n^\alpha}$  avec  $C \neq 0$ , alors  $\sum u_n$  converge ssi  $\alpha > 1$ .

(iii) Si  $u_n = o(1/n^\alpha)$  avec  $\alpha > 1$ , alors  $\sum u_n$  cva

(iv) Si  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{C}{n}$  avec  $C \neq 0$ , alors  $\sum u_n$  diverge.

**Exemple 2.2 (Série de Bertrand) :**

Montrer que  $\forall \alpha > 1$  et  $\forall \beta \in \mathbb{R}$ , la série

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$$

est convergente.

**Exemple 2.3 :**

Déterminer la nature des séries

$$\sum \frac{\cos(n)}{n^3}, \quad \sum e^{-n^\beta}, \quad \sum (n \ln(1 + 1/n) - \cos(1/\sqrt{n})), \quad \sum \frac{\arctan(n)}{\sqrt{n+1}}.$$

**Proposition 2.2 (Série géométrique) :**

Soit  $q \in \mathbb{C}$ .

$\sum q^n$  converge si et seulement si  $|q| < 1$  et dans ce cas  $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ . La série diverge grossièrement sinon.

*Démonstration :*

Bon. Passons. □

**Théorème 2.3 (Série exponentielle) :**

La série  $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$  converge pour tout  $z \in \mathbb{C}$  et

$$\forall z \in \mathbb{C}, e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

*Démonstration :*

On a déjà démontré ce résultat dans un exercice dans le chapitre d'intégration dans le cas d'une variable réelle.

Par conséquent, la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$  est une série absolument convergente. Donc elle converge. Le calcul de la somme se fait similairement au cas réel.  $\square$

**Exemple 2.4 :**

Montrer que la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$  converge pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et calculer sa somme.

**Exemple 2.5 :**

Montrer que la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{z^{2n+1} + z^{n+1}}{n!}$  converge et calculer sa somme.

## 2.2 Critère de convergence

**Théorème 2.4 (Règle de D'Alembert [✓]) :**

Soit  $\sum u_n$  une série numérique telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 0$  et

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

Alors :

- (i) Si  $\ell > 1$ , alors  $\sum u_n$  diverge grossièrement
- (ii) Si  $\ell < 1$ , alors  $\sum u_n$  converge absolument
- (iii) Si  $\ell = 1$ , on ne peut rien conclure (il faut étudier au cas par cas)

*Démonstration :*

- (i) Comme  $\ell > 1$ , on sait  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq n_0, |u_{n+1}/u_n| \geq 1$ . Donc la suite  $(|u_n|)$  est croissante. Dans ce cas, elle ne peut converger vers 0 que si elle est constante égale à 0 puisque c'est une suite positive. Mais c'est exclu par hypothèse. Donc elle ne tend pas vers 0 et donc la série diverge grossièrement.

- (ii) On se place dans le cas  $\ell < 1$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Donc  $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \ell - \varepsilon \leq |u_{n+1}/u_n| \leq \ell + \varepsilon$ . Autrement dit  $|u_{n+1}| \leq (\ell + \varepsilon)|u_n|$ . Puis par une récurrence simple, on a  $\forall n \geq n_0, |u_n| \leq (\ell + \varepsilon)^{n-n_0}|u_{n_0}| = M(\ell + \varepsilon)^n$  avec  $M = \frac{|u_{n_0}|}{(\ell + \varepsilon)^{n_0}}$ .  
On choisit alors  $\varepsilon > 0$  tel que  $0 < \ell + \varepsilon < 1$ . Alors dans ce cas on a  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O((\ell + \varepsilon)^n)$ .  
Et  $\sum (\ell + \varepsilon)^n$  converge. Donc  $\sum u_n$  converge absolument.
- (iii) On prend  $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On sait alors que  $\sum u_n$  converge si et seulement si  $\alpha > 1$ . Et pourtant  $u_{n+1}/u_n \rightarrow 1$ . Donc ça dépend des fois.

□

**Remarque :**

Ce critère est particulièrement intéressant pour les séries dont le terme général est un produit, donc dont le rapport  $u_{n+1}/u_n$  est plus simple que l'expression de base. Typiquement, ce critère de convergence prend tous son sens avec des séries dont le terme général est composé de factoriel. Mais pas que, bien sûr.

**Exemple 2.6 :**

Déterminer la nature de  $\sum_{n \geq 0} u_n$  avec  $u_n = \frac{1}{\binom{2n}{n}}$ .

**Exemple 2.7 :**

Déterminer les  $x \in \mathbb{R}$  tel que la série  $\sum_{n \geq 0} (n^2 + 1)2^{n+1}x^n$  converge (ce genre de séries s'appellent des séries entières que vous étudierez en détail l'année prochaine).

**Exemple 2.8 :**

Étudier la nature de la série  $\sum \frac{n!}{n^n}$  de deux façons différentes.

**Remarque :**

Il existe d'autres critères de convergence. Comme la règle de Raabe-Duhamel, la règle d'Abel etc. Seul le critère de D'Alembert est au programme.

### 2.3 Cas des séries alternées

Définition 2.1 (Série alternée) :

Une suite réelle  $(u_n)$  est dite alternée si les signes de chacun de ses termes sont alternés, autrement dit  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n u_{n+1} \leq 0$ . Ou bien encore  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n |u_n|$  ou  $u_n = (-1)^{n+1} |u_n|$ .

Le critère spécial de convergence des séries alternées n'est officiellement pas au programme de sup. Mais la méthode (*i.e.* la démonstration) de convergence, elle, l'est. Et le critère spécial des séries alternées est au programme de deuxième année (sauf de la PT). Donc autant le voir directement. Ça simplifie grandement la vie.

**Exemple 2.9 :**

Les séries  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$  et  $\sum_{n \geq 1} \ln \left( 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right)$  sont des séries alternées. Mais la série  $\sum \cos((12n+5)\pi/12)$  est également une série alternée.

**Théorème 2.5 (Théorème spécial des séries alternées (TSSA)) :**

Soit  $\sum u_n$  une série alternée.

Si  $(|u_n|)$  est décroissante et convergente vers 0, alors  $\sum u_n$  converge et de plus,

- $\forall n \in \mathbb{N}, R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$  est du signe de  $u_{n+1}$
- $\forall n \in \mathbb{N}, |R_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \right| \leq |u_{n+1}|$

*Démonstration :*

Sans perte de généralité, on peut supposer que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n |u_n|$ . On va montrer que  $(S_{2n})$  et  $(S_{2n+1})$  sont adjacentes.

Commençons par le plus facile. On a  $S_{2n+1} - S_{2n} = u_{2n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ . Soit maintenant  $n \in \mathbb{N}$ .  $S_{2n+1} - S_{2n-1} = u_{2n+1} + u_{2n} = |u_{2n}| - |u_{2n+1}| \geq 0$  puisque la suite  $(|u_n|)$  est décroissante. Donc  $(S_{2n+1})$  est croissante. Et  $S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} + u_{2n+1} = |u_{2n+2}| - |u_{2n+1}| \leq 0$  pour la même raison. Donc  $(S_{2n})$  et  $(S_{2n+1})$  sont adjacentes.

Ces deux suites sont donc convergentes. Donc la suite  $(S_n)$  est convergente et par définition d'une série convergente,  $\sum u_n$  est convergente. Et on a donc  $\forall n \in \mathbb{N}, S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$  avec  $S$  la somme de la série. Puis, par différence,  $\forall n \in \mathbb{N}, -R_{2n+1} \leq 0 \leq -R_{2n}$ . Autrement dit,  $\forall n \in \mathbb{N}, R_n = (-1)^n |R_n|$  et donc  $R_n$  est du même signe que  $u_n$ .

On utilisant  $\forall n \in \mathbb{N}, R_n = S - S_n$ , on obtient  $u_{2n+1} \leq R_{2n} \leq 0$  et  $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n} \leq S_{2n+2}$  nous fournit  $0 \leq R_{2n+1} \leq u_{2n+2}$ . On a donc  $R_{2n} \in [u_{2n+1}, 0]$  et  $R_{2n+1} \in [0, u_{2n+2}]$  ce qui termine la démo.  $\square$

Les séries alternées donnent facilement des exemples qui ne convergent pas absolument mais qui convergent simplement, comme par exemple la série  $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ .

**Exemple 2.10 :**

Déterminer la nature de  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$  et  $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n^3+n}$ .

**Exemple 2.11 :**

On considère  $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$  et  $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ . Alors  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$  mais  $\sum u_n$  diverge, alors que  $\sum v_n$  converge.



Le CSSA n'est qu'une implication. La réciproque est fautive. Il existe des séries alternées convergentes qui ne vérifient pas le CSSA. Par exemple, la série  $\sum_{n \geq 1} u_n$  est une série alternée convergente pour  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{2n+1} = -\frac{1}{2^n}$  et  $\forall n \geq 1$ ,  $u_{2n} = \frac{1}{n^2}$ . Et pourtant, elle ne vérifie pas le CSSA (la suite  $(|u_n|)$  n'est pas décroissante).

Cependant, on notera que la condition de convergence de la suite est une condition nécessaire : toute série alternée convergente vérifiera obligatoirement au moins cette condition. Donc seul la condition de décroissance peut échouer.

## 3 Applications

### 3.1 Comparaison série/intégrale

La proposition suivante est une "astuce" classique que l'on a déjà utilisée plusieurs fois.

#### Comparaison série / intégrale

- Pour une série de la forme  $\sum f(n)$ .
- Vérifier que  $f$  est monotone sur  $\mathbb{R}_+$ .
- Donner un encadrement de  $f$  sur chacun des intervalles  $[k, k+1]$  pour  $k \in \mathbb{N}$ .
- Intégrer l'encadrement, puis sommer.
- Conclure.

Plus concrètement, dans le cas où  $f$  est décroissante et positive, on a :  $\forall n \in \mathbb{N}$  et  $\forall t \in [n, n+1]$ ,  $f(n+1) \leq f(t) \leq f(n)$ . On en déduit donc, par croissance de l'intégrale,

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t) dt \leq f(n)$$

Puis, par sommation et la relation de Chasles, on a

$$\forall N \geq 0, \sum_{k=0}^N f(k+1) = \sum_{k=1}^{N+1} f(k) \leq \int_0^{N+1} f(t) dt \leq \sum_{k=0}^N f(k)$$

Mais par ailleurs, la suite des intégrales est une suite croissante puisque la fonction est positive. Donc, par théorème de la limite monotone, si elle converge, elle est majorée et donc la suite des sommes partielles également, ce qui entraîne la convergence de la série.

En particulier :

### Proposition 3.1 :

Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  décroissante, positive et continue par morceaux.

Alors  $\sum f(n)$  converge si et seulement si  $\left( \int_{n_0}^n f(t) dt \right)_{n \geq n_0}$  est une suite convergente.

*Démonstration :*

$\left( \int_{n_0}^n f(t) dt \right)_n$  converge ssi la suite est majorée (suite croissante) ssi la suite  $\left( \sum_{k=0}^n f(k) \right)_n$  est majorée (comparaisons série/intégrale) ssi  $\sum f(n)$  converge (critère de convergence des SATP).  $\square$

### Exemple 3.1 (Constante d'Euler) :

Montrer que  $\exists \gamma \geq 0$  tel que  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1)$ .

La constante d'Euler a été calculé pour la première fois par Euler en 1781 avec 15 décimales. En 1790, Mascheroni en a calculé 19 décimales. Et depuis 2009, on connaît un peu plus de 30 milliards de décimal de  $\gamma$ .

### Exemple 3.2 (Fonction $\zeta$ de Riemann) :

On définit la fonction  $\zeta$  de Riemann par

$$\forall s > 1, \zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

Montrer que la fonction  $\zeta$  est bien définie.

C'est Riemann qui conjecture le premier (et démontre sa conjecture un peu plus tard) que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ . C'est lui aussi qui introduit le premier cette fonction (pas tout à fait en ces termes).

Elle jouera un rôle très important en théorie des nombres. Cette fonction est très liée à la répartition des nombres premiers (à leurs position, et même encore mieux : les zéros de  $\zeta$  donnent les nombres premiers).

**Exemple 3.3 (Série de Bertrand) :**

Montrer que la série  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$  converge si et seulement si  $\alpha > 1$  ou  $\alpha = 1$  et  $\beta > 1$ .

D'une certaine manière, les séries de Bertrand permettent de combler les "trous" entre deux séries de Riemann "successives". Les séries de Bertrand permettent d'affiner le peigne des séries convergentes de références. Mais "entre deux séries de Bertrand successives", il reste encore tout un monde. On pourrait alors introduire les séries  $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta \ln(\ln(n))^\gamma}$ . Etc.

### 3.2 Développement décimal

On ne donne ici que quelques exemples d'applications. On peut en trouver beaucoup d'autres. Et vous en verrez certains l'année prochaine.

**Proposition 3.2 (Développement décimal) :**

On note  $E = \{(d_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \{0, \dots, 9\}^{\mathbb{N}^*}, (d_n) \text{ non stationnaire en } 9\}$ . Alors  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists! N \in \mathbb{N}$  et  $\exists! (d_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in E$  tel que

$$x = N + 0, d_1 d_2 \dots = N + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n}{10^n}.$$

En particulier,  $N = \lfloor x \rfloor$  et  $\forall n \in \mathbb{N}^*, d_n = \lfloor 10^n x \rfloor - 10 \lfloor 10^{n-1} x \rfloor$ .

*Démonstration (Sketch) :*

Il faut ici montrer d'abord que les série  $\sum d_k/10^k$  converge, montrer l'unicité, l'existence et que dans l'existence, on a pas de suite stationnaire en 9.

Observons le dernier cas. On a  $\sum 9/10^k$  est seulement 9 fois la série  $\sum 1/10^k$  qui converge puisque c'est une série géométrique de raison  $1/10$ . La somme est alors  $\sum_{k=0}^{+\infty} 9/10^k = 9 \sum_{k=0}^{+\infty} 1/10^k = \frac{9}{1-1/10} = 10$  que l'on peut exprimer égale sous la forme  $10^1(1 + 0 + \dots)$ . Et la même chose se produit pour les suites stationnaires en 9. Ce ne sont que des décalages de celle-ci.

Le reste n'est pas très dur. La convergence peut s'obtenir par le critère de D'Alembert ou mieux :  $\frac{d_n}{10^n} = O(1/10^n)$  et les comparaisons à des SATP terminent le travail. Si  $x_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$  (approximation décimale par défaut de  $x$ ), alors  $x_n \rightarrow x$ . Or  $\frac{d_n}{10^n} = x_n - x_{n-1}$  et donc la série est une série télescopique de somme  $x - x_0 = x - \lfloor x \rfloor$ .

De plus, la suite  $(d_n)$  n'est pas stationnaire en 9. Si elle l'était, on pourrait considérer  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $10^p x$  a une partie décimale qui n'est composée que de 9. Et donc  $10^p x = 1$ . Et donc  $x = 10^{-p}$ . Et donc si  $n > p$ , on a  $d_n = \lfloor 10^n x \rfloor - 10 \lfloor 10^{n-1} x \rfloor = 0$  ☹.

L'unicité s'obtient aussi facilement par unicité de la limite. □

### Exemple 3.4 :

Par l'argument de la diagonale descendante de Cantor, on peut montrer que  $[0, 1[$  (et donc  $\mathbb{R}$ ) n'est pas dénombrable.

En effet, raisonnons par l'absurde et supposons que  $[0, 1[$  soit dénombrable. Soit  $(x_n)_{n \geq 1}$  la liste des éléments de  $[0, 1[$ . Chaque  $x_i$  a un développement décimal sous la forme  $x_i = 0, d_{i,1} d_{i,2} \dots d_{i,i} \dots$ . On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } d_{n,n} \neq 1 \\ 2 & \text{si } d_{n,n} = 1 \end{cases}$$

et on pose  $y = 0, a_1 a_2 a_3 \dots = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k}$  (ce qui a un sens puisque la série converge). Alors  $y \in ]0, 1[$  et  $\forall n \in \mathbb{N}^*, y \neq x_n$  par construction.

On vient donc de construire un élément de  $]0, 1[$  qui n'est pas dans  $[0, 1[$ . ☹. Donc  $[0, 1[$  n'est pas dénombrable.

### Exemple 3.5 (Paradoxe de Zénon) :

Les paradoxes de Zénon ont été créés par Zénon d'Élée pour illustrer le principe de Parménide selon laquelle toute évidence des sens est fallacieuse. Autrement dit, ce sont des paradoxes qui vont dans le sens de l'intuition mais qui aboutissent à des contradictions logiques. Les paradoxes imaginés par Zénon sont essentiellement équivalents les uns aux autres. Le plus connus étant le paradoxe d'Achille et la tortue.

On va se contenter de la version du paradoxe de dichotomie énoncé par Aristote :

Si sur une grandeur  $d$ , on prend la moitié, puis la moitié de la moitié puis encore la moitié du reste, et ainsi de suite sans limitation de divisions, la grandeur obtenue en additionnant une moitié de chaque division successive (division appelée dichotomie) ne pourra jamais être égale exactement à la distance  $d$ . Avant d'arriver à son but, un mobile doit arriver à la moitié de son parcours. Mais auparavant, il doit arriver à la moitié de la moitié... Le mobile doit parcourir une quantité infinie d'unités d'espace. Il n'arrivera donc jamais à son but.

Il est facile de voir comment peut arriver Achille et la tortue dans l'histoire. Quoiqu'il en soit, montrer que la flèche atteint bien son but.

[Voir dernière page]

### 3.3 Fonction exponentielle

Définition-Propriété 3.1 (Exponentielle complexe (définition par les séries)) :

On définit

$$\forall z \in \mathbb{C}, \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

*Démonstration :*

La série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$  est absolument convergente car  $\frac{z^n}{n!} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(1/n^2)$  et par comparaison à des série à termes positifs.  $\square$

**Remarque :**

C'est une autre définition de la fonction exponentielle. Il faut encore montrer que cette fonction exponentielle coïncide bien avec la fonction que l'on connaît.

**Proposition 3.3 (Propriété multiplicative de l'exponentielle) :**

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, \exp(z + z') = \exp(z) \exp(z').$$

*Démonstration :*

C'est un corollaire immédiat des séries de Cauchy : les séries  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{z'^n}{n!}$  sont absolument convergentes, donc par produit de Cauchy,  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^n \frac{z^k z'^{n-k}}{k!(n-k)!}$  est absolument convergente et

$$\begin{aligned} \exp(z) \exp(z') &= \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z'^n}{n!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^k z'^{n-k}}{k!(n-k)!} && \text{produit Cauchy} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k z'^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k z'^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (z + z')^n && \text{Newton} \\ &= \exp(z + z') \end{aligned}$$

□

**Corollaire 3.4 (Morphisme de groupe) :**

La fonction  $\exp$ , au sens des séries, est un morphisme de groupe de  $(\mathbb{C}, +)$  dans  $(\mathbb{C}^*, \times)$ .

*Démonstration :*

On a déjà la compatibilité par rapport aux LCI. Il reste à vérifier que  $\exp$  est bien à valeur dans  $\mathbb{C}^*$ .  
Mais

$$\forall z \in \mathbb{C}, \exp(z) \exp(-z) = \exp(z - z) = \exp(0) = 1 \neq 0.$$

Et donc  $\forall z \in \mathbb{C}, \exp(z) \neq 0$ . □

**Remarque :**

En particulier,

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \exp(x + iy) = \exp(x) \exp(iy).$$

**Proposition 3.5 (Propriétés analytiques de  $\exp$ ) :**

La fonction  $\exp$  définie comme somme de la série  $\sum z^n/n!$  vérifie les propriétés :

1.  $\exp(0) = 1$
2.  $\exp|_{\mathbb{R}}$  est dérivable en 0 et  $(\exp|_{\mathbb{R}})'(0) = 1$
3.  $\exp|_{\mathbb{R}}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}, (\exp|_{\mathbb{R}})'(x) = \exp|_{\mathbb{R}}(x)$ .

Donc la fonction  $\exp$  obtenue par somme d'une série correspond donc à la fonction exponentielle donnée dans le cours d'analyse. Donc les deux fonctions coïncident. Et donc, on a une autre définition de la fonction exponentielle. Ce qui peut être utile.

**Remarque :**

Les séries de la forme  $\sum u_n x^n$  s'appellent des séries entières. Tout un chapitre de spé est consacré à l'étude de ces séries et notamment de leur propriétés analytiques (domaine de définition, de convergences, de dérivabilité etc).

La fonction exponentielle est donc une série entière.

Dans la suite, on va reconstruire des propriétés bien connues. Évidemment, on ne peut utiliser ce qu'on sait déjà. Le but est de retrouver les propriétés à partir de la seule définition en tant que somme de séries.

*Démonstration :*

Soit  $x \in \mathbb{R}^*$ .

$$\frac{\exp(x) - \exp(0)}{x} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}.$$

Si  $x \in ]-1, 1[$ , alors  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $|x|^n \leq |x|$  et donc

$$\left| \frac{\exp(x) - \exp(0)}{x} - 1 \right| = \left| \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} \right| \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{|x|^{n-1}}{n!} \leq |x| \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!} = |x|(e - 2) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

en utilisant les inégalités sur les séries absolument convergentes.

Donc  $\exp$  est dérivable en 0 et  $\exp'(0) = 1$ .

Enfin, si  $x \in \mathbb{R}$  et  $h \neq 0$ ,

$$\frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \exp(x) \frac{\exp(h) - \exp(0)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \exp(x)$$

et donc le dernier résultat. □

### Proposition 3.6 (Fonctions cos et sin) :

On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad \text{et} \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

*Démonstration :*

En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre  $2n$ , on a

$$\left| \cos(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \right| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Or, par croissance comparée,  $\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Donc la série  $\sum \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$  converge de somme  $\cos(x)$ .

On raisonne de façon similaire pour le sinus. □

### Remarque :

On a donc autre également une autre définition de cos et sin comme somme de séries entières.

**Proposition 3.7 (Lien entre exponentielle et cos et sin) :**

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(ix) = \cos(x) + i \sin(x).$$

*Démonstration :*

Par définition,  $\exp(ix) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n x^n}{n!}$ .

Les séries  $\sum \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$  et  $\sum \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$  convergent. Donc par combinaison linéaire de suite de séries convergentes et par regroupement par paquet sur une série absolument convergente

$$\exp(ix) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^{2n} x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos(x) + i \sin(x).$$

□

**Remarque :**

On peut en déduire entre autre  $|\exp(ix)|^2 = \cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$ .

**Remarque :**

L'application  $x \mapsto \exp(ix)$  est un morphisme de groupe de  $(\mathbb{R}, +)$  dans  $(\mathbb{U}, \times)$ .

**Définition-Propriété 3.2 (Définition de  $\pi$ ) :**

Si on note  $\varphi : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{U}, \times)$  définie par  $\varphi(x) = \exp(ix)$ , alors  $\exists! \alpha > 0$  tel que  $\ker(\varphi) = \alpha\mathbb{Z}$ .

On définit  $\pi \in \mathbb{R}$  par  $\pi = \frac{\alpha}{2}$ .

*Démonstration :*

$\ker(\varphi) = \{x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = 1\}$  est une sous-groupe de  $(\mathbb{R}, +)$ . Donc  $\ker(\varphi)$  est soit de la forme  $\alpha\mathbb{Z}$  avec  $\alpha \geq 0$ , soit dense dans  $\mathbb{R}$ .

On a  $\cos(0) = 1$  et  $\exists \varepsilon > 0$  tel que  $\forall x \in ]-\varepsilon, \varepsilon[ \setminus \{0\}, \cos(x) < 1$ . Alors  $\ker(\varphi) \cap ]-\varepsilon, \varepsilon[ = \emptyset$ . Donc  $\ker(\varphi)$  n'est pas dense.

Donc  $\exists \alpha \geq 0$  tel que  $\ker(\varphi) = \alpha\mathbb{Z}$ .

Supposons  $\alpha = 0$ . Donc  $\ker(\varphi) = \{0\}$ . Et donc  $\varphi$  est injective. Soit  $x, y > 0$  tel que  $\cos(x) = \cos(y)$ . Alors  $\sin(x) = \pm \sin(y)$  car  $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$ .

Si  $\sin(x) = -\sin(y)$ , alors  $\varphi(x) = \exp(ix) = \cos(x) + i \sin(x) = \cos(y) - i \sin(y) = \exp(-iy) = \varphi(-y)$ . Par injectivité de  $\varphi$ , on en déduit  $x = -y$  avec toujours  $x, y > 0$ . ❌

Donc  $\sin(x) = \sin(y)$ . Donc  $\varphi(x) = \varphi(y)$ . Et donc  $x = y$ . Donc  $\cos$  est injective sur  $\mathbb{R}$ . Mais ce qui est impossible.

Donc  $\alpha \neq 0$ . □

**Corollaire 3.8 :**

$\exp$  est  $2i\pi$  périodique.

## 4 Familles sommables - Ordre de sommation

On sait déjà que dans une somme finie, l'ordre de sommation n'a pas d'importance. Autrement dit,

$$\forall \sigma \in \mathcal{S}_n, \sum_{k=1}^n x_k = \sum_{i=1}^n x_{\sigma(i)}$$

En revanche, ce n'est plus le cas avec les séries :  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \neq \sum_{p=0}^{+\infty} u_{\sigma(p)}$  avec  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  bijective. On peut le voir avec les séries alternées : on sait que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$  converge, mais si on commence par sommer les termes paires, on obtient la série harmonique qui diverge.

De même, on peut regrouper par paquet sans trop de précautions dans une somme finie :

$$A = B \cup C \text{ fini} \implies \sum_{k \in A} x_k = \sum_{b \in B} x_b + \sum_{c \in C} x_c$$

Mais ça ne fonctionne plus dans les séries : en reprenant de nouveau la série alternée  $\sum_{n \geq 1} (-1)^n/n$  convergente, si on regroupe les termes paires d'un côté et les termes impaires de l'autre, on se retrouve avec deux séries divergentes.

En fait, dans le cas d'une série alternée, il est possible de réarranger les termes pour avoir une série convergente vers n'importe quel réel :

### **Théorème (HP) 4.1 (Théorème de réarrangement de Riemann)**

Soit  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  une série alternée semi-convergente (convergence simple mais pas absolue).  
Alors  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \exists \sigma \in \mathcal{S}(\mathbb{N})$  telle que  $\sum_{k=0}^n u_{\sigma(k)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \lambda$ .

Il s'agit donc de prendre des gants lors de manipulation des sommes de séries. On ne peut pas faire ce que l'on veut. C'est le passage à la limite qui complique grandement les choses.

En particulier, pour calculer des sommes de séries, il faut repasser aux sommes partielles, qui sont des sommes finies et donc, sur lesquelles, toutes les manipulations sont autorisées. Puis, il faudra passer à la limite et vérifier les éventuels soucis de convergences.

### 4.1 Cas des réels positifs

Définition 4.1 (Famille de réels positifs sommables) :

Soit  $I$  un ensemble (infini) dénombrable et  $(u_i)_{i \in I} \in (\mathbb{R}_+)^I$  une famille de réels positifs.

On dit que la famille  $(u_i)_{i \in I}$  est une *famille sommable*, si l'ensemble des sommes finies de cette famille admet une borne sup finie, i.e. la famille est sommable si

$$\sup \left\{ \sum_{i \in F} u_i, F \subset I, F \text{ fini} \right\} \in \mathbb{R}_+$$

existe. Dans ce cas, on note

$$\sum_{i \in I} u_i = \sup \left\{ \sum_{i \in F} u_i, F \subset I, F \text{ fini} \right\} < +\infty$$

la somme de la famille.

On note  $\ell^1(I, \mathbb{R}_+)$  l'ensemble des familles réelles sommables indexées par  $I$ .

**Remarque :**

Si  $I$  est fini, on peut noter  $I = \{i_1, \dots, i_n\}$  et dans ce cas,

$$\forall F \subset I, F \text{ fini}, \sum_{i \in F} u_i \leq \sum_{k=1}^n u_{i_k}$$

et ce majorant est atteint pour  $F = I$ . Donc l'ensemble des sommes finies admet un maximum, donc la famille est sommable et la somme de la famille est la somme des éléments, au sens du chapitre 1. On s'y attendait un peu.

Dans le cas où  $I = \mathbb{N}$ , on retrouve une SATP. Et le théorème de la convergence monotone nous a déjà donné la convergence vers la borne sup.

**Exemple 4.1 :**

1. la famille  $(x)_{x \in \mathbb{R}_+}$  n'est pas sommable car l'ensemble  $\{\sum_{x \in \{0, \dots, N\}} x, N \in \mathbb{N}\}$  n'est pas majoré.
2. La famille  $\left(\frac{1}{2^{n+m}}\right)_{n, m \in \mathbb{N}^*}$  est sommable.

Définition 4.2 :

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$  une SATP.

Si la série  $\sum u_n$  diverge, on notera  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$  (la somme dans  $\overline{\mathbb{R}_+}$ ).

**Proposition 4.2 (Les SATP convergentes sont sommables) :**

Les SATP convergentes sont des familles sommables.

*Démonstration :*

C'est évident. Mais il faut le dire au moins une fois. □

On rappelle que la notion de famille sommable est la généralisation de la notion de série.

**Remarque :**

On se contentera des familles sommables positives. Il est possible de donner un sens à des familles sommables sans tenir compte du signe (voir même complexe). Mais ça engendre des grosses difficultés techniques peu intéressantes. De toutes façons, la généralisation se fait par extension du cas positif, à l'instar de la construction des séries.

**Proposition 4.3 (Invariance de la somme par permutation) :**

Soit  $I$  un ensemble dénombrable et  $(u_i)_{i \in I} \in (\mathbb{R}_+)^I$ .

Si la famille  $(u_i)_{i \in I}$  est sommable, alors la somme est invariante par permutation, *i.e.*

$$\forall \sigma \in S_I, \sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} u_{\sigma(i)}.$$

**Proposition 4.4 (Opérations sur les familles sommables) :**

Soit  $I$  un ensemble dénombrable et  $(u_i)_{i \in I}, (v_i)_{i \in I} \in (\mathbb{R}_+)^I$  deux familles de réels positifs et  $\lambda \geq 0$ .

(i) Si  $(u_i)_{i \in I}$  est sommable, alors  $(\lambda u_i)_{i \in I}$  est aussi sommable et

$$\sum_{i \in I} \lambda u_i = \lambda \sum_{i \in I} u_i.$$

(ii) Si  $(u_i)_{i \in I}$  et  $(v_i)_{i \in I}$  sont sommables, alors  $(u_i + v_i)_{i \in I}$  est sommable et

$$\sum_{i \in I} (u_i + v_i) = \sum_{i \in I} u_i + \sum_{i \in I} v_i.$$

*Démonstration :*

Soit  $F \subset I$  finie. Alors, la linéarité de la somme (finie) nous donne

$$\sum_{i \in F} \lambda u_i = \lambda \sum_{i \in F} u_i \quad \text{et} \quad \sum_{i \in F} (u_i + v_i) = \sum_{i \in F} u_i + \sum_{i \in F} v_i.$$

Or  $(u_i)_{i \in I}$  est sommable, donc  $\{\sum_{i \in F} u_i, F \subset I \text{ fini}\}$  admet une borne supérieure. Puis, par positivité de  $\lambda$ ,  $\{\lambda \sum_{i \in F} u_i, F \subset I \text{ fini}\}$  admet également une borne supérieure qui est  $\lambda \sum_{i \in I} u_i$ . Donc  $\{\sum_{i \in F} \lambda u_i, F \subset I \text{ fini}\}$  admet une borne supérieure et par unicité de la borne supérieure, on a la relation voulue.

On raisonne de la même manière pour la somme. □

**Théorème 4.5 (Somme par paquet dans les famille sommable (admis)) :**

Soit  $I$  un ensemble dénombrable. Soit  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une partition de  $I$  indexé par un ensemble  $N$ .

Soit  $(u_i)_{i \in I} \in (\mathbb{R}_+)^I$ .

Alors

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{n \in N} \left( \sum_{i \in I_n} u_i \right)$$

(i.e. on peut regrouper la somme en paquet définis par les  $I_n$ ).

**Corollaire 4.6 (Sommabilité des familles positives par les regroupements par paquets)**

:

Soit  $I$  un ensemble dénombrable,  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une partition de  $I$ . Soit  $(u_i)_{i \in I} \in (\mathbb{R}_+)^I$ .

La famille  $(u_i)_{i \in I}$  est sommable si, et seulement si,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $(u_i)_{i \in I_n}$  est sommable et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} (\sum_{i \in I_n} u_i)$  est (une SATP) convergente.

**Exemple 4.2 :**

Montrer que la famille  $\left( \frac{1}{nm(n+m)} \right)_{n,m \in \mathbb{N}^*}$  est sommable.

**Remarque :**

On notera que le résultat est vrai dans  $\overline{\mathbb{R}}$ . Si la famille est sommable, toutes les sommes sont finies et toutes les séries qui apparaissent sont convergentes. Mais dans le cas où la famille n'est pas sommable, les sommes valent  $+\infty$  et le résultat reste vraie.

C'est la positivité de la famille qui nous assure du bon fonctionnement.

**Théorème 4.7 (Théorème de Fubini discret cas positif) :**

Soit  $I, J$  deux ensembles dénombrable et  $(u_{i,j})_{(i,j) \in I \times J} \in (\mathbb{R}_+)^{I \times J}$  une famille de réels positifs.

Alors

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} u_{i,j} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} u_{i,j} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} u_{i,j}.$$

Autrement dit, commencer par faire la somme en ligne, puis la somme des ces sommes, ou commencer par faire la somme des colonnes et la somme des ces sommes, revient exactement au même.

*Démonstration :*

C'est le théorème de regroupement par paquet :  $I \times J = \bigcup_{j \in J} I \times \{j\} = \bigcup_{i \in I} \{i\} \times J$ . □

**Exemple 4.3 :**

On pose

$$\forall n, k \in \mathbb{N}, u_{k,n} = \begin{cases} \frac{1}{k!} & k \geq n \\ 0 & k < n \end{cases}$$

Montrer que la famille  $(u_{k,n})_{(k,n) \in \mathbb{N}^2}$  est sommable.

**Remarque :**

On pourrait insérer ici la définition des familles réelles sommables (plus nécessairement positives). La définition s'appuie sur les familles réelles positives sommables :  $(u_i)_{i \in I}$  est sommable si  $(|u_i|)_{i \in I}$  est sommable. Puis  $\sum u_i = \sum u_i^+ - \sum u_i^-$ .

Ensuite, on peut s'appuyer sur les familles réelles sommables pour construire les familles complexes sommables. La structure du cours serait alors symétrique au cas des séries.

Mais cette construction, bien que probablement plus claire, est chronophage et nécessite de faire plusieurs fois la même chose. On va essayer de gagner du temps en passant directement aux familles complexes sommables (qui s'appuient sur les familles réelles, elles-mêmes s'appuyant sur les familles réelles positives sommables ; donc les familles complexes s'appuient sur les familles réelles positives sommables). Comme  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ , l'extension directe aux familles complexes contiendra l'extension intermédiaires aux familles réelles.

**4.2 Cas des familles complexes**

**Définition 4.3 (Famille de complexes sommables) :**

Soit  $J$  un ensemble dénombrable et  $(u_j)_{j \in J} \in \mathbb{C}^J$ .

On dit que la famille  $(u_j)_{j \in J}$  est sommable si la famille  $(|u_j|)_{j \in J}$  est une famille de réels positifs sommables, i.e. si  $\sum_{j \in J} |u_j| < +\infty$ .

On note  $\ell^1(J, \mathbb{C})$  l'ensemble des familles complexes sommables.

**Exemple 4.4 :**

Soit  $q \in \mathbb{C}$  avec  $|q| < 1$ . Alors la famille  $(q^{|n|})_{n \in \mathbb{Z}}$  est sommable.

**Remarque :**

On a en particulier la définition de famille réelle sommable (plus nécessairement positive).

**Remarque :**

Une suite donc la série est absolument convergente est une famille sommable, i.e. si  $\sum u_n$  est absolument convergente, alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une famille sommable.

**Proposition 4.8 (Sous-famille d'une famille sommable est sommable) :**

Soit  $J$  un ensemble dénombrable,  $(u_j)_{j \in J} \in \mathbb{C}^J$  et  $K \subset J$ .

Si  $(u_j)_{j \in J}$  est sommable, alors  $(u_k)_{k \in K}$  est également sommable.

Dans le cas où la famille est réelle positive, on peut même donner une inégalité sur les sommes des deux familles.

**Exemple 4.5 :**

Montrer que  $\left(\frac{1}{n^2 - m^2}\right)_{\substack{(n,m) \in \mathbb{N}^2 \\ n \neq m}}$  n'est pas sommable.

**Proposition 4.9 (Comparaison à des famille positive sommable) :**

Soit  $J$  un ensemble dénombrable,  $(u_j)_{j \in J} \in \mathbb{C}^J$  et  $(v_j)_{j \in J} \in \ell^1(J, \mathbb{R}_+)$  telle que  $\forall j \in J$ ,  $|u_j| \leq v_j$ .

Alors  $(u_j)_{j \in J}$  est sommable et de plus,

$$\left| \sum_{j \in J} u_j \right| \leq \sum_{j \in J} v_j.$$

*Démonstration :*

C'est assez évident : si  $K \subset J$  fini, alors  $\sum_{k \in K} |u_k| \leq \sum_{k \in K} v_k < \sum_{j \in J} v_j$ . Donc l'ensemble des sommes finies de la famille  $(|u_j|)_{j \in J}$  est bornée et donc la famille est sommable.  $\square$

**Définition-Propriété 4.4 (Somme d'une famille sommable) :**

Soit  $J$  un ensemble dénombrable et  $(u_j)_{j \in J} \in \ell^1(J, \mathbb{C})$ .

On définit alors la somme de la famille  $(u_j)_{j \in J}$  par

- Si  $(u_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^I$ ,

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} u_i^+ - \sum_{i \in I} u_i^-.$$

- Si  $(u_i)_{i \in I} \in \mathbb{C}^I$ ,

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} \Re(u_i) + i \sum_{i \in I} \Im(u_i).$$

On rappelle :  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $x^+ = \max(x, 0)$ ,  $x^- = \max(-x, 0)$  et  $x = x^+ - x^-$  et  $|x| = x^+ + x^-$ .

*Démonstration :*

Il suffit d'utiliser les inégalités classiques sur les complexes :

$$\forall j \in J, \Re(u_j)^+ \leq |\Re(u_j)| \leq |u_j|$$

La comparaison à des familles sommables positive permet de conclure : toutes les familles sont sommables.  $\square$

**Proposition 4.10 (Lien entre série complexe et famille sommable) :**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ .

La famille  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est sommable si, et seulement si,  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  est absolument convergente.

Et dans ce cas, la somme en tant que famille sommable, coïncide avec la somme, en tant que série.

**Remarque :**

On rappelle que pour les cas des SATP, CVS  $\iff$  CVA. Donc dans le cas d'une SATP,  $\sum u_n$  converge  $\iff (u_n)$  est sommable.

**Proposition 4.11 (Invariance de la somme par permutation) :**

Soit  $J$  un ensemble dénombrable,  $(u_j)_{j \in J} \in \ell^1(J, \mathbb{C})$ .

Alors, pour tout  $\sigma \in S_J$ ,  $(u_{\sigma(j)})_{j \in J}$  est sommable et

$$\sum_{j \in J} u_{\sigma(j)} = \sum_{j \in J} u_j.$$

*Démonstration :*

Par définition,  $(|u_j|)_{j \in J}$  est sommable. Donc, par invariance par permutation des familles réelles positives sommables,  $(|u_{\sigma(j)}|)_{j \in J}$  est sommable. Et donc  $(u_{\sigma(j)})_{j \in J}$  est sommable, par définition.

Puis :

$$\sum_{j \in J} u_{\sigma(j)} = \sum_{j \in J} \Re(u_{\sigma(j)}) + i \sum_{j \in J} \Im(u_{\sigma(j)}).$$

Puis, en utilisant les résultats sur l'invariance par permutation des familles réelles sommables,

$$\sum_{j \in J} \Re(u_{\sigma(j)}) = \sum_{j \in J} \Re(u_j).$$

D'où le résultat. □

**Remarque :**

En particulier, si  $\sum u_n$  converge absolument, alors  $\sum u_{\sigma(n)}$  converge aussi absolument et  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}$ .

Autrement dit, dans le cas de séries absolument convergentes, l'ordre de sommation n'a pas d'importance.

**Proposition 4.12 :**

Soit  $J$  un ensemble dénombrable et  $(u_j)_{j \in J} \in \ell^1(J, \mathbb{C})$ .

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $F \subset J$  fini telle que

$$\left| \sum_{j \in J} u_j - \sum_{k \in F} u_k \right| \leq \varepsilon.$$

*Démonstration :*

Le plus simple est de commencer par le cas réel, puis de passer au cas complexe. Pour le cas réel, on scinde la famille  $(u_i)$  en  $(u_i^+)$  et  $(u_i^-)$  qui sont deux familles réelles positives. Puis, par définition de la somme d'une famille réelles positive et la caractérisation des bornes sup dans  $\mathbb{R}$ , on peut conclure. □

**Proposition 4.13 (Linéarité de la somme pour les familles sommables) :**

Soit  $J$  un ensemble dénombrable,  $(u_j)_{j \in J}, (v_j)_{j \in J} \in \ell^1(J, \mathbb{C})$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

Alors  $(u_j + \lambda v_j)_{j \in J} \in \ell^1(J, \mathbb{C})$  et

$$\sum_{j \in J} (u_j + \lambda v_j) = \sum_{j \in J} u_j + \lambda \sum_{j \in J} v_j.$$

*Démonstration :*

Il faut s'inspirer du cas réel positif. □

**Théorème 4.14 (Somme par paquet (admis)) :**

Soit  $J$  un ensemble dénombrable et  $(u_j)_{j \in J} \in \ell^1(J, \mathbb{C})$ . Soit  $K$  un ensemble et  $(J_k)_{k \in K}$  une partition de  $J$ . Alors

$$\sum_{j \in J} u_j = \sum_{k \in K} \left( \sum_{j \in J_k} u_j \right).$$

**Exemple 4.6 :**

On note  $\forall n \in \mathbb{N}^*, d(n) = \text{Card}(\text{Div}_+(n))$  le nombre de diviseurs positifs de  $n$ . Alors

$$\forall a \in ]-1, 1[, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{1-a^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n) a^n.$$

**Théorème 4.15 (Théorème de Fubini discret (complexe)) :**

Soit  $I, J$  deux ensembles dénombrables et  $(u_{i,j})_{(i,j) \in I \times J} \in \ell^1(I \times J, \mathbb{C})$ . Alors

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} u_{i,j} = \sum_{i \in I} \left( \sum_{j \in J} u_{i,j} \right) = \sum_{j \in J} \left( \sum_{i \in I} u_{i,j} \right)$$

**Remarque :**

On peut généraliser facilement le résultat à un produit cartésien fini d'ensembles.

**Théorème 4.16 (Théorème de sommation par paquet pour une famille de complexes)**  
:

soit  $I$  un ensemble dénombrable,  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une partition de  $I$ . Soit  $(u_i)_{i \in I}$  une famille de complexes.

Alors

$$(u_i)_{i \in I} \text{ sommable} \iff \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, (u_i)_{i \in I_n} \text{ sommable} \\ \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{i \in I_n} |u_i| \right) \text{ converge} \end{cases}$$

Dans le cas de sommabilité,

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{i \in I_n} u_i \right).$$

**Proposition 4.17 (Caractérisation de sommabilité des séries doubles) :**

Soit  $(a_{p,q})_{p,q \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^2}$ .

Alors

$$(a_{p,q})_{p,q \in \mathbb{N}} \text{ sommable} \iff \begin{cases} \forall p \in \mathbb{N}, \sum_{q \in \mathbb{N}} |a_{p,q}| \text{ converge} \\ \sum_{p \geq 0} \left( \sum_{q=0}^{+\infty} |a_{p,q}| \right) \text{ converge} \end{cases}$$

En cas de sommabilité,

$$\sum_{p,q \in \mathbb{N}} a_{p,q} = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{q=0}^{+\infty} a_{p,q} = \sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,q}$$

*Démonstration :*

Il suffit d'utiliser les définitions :  $(a_{p,q})$  est sommable si et seulement si  $(|a_{p,q}|)$  est sommable (dans  $\mathbb{R}_+$ ) si et seulement si les séries sont convergentes par Fubini positif.  $\square$

**Exemple 4.7 :**

On pose

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, u_{n,m} = \frac{2n+1}{n+m+2} - \frac{n}{n+m+1} - \frac{n+1}{n+m+3}.$$

Montrer que  $(u_{n,m})_{n,m \in \mathbb{N}}$  n'est pas sommable.

**Corollaire 4.18 (Produit de familles sommables) :**

Soit  $I, J$  deux ensembles dénombrable,  $(a_i)_{i \in I} \in \ell^1(I, \mathbb{C})$  et  $(b_j)_{j \in J} \in \ell^1(J, \mathbb{C})$ .

Alors  $(a_i b_j)_{(i,j) \in I \times J} \in \ell^1(I \times J, \mathbb{C})$  et de plus,

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j = \left( \sum_{i \in I} a_i \right) \left( \sum_{j \in J} b_j \right).$$

*Démonstration :*

Soit  $K \subset I \times J$  fini. On pose

$$I' = \{i \in I, \exists j \in J, (i, j) \in K\}, \quad J' = \{j \in J, \exists i \in I, (i, j) \in K\}.$$

Comme  $K$  est fini,  $I'$  et  $J'$  le sont également. Et alors  $K \subset I' \times J'$  et  $I' \times J'$  est fini. Et donc

$$\sum_{(i,j) \in K} |a_i b_j| \leq \sum_{(i,j) \in I' \times J'} |a_i b_j| = \left( \sum_{i \in I'} |a_i| \right) \left( \sum_{j \in J'} |b_j| \right) \leq \left( \sum_{i \in I} |a_i| \right) \left( \sum_{j \in J} |b_j| \right).$$

Donc toutes les sommes finis de la famille  $(|a_i b_j|)_{(i,j) \in I \times J}$  sont majorées et donc la famille  $(a_i b_j)_{(i,j) \in I \times J}$  est sommable.

Comme la famille  $(a_i b_j)_{(i,j) \in I \times J}$  est sommable, par le théorème de Fubini discret, on a

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j = \left( \sum_{i \in I} a_i \right) \left( \sum_{j \in J} b_j \right).$$

□

**Remarque :**

Le produit de famille sommable est la généralisation du produit de Cauchy pour les séries. En effet, dans le cas de séries absolument convergentes, ce sont des familles sommables et en prenant  $J = K = \mathbb{N}$ , le produit de familles sommables ci-dessus correspond exactement au produit de Cauchy.

