Chapitre 27 - TD
Espaces Préhilbertiens Réels

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

mardi 26 mai, 2026

1 Produit scalaires et orthogonalité

Exercice 1 :
Montrer que les exemples suivants sont des produits scalaires :

1. $\varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^{n} \widetilde{P}(k)\widetilde{Q}(k)$ sur $\mathbb{R}_n[X]$
2. $\varphi(P,Q) = \int_0^1 \widetilde{P}(t)\widetilde{Q}(t)dt$ sur $\mathbb{R}[X]$
3. $\varphi(f,g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$ sur $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$
4. $\varphi(f,g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t)(1-t^2)dt$ sur $\mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$

Exercice 2 (*) :
Soit $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. On pose

$$\varphi((x,y),(x',y')) = axx' + bxy' + cx'y + dyy'$$

A quelles conditions sur a,b,c,d, φ est-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 3 :
Soit E un espace préhilbertien réel et $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire. Montrer

$$\forall x,y \in E\setminus\{0\},\ \left\|\frac{x}{\|x\|^2} - \frac{y}{\|y\|^2}\right\| = \frac{\|x-y\|}{\|x\|\|y\|}$$

Exercice 4 :
Soit E un espace préhilbertien réel. Soit $a \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Résoudre dans E l'équation

$$\langle x|a\rangle = \lambda$$

d'inconnue $x \in E$.

Exercice 5 :
Soit E préhilbertien réel, $f,g : E \to E$ telles que

$$\forall x,y \in E,\ \langle f(x)|y\rangle = \langle x|g(y)\rangle$$

Montrer que f et g sont linéaires.

Exercice 6 ([✓]) :
Soit E euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : E \to E$ une isométrie nulle en 0, *i.e.*

$$\forall x, y \in E,\ \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\| \quad \text{et} \quad f(0) = 0$$

1. Montrer que f conserve le produit scalaire, *i.e.* $\forall x, y \in E$, $\langle f(x)|f(y)\rangle = \langle x|y\rangle$.
2. En déduire que f est linéaire.

Exercice 7 :
Soit E préhilbertien réel et $x, y \in E$. Montrer que

$$x \perp y \iff \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \|x + \lambda y\| \geq \|x\|.$$

Exercice 8 :
Soit E euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ conservant l'orthogonalité, c'est-à-dire telle que

$$\forall x, y \in E,\ \langle x|y\rangle = 0 \implies \langle f(x)|f(y)\rangle = 0$$

Montrer que $\exists \lambda \geq 0$ tel qe $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = \lambda\|x\|$.

Exercice 9 (Centrale MP (**)) :
Soit E euclidien non trivial et $u \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\mathrm{tr}(u) = 0$.

1. Montrer $\exists x \in E \setminus \{0\}$ tel que $\langle u(x)|x\rangle = 0$.
2. Montrer qu'il existe une BON de E dans laquelle la matrice de u est à diagonale nulle.

Exercice 10 (Famille équiangulaire) :
Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$ et $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs unitaires de E telle que $\exists c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j \implies \langle u_i|u_j\rangle = c$.

Déterminer les valeurs de c pour lesquelles la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de E.

Exercice 11 (Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt) :
Effectuer le procédé de Gram-Schmidt dans les cas suivants :

1. Dans $\mathbb{R}^3$ munit de son produit scalaire canonique sur $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (1, 1, 1)$ et $u_3 = (-1, 1, 0)$
2. Dans $\mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire $\langle P|Q\rangle = \int_{-1}^{1} \widetilde{P}(t)\widetilde{Q}(t)dt$ sur la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ munit de son produit scalaire canonique $\langle A|B\rangle = \mathrm{tr}({}^tAB)$, orthonormaliser la famille (A_1, A_2, A_3) avec $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 12 (Matrices orthogonales) :
On note

$$\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ {}^tAA = I_n\}.$$

Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $A^tA = I_n$.
2. Montrer que $\det(A) = \pm 1$.
3. Montrer que ${}^tA \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
4. Montrer que les colonnes de A forment une BON de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire canonique.

2 Partie orthogonales

Exercice 13 :
Soit E euclidien et F, G deux sev de E.
Exprimer $(F \cup G)^{\perp}$ en fonction de $F^{\perp}$ et $G^{\perp}$.

Exercice 14 (Formes linéaires [✓]) :
Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$.

1. Justifier que E et E^* sont isomorphes.
2. Soit $f \in E^*$ non nulle. Montrer que $\exists! a \in E \setminus \{0\}$, $\forall x \in E,\ f(x) = \langle x|a\rangle$.
3. En déduire également que deux formes linéaires non nulles sont proportionnelles si et seulement si elles ont le même noyau.
4. On considère le produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$: $\langle P|Q\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{P^{(n)}}(0)\widetilde{Q^{(n)}}(0)$.
   (a) Montrer que c'est bien un produit scalaire.
   (b) Déterminer $A \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}_2[X]$, $\widetilde{P}(1) = \langle A|P\rangle$.
   (c) Existe-t-il $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $\widetilde{P}(1) = \langle A|P\rangle$? Pourquoi ?

Exercice 15 :
Soit E euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que

$$\forall x, y \in E,\ \langle f(x)|y\rangle = \langle x|f(y)\rangle$$

1. Montrer que la matrice de f est symétrique dans tout BON.
2. Montrer que $\ker(f) \perp \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 16 :
Soit E euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\forall x \in E,\ \langle f(x)|x\rangle = 0$.
Que peut-on dire de $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$?

Exercice 17 :
Soit E euclidien et $f : E \to E$ telle que

$$\forall x, y \in E,\ \langle f(x)|f(y)\rangle = \langle x|y\rangle\,.$$

Montrer que f est linéaire.

Exercice 18 :
Soit E préhilbertien réel et F sev de E. Montrer

$$F^{\perp} = ((F^{\perp})^{\perp})^{\perp}.$$

Exercice 19 :
On note $E = \mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{R})$ qu'on munit de son produit scalaire canonique. On introduit également

$$F = \{f \in E,\ \forall t \in [-1,0],\ f(t) = 0\} \qquad \text{et} \qquad G = \{g \in E,\ \forall t \in [0,1],\ g(t) = 0\}$$

1. Montrer que $F^{\perp} = G$
2. Les sev F et $F^{\perp}$ sont-ils supplémentaires dans E ?
3. Comparer $F^{\perp} + G^{\perp}$ et $(F \cap G)^{\perp}$

3 Distance, Projection orthogonale

Exercice 20 :
Sur $\mathbb{R}_2[X]$, montrer que
$$\langle P|Q\rangle = \widetilde{P}(0)\widetilde{Q}(0) + \widetilde{P}(1)\widetilde{Q}(1) + \widetilde{P}(2)\widetilde{Q}(2)$$
définit un produit scalaire, puis calculer $d(X^2, \mathbb{R}_1[X])$.

Exercice 21 :
Donner les matrices des applications orthogonales suivantes :

1. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique, la projection sur $P : x - 2y + z = 0$.
2. Dans un ev euclidien E de BON $\mathcal{B} = (i, j, k)$, la projection sur le plan P d'équation $x + y + z = 0$ dans la base $\mathcal{B}$.
3. Dans un ev euclidien E de BON $\mathcal{B} = (i, j, k)$, la symétrie par rapport au plan P d'équation $x = z$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 22 :
On se place dans $\mathbb{R}^4$ punit de sa structure euclidienne usuelle. On considère le sev de $\mathbb{R}^4$ défini par
$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x + y + z + t = x - y + z - t = 0\}$$

1. Déterminer une BON du supplémentaire orthogonal de F
2. Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur F relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^4$
3. Donner la matrice, relativement à la base canonique, de la symétrie orthogonale par rapport à F.
4. Calculer $d(u, F)$ pour $u = (1, 2, 3, 4)$.

Exercice 23 :
Soit E euclidien de dimension 3, $\mathcal{B} = (i, j, k)$ une BON de E et $p \in \mathcal{L}(E)$ telle que
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$
Montrer que p est une projection orthogonale sur un plan dont on déterminera une équation relativement à la base $\mathcal{B}$.

Exercice 24 :
Soit E euclidien et $x, y \in E$ non nuls.
À quelles conditions sur x et y, le projeté orthogonal de x sur $\mathrm{Vect}(y)$ est-il égal au projeté orthogonal de y sur $\mathrm{Vect}(x)$?

Exercice 25 :
Soit $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$. On pose
$$\forall f, g \in E,\ \varphi(f, g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
2. On note $\mathcal{P}$ les fonctions paires et $\mathcal{I}$ les fonctions impaires. Montrer que $\mathcal{I} = \mathcal{P}^{\perp}$.

3. Soit $\psi : f \mapsto \widehat{f}$ où $\widehat{f} : x \mapsto f(-x)$. Montrer que ψ est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{P}$.

Exercice 26 :
Calculer les quantités suivantes :

1. Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ composée que de 1 et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \|M - aI_n - bJ\|$.
2. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$. Calculer
$$\inf_{M\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \left(\sum_{1\leq i,j\leq n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2 \right)$$
3. Calculer
$$\inf_{a,b,c\in\mathbb{R}} \int_{-1}^{1} (t^3 - (at^2 + bt + c))^2 dt.$$

Exercice 27 :
Soit E euclidien et F et G deux sev de E.
Montrer que F et G sont supplémentaires orthogonaux ssi, $\forall x \in E$, $\|x\|^2 = d(x,F)^2 + d(x,G)^2$.

Exercice 28 (Déterminant de Gram) :
Soit E un espace préhilbertien réel. Soit $x_1, \dots, x_n \in E$. On note $G(x_1, \dots, x_n)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont les $\langle x_i | x_j \rangle$. On l'appelle matrice de Gram associée à la famille $(x_1, \dots, x_n)$.

1. Montrer que si $(x_1, \dots, x_n)$ est liée, alors $\det(G(x_1, \dots, x_n)) = 0$.
   On suppose désormais que $(x_1, \dots, x_n)$ est libre. On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une BON de $F = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ (par procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, par exemple). On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$ $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer un lien entre $G(x_1, \dots, x_n)$, A et ${}^tA$ et en déduire
$$\det(G(x_1, \dots, x_n)) > 0.$$
3. Soit $u \in E$. Montrer
$$d(u, F) = \sqrt{\frac{\det(G(u, x_1, \dots, x_n))}{\det(G(x_1, \dots, x_n))}}$$

Exercice 29 (Inégalité d'Hadamard) :
Soit E un espace euclidien orienté de dimension $n \geq 1$.

1. Montrer que $\forall x_1, \dots, x_n \in E$,
$$|[x_1, \dots, x_n]| \leq \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|$$
2. Dans quel cas y a-t-il égalité ?

4 Cauchy-Schwarz

Exercice 30 :
Soit $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Montrer
$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right)^2 \leq n \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$
et étudier le cas d'égalité.

Exercice 31 :
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et positive. On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^1 t^n f(t)dt$.
Montrer que
$$\forall n, p \in \mathbb{N},\ I_{n+p}^2 \leq I_n I_p$$

Exercice 32 :
Soit $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+^*$. On pose
$$\ell(f) = \left(\int_a^b f(t)dt\right)\left(\int_a^b \frac{dt}{f(t)}\right)$$
Montrer que $\ell(f) \geq (b-a)^2$ et étudier le cas d'égalité.

Exercice 33 :
On considère le produit scalaire canonique $\langle A|B\rangle = \mathrm{tr}({}^tAB)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que si $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$,
$$\mathrm{tr}(AB+BA)^2 \leq 4\,\mathrm{tr}(A^2)\,\mathrm{tr}(B^2).$$

Exercice 34 :
On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire $\langle A|B\rangle = \mathrm{tr}({}^tAB)$.

1. Montrer que la base canonique $(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est une BON.
2. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux.
3. Montrer que
$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{tr}(A) \leq \sqrt{n}\sqrt{\mathrm{tr}({}^tAA)}$$
et étudier le cas d'égalité.

Exercice 35 (Matrices orthogonales) :
Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire ${}^tAA = A^tA = I_n$. Montrer
$$A \in \mathcal{M}_n([-1,1]),\ \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}^2 = n,\ \left|\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}\right| \leq n\sqrt{n},\ n \leq \sum_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}| \leq n\sqrt{n}$$

Exercice 36 (X PC) :
Soit $(u_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite des moyenne de Casaro :
$$\forall n \geq 1,\ v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n u_k.$$
On suppose $\sum u_n^2$ converge.

1. Montrer que $\forall n \geq 2,\ (n+1)v_n^2 - (n-1)v_{n-1}^2 \leq 2u_nv_n$.
2. Montrer que $\sum v_n^2$ converge et
$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n^2 \leq 4\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2.$$
3. En déduire la sommabilité de la famille $\left(\frac{u_nu_m}{n+m}\right)_{n,m\geq 1}$.