



Formulaire MPSI

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

mardi 8 septembre, 2026

Une condition nécessaire à la réussite de l'oral reste donc de [...] connaître par cœur ses formules de développements limités, de trigonométrie, de développements en série entière usuelles... [CCINP 2022]

Table des matières

1	Dénombrement	3			
1.1	Coefficients binomiaux	3			
1.2	Binôme de Newton	3			
2	Complexe	3			
2.1	Module	3			
2.2	Argument	3			
2.3	Caractérisation de réels et imaginaires purs	3			
2.4	Complexe de module 1	4			
2.5	Complexe et trigonométrie	4			
2.6	Racine n -ème	4			
2.7	Amplitude et phase	4			
2.8	Racine carrée dans $\mathbb{C}$	4			
2.9	Exponentielle complexe	4			
3	Trigonométrie	5			
3.1	Fonctions circulaires	5			
3.1.1	Premières propriétés	5			
3.1.2	Valeurs remarquables	5			
3.2	Fonctions réciproques des fonctions circulaires	6			
3.2.1	Définition	6			
3.2.2	Propriétés	6			
3.2.3	Relations	7			
3.3	Formules	7			
3.3.1	Corollaire du Théorème de Pythagore	7			
3.3.2	Formules de duplication	7			
3.3.3	Produits	7			
3.3.4	Arc double, Arc moitié	8			
3.3.5	Formules de Moivre	8			
3.3.6	Arcs en progression arithmétique	8			
3.4	Trigonométrie Hyperbolique	8			
3.4.1	Définition	8			
4	Développements limités usuels en 0	9			
5	Croissances comparées	11			
5.1	En $+\infty$	11			
5.2	En 0	11			
6	Dérivées	12			
6.1	Dérivées usuelles	12			
6.2	Dérivées n -ème usuelles	13			
7	Primitives usuelles	13			
7.1	Polynômes et Fractions rationnelles	13			
7.2	Fonctions usuelles	14			
7.3	Formules de Taylor	14			
7.3.1	Formule de Taylor-Young	14			
7.3.2	Taylor avec reste intégrale	14			

7.3.3	Inégalité de Taylor-Lagrange . . .	14	9.4.2	Développement selon une ligne ou une colonne	17
7.3.4	Taylor polynomial	15	9.4.3	Déterminant de Vandermonde .	18
8	Polynômes et Fractions rationnelles	15	9.5	Système de Cramer	18
8.1	Polynômes	15	9.6	Comatrice	18
8.1.1	Théorème fondamental de l'arithmétique dans $\mathbb{C}[X]$	15	10	Séries	18
8.1.2	Théorème fondamental de l'arithmétique dans $\mathbb{R}[X]$	15	10.1	Produit de Cauchy	18
8.1.3	Relations coefficients/racines . .	15	10.2	Série de Riemann	18
8.1.4	Polynômes interpolateur de La- grange	15	10.3	Série exponentielle	18
8.2	Fractions Rationnelles	16	10.4	Familles sommables	19
8.2.1	Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$	16	11	Espaces Préhilbertiens	19
8.2.2	Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$	16	11.1	Produits scalaires canoniques	19
8.2.3	Cas des pôles simples	16	11.2	Normes usuelles	20
8.2.4	Cas particulier P'/P	16	11.3	Théorème de Pythagore	20
9	Matrices	16	11.4	Expression dans une BON	20
9.1	Produit matriciel	16	11.5	Projections orthogonales	20
9.2	Transposée, Matrices symétriques, Ma- trices antisymétriques	17	11.6	Distance à un sev	20
9.3	Trace	17	12	Variables Aléatoires	21
9.4	Déterminant	17	12.1	Espérance, Variance, Covariance	21
9.4.1	Formule de Sarrus	17	12.2	Inégalité de Markov	21
			12.3	Inégalité de Bienaymé-Tchebychev	21
			12.4	Lois usuelles	21
			12.4.1	Loi uniforme	21
			12.4.2	Loi de Bernoulli	21
			12.4.3	Loi binomiale	21

1 Dénombrement

1.1 Coefficients binomiaux

$$n! = \prod_{k=1}^n k, \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (n-j) \in \mathbb{N}$$

$$\text{Formule de Pascal :} \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

$$\text{Symétrie :} \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\text{Formule du Pion :} \quad k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$

1.2 Binôme de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1} = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} b^k$$

2 Complexe

2.1 Module

$$|a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}, \quad \bar{z} = a-ib, \quad z\bar{z} = |z|^2$$

Inégalité triangulaire et inégalité triangulaire renversée :

$$||z| - |z'|| \leq |z+z'| \leq |z| + |z'|$$

2.2 Argument

Pour $z \neq 0$,

$$z = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) \quad \text{où} \quad \begin{cases} \rho = |z| > 0 \\ \arg(z) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$$

2.3 Caractérisation de réels et imaginaires purs

$$z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z} \iff z = \Re(z) \iff \Im(z) = 0$$

$$z \in i\mathbb{R} \iff z = -\bar{z} \iff z = \Im(z) \iff \Re(z) = 0$$

2.4 Complexe de module 1

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\} \quad \text{et} \quad z \in \mathbb{U} \iff \exists \theta \in \mathbb{R}, z = e^{i\theta}$$

et

$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}} \quad e^{i\theta} e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$$

Arc moitié :

$$1 + e^{i\theta} = 2 \cos(\theta/2) e^{i\theta/2} \quad 1 - e^{i\theta} = 2i \sin(\theta/2) e^{i\theta/2}$$

2.5 Complexe et trigonométrie

$$\text{Formule de Moivre :} \quad (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

$$\text{Formules d'Euler :} \quad \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

2.6 Racine n -ème

$$z^n = 1 \iff \exists k \in \{0, \dots, n-1\}, z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$$

$$z^n = \rho e^{i\theta} \iff \exists k \in \{0, \dots, n-1\}, z = \sqrt[n]{\rho} e^{\frac{i(\theta+2k\pi)}{n}}$$

2.7 Amplitude et phase

$$\forall a, b, t \in \mathbb{R}, \exists A, \varphi \in \mathbb{R}, a \cos(t) + b \sin(t) = A \cos(t - \varphi)$$

2.8 Racine carrée dans $\mathbb{C}$

$$\delta^2 = z \iff \begin{cases} \Re(\delta)^2 + \Im(\delta)^2 = |z| \\ \Re(\delta)^2 - \Im(\delta)^2 = \Re(z) \\ 2 \Re(\delta) \Im(\delta) = \Im(z) \end{cases}$$

2.9 Exponentielle complexe

$$e^z = e^{\Re(z)} e^{i \Im(z)}$$

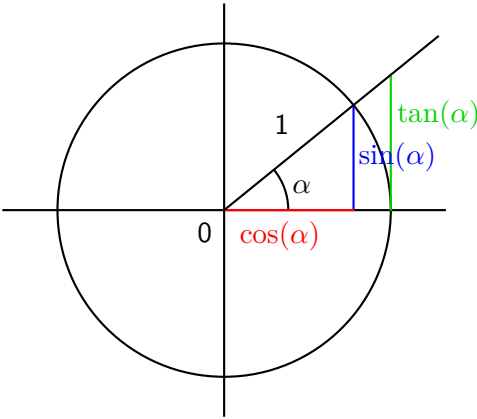
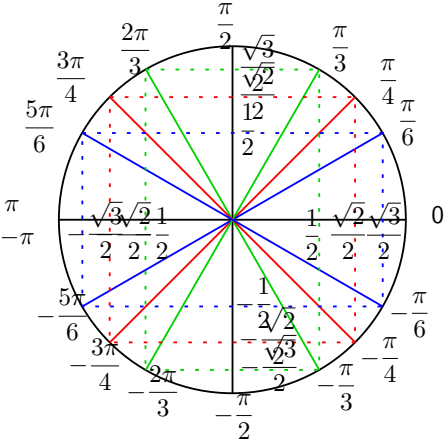
3 Trigonométrie

3.1 Fonctions circulaires

3.1.1 Premières propriétés

	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$
Ensemble de définition	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
Période	2π	2π	π
Parité	Impaire	Paire	Impaire
$f(\pi - x)$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$-\tan(x)$
$f(\pi + x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\tan(x)$
$f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$	$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\frac{1}{\tan(x)}$
$f\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\frac{1}{\tan(x)}$
Ensemble de dérivabilité	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
f'	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$1 + \tan(x)^2 = \frac{1}{\cos(x)^2}$

3.1.2 Valeurs remarquables



	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin(x)$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos(x)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
$\tan(x)$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	Indéfini

3.2 Fonctions réciproques des fonctions circulaires

3.2.1 Définition

Les périodicités et les symétries des fonctions trigonométriques circulaires introduisent des difficultés pour résoudre des équations du type $\sin(x) = \lambda$. Par exemple, $\pi/6$, $5\pi/6$ et $\pi/6 + 4\pi$ ont tous la même image par la fonction sinus. Les fonctions circulaires réciproques arcsin, arccos et arctan ne sont pas de “vraies” réciproques puisque les fonctions de départ ne sont pas des bijections. Ajoutons qu'elles ne sont *pas* périodiques. Il faut les combiner avec les périodicités et les symétries éventuelles pour résoudre les équations.

- Si $\sin(x) = \lambda \in [-1, 1]$, alors $\begin{cases} x = \arcsin(\lambda) + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \arcsin(\lambda) + 2k\pi \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- Si $\cos(x) = \lambda \in [-1, 1]$, alors $\begin{cases} x = \arccos(\lambda) + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\arccos(\lambda) + 2k\pi \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- Si $\tan(x) = \lambda \in \mathbb{R}$, alors $x = \arctan(\lambda) + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Le problème contraire ne pose aucune difficulté : si $x = \arcsin(\lambda)$, alors $\sin(x) = \lambda$.

3.2.2 Propriétés

	$\arcsin(x)$	$\arccos(x)$	$\arctan(x)$
Ensemble de définition	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	$\mathbb{R}$
Ensemble image	$[-\pi/2, \pi/2]$	$[0, \pi]$	$] - \pi/2, \pi/2[$
Période	Aucune	Aucune	Aucune
Parité	Impaire	Aucune	Impaire
Ensemble de dérivabilité	$] - 1, 1[$	$] - 1, 1[$	$\mathbb{R}$
Dérivée	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$

3.2.3 Relations

$$y = \begin{array}{ccc} \arccos(x) & \arcsin(x) & \arctan(x) \end{array}$$

$\cos(y)$	x	$\sqrt{1-x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\sin(y)$	$\sqrt{1-x^2}$	x	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
$\tan(y)$	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	x

$$\forall x \in [-1, 1], \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \arctan(x) + \arctan(1/x) = \text{sign}(x) \frac{\pi}{2}$$

3.3 Formules

3.3.1 Corollaire du Théorème de Pythagore

$$\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$$

$$\cos(x)^2 = \frac{1}{1 + \tan(x)^2} \quad \sin(x)^2 = \frac{\tan(x)^2}{1 + \tan(x)^2}$$

3.3.2 Formules de duplication

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) & \cos(p) + \cos(q) &= 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a) & \sin(p) + \sin(q) &= 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \tan(a+b) &= \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)} & \tan(p) + \tan(q) &= \frac{\sin(p+q)}{\cos(p)\cos(q)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(a-b) &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) & \cos(p) - \cos(q) &= -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \sin(a-b) &= \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a) & \sin(p) - \sin(q) &= 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \tan(a-b) &= \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)} & \tan(p) - \tan(q) &= \frac{\sin(p-q)}{\cos(p)\cos(q)} \end{aligned}$$

3.3.3 Produits

$$\begin{aligned} \cos(a)\cos(b) &= \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b)) & \sin(a)\cos(b) &= \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b)) \\ \sin(a)\sin(b) &= \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b)) & \cos(a)\sin(b) &= \frac{1}{2}(\sin(a+b) - \sin(a-b)) \end{aligned}$$

3.3.4 Arc double, Arc moitié

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos(x)^2 - \sin(x)^2 \\ &= 2\cos(x)^2 - 1 \\ &= 1 - 2\sin(x)^2\end{aligned}$$

$$\cos(x)^2 = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

$$\sin(x)^2 = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 - \tan(x)^2}$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(2x)}{1 + \cos(2x)} = \frac{1 - \cos(2x)}{\sin(2x)}$$

On a également, en symétrie avec les règles de Bioche :

$$\sin(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 + \tan(x)^2}$$

$$\cos(2x) = \frac{1 - \tan(x)^2}{1 + \tan(x)^2}$$

3.3.5 Formules de Moivre

$$(\cos(a) + i\sin(a))^n = \cos(na) + i\sin(na)$$

d'où l'on déduit par exemple, en prenant la partie imaginaire ou la partie réelle

$$\begin{aligned}\cos(3a) &= \cos(a)^3 - 3\cos(a)\sin(a)^2 \\ &= 4\cos(a)^3 - 3\cos(a) \\ \sin(3a) &= 3\cos(a)^2\sin(a) - \sin(a)^3 \\ &= 3\sin(a) - 4\sin(a)^3 \\ \tan(3a) &= \frac{3\tan(a) - \tan(a)^3}{1 - 3\tan(a)^3}\end{aligned}$$

3.3.6 Arcs en progression arithmétique

(à redémontrer à chaque utilisation)

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n \sin(kx) &= \Im \left(\sum_{k=0}^n e^{ikx} \right) = \begin{cases} \frac{\sin(nx/2) \sin(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin(x/2)} & x \not\equiv 0 [2\pi] \\ 0 & x \equiv 0 [2\pi] \end{cases} \\ \sum_{k=0}^n \cos(kx) &= \Re \left(\sum_{k=0}^n e^{ikx} \right) = \begin{cases} \frac{\cos(nx/2) \sin(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin(x/2)} & x \not\equiv 0 [2\pi] \\ n+1 & x \equiv 0 [2\pi] \end{cases}\end{aligned}$$

3.4 Trigonométrie Hyperbolique

3.4.1 Définition

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch}(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}, & \operatorname{sh}(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \\ \operatorname{th}(x) &= \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}.\end{aligned}$$

	ch	sh	th
$f(\mathbb{R})$	$[1, +\infty[$	$\mathbb{R}$	$] - 1, 1[$
Propriétés	Paire	Impaire bijective	Impaire bijective
$f'(x)$	$\text{sh}(x)$	$\text{ch}(x)$	$\frac{1}{\text{ch}(x)^2} = 1 - \text{th}(x)^2$

$$\text{ch}(x)^2 - \text{sh}(x)^2 = 1$$

$$\begin{aligned} \text{ch}(a+b) &= \text{ch}(a)\text{ch}(b) + \text{sh}(a)\text{sh}(b) & \text{ch}(p) + \text{ch}(q) &= 2\text{ch}\left(\frac{p+q}{2}\right)\text{ch}\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \text{sh}(a+b) &= \text{sh}(a)\text{ch}(b) + \text{sh}(b)\text{ch}(a) & \text{ch}(p) + \text{sh}(q) &= 2\text{sh}\left(\frac{p+q}{2}\right)\text{ch}\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \text{th}(a+b) &= \frac{\text{th}(a) + \text{th}(b)}{1 + \text{th}(a)\text{th}(b)} & \text{th}(p) + \text{th}(q) &= \frac{\text{sh}(p+q)}{\text{ch}(p)\text{ch}(q)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ch}(a-b) &= \text{ch}(a)\text{ch}(b) - \text{sh}(a)\text{sh}(b) & \text{ch}(p) - \text{ch}(q) &= 2\text{sh}\left(\frac{p+q}{2}\right)\text{sh}\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \text{sh}(a-b) &= \text{sh}(a)\text{ch}(b) - \text{sh}(b)\text{ch}(a) & \text{sh}(p) - \text{sh}(q) &= 2\text{sh}\left(\frac{p-q}{2}\right)\text{ch}\left(\frac{p+q}{2}\right) \\ \text{th}(a-b) &= \frac{\text{th}(a) - \text{th}(b)}{1 - \text{th}(a)\text{th}(b)} & \text{th}(p) - \text{th}(q) &= \frac{\text{sh}(p-q)}{\text{ch}(p)\text{ch}(q)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ch}(2x) &= \text{ch}(x)^2 + \text{sh}(x)^2 & \text{ch}(x)^2 &= \frac{\text{ch}(2x) + 1}{2} \\ &= 2\text{ch}(x)^2 - 1 \\ &= 1 + 2\text{sh}(x)^2 \\ \text{sh}(2x) &= 2\text{sh}(x)\text{ch}(x) & \text{sh}(x)^2 &= \frac{\text{ch}(2x) - 1}{2} \\ \text{th}(2x) &= \frac{2\text{th}(x)}{1 + \text{th}(x)^2} & \text{th}(x) &= \frac{\text{sh}(2x)}{\text{ch}(2x) + 1} = \frac{\text{ch}(2x) - 1}{\text{sh}(2x)} \end{aligned}$$

4 Développements limités usuels en 0

$$\begin{aligned} e^x &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \end{aligned}$$

$$\text{ch}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln(1-x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} - \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} + o(x^n) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} + o(x^n) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + o(x^n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (\alpha - j) x^k \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{2^k k!} \prod_{j=0}^{k-1} (2j-1) x^k \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} (2k-2)!}{2^k (2^{k-1} (k-1)!)^2} x^k \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-3)}{2^n n!} x^n + o(x^n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1+x}} &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{2^k k!} \prod_{j=0}^{k-1} (2j+1) x^k \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (2k)!}{(2^k k!)^2} x^k \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8} x^2 - \cdots + (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2^n n!} x^n + o(x^n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\arctan(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\arcsin(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(2k)!}{(2^k k!)^2} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2^n n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})\end{aligned}$$

$$\tan x \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + \frac{17}{315} x^7 + o(x^8)$$

$$\operatorname{th}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 - \frac{17}{315} x^7 + o(x^8)$$

5 Croissances comparées

5.1 En $+\infty$

Si $\alpha, \beta > 0$ et $a > 1$,

$$\ln(x)^\alpha \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^\beta) \qquad x^\alpha \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(a^x)$$

et pour le cas des suites :

$$a^n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} (n!).$$

5.2 En 0

Si $\alpha < \beta$, alors $x^\beta \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^\alpha)$.

Si $\gamma > 0$,

$$\ln(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o\left(\frac{1}{x^\gamma}\right) \qquad x^\gamma \underset{x \rightarrow 0}{=} o\left(\frac{1}{\ln(x)}\right).$$

6 Dérivées

6.1 Dérivées usuelles

Fonction	Dérivée	Domaine de dérivabilité
x^n $n \in \mathbb{Z}$	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{N} \rightsquigarrow \mathbb{R}$ $n \in \mathbb{Z}_-^* \rightsquigarrow \mathbb{R}^*$
x^α $\alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}_+^*$ (dépend de α)
$e^{\alpha x}$ $\alpha \in \mathbb{C}$	$\alpha e^{\alpha x}$	$\mathbb{R}$
a^x $a > 0$	$\ln(a)a^x$	$\mathbb{R}$
$\ln x $	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$
$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$	$\frac{1}{x \ln(a)}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$1 + \tan(x)^2 = \frac{1}{\cos(x)^2}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
$\operatorname{ch}(x)$	$\operatorname{sh}(x)$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{sh}(x)$	$\operatorname{ch}(x)$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{th}(x)$	$1 - \operatorname{th}(x)^2 = \frac{1}{\operatorname{ch}(x)^2}$	$\mathbb{R}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$] -1, 1[$
$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$] -1, 1[$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$

6.2 Dérivées n -ème usuelles

Fonction	Dérivée n -ème
e^x	e^x
$\operatorname{ch}(x)$	$\begin{cases} \operatorname{ch}(x) & \text{si } n \equiv 0[2] \\ \operatorname{sh}(x) & \text{sinon} \end{cases}$
$\operatorname{sh}(x)$	$\begin{cases} \operatorname{sh}(x) & \text{si } n \equiv 0[2] \\ \operatorname{ch}(x) & \text{sinon} \end{cases}$
$\cos(x)$	$\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$
$\sin(x)$	$\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$
$x^\alpha \quad \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n} = \left(\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)\right)x^{\alpha-n}$
x^p	$\begin{cases} \frac{p!}{(p-n)!}x^{p-n} & \text{si } n \leq p \\ 0 & \text{si } n > p \end{cases}$
$\frac{1}{x}$	$\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$
$\ln(x)$	$\frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n}$

7 Primitives usuelles

7.1 Polynômes et Fractions rationnelles

Fonction	Primitive	Intervalles
$(x-x_0)^n \quad \begin{array}{l} x_0 \in \mathbb{R} \\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} \end{array}$	$\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$	$\begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \quad \leadsto \quad \mathbb{R} \\ n \leq -2 \quad \leadsto \quad \mathbb{R} \setminus \{x_0\} \end{array}$
$(x-x_0)^\alpha \quad \begin{array}{l} x_0 \in \mathbb{R} \\ \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-1\} \end{array}$	$\frac{(x-x_0)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$]x_0, +\infty[$
$(x-z_0)^n \quad \begin{array}{l} z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} \end{array}$	$\frac{(x-z_0)^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x-a} \quad a \in \mathbb{R}$	$\ln x-a $	$] -\infty, a[,]a, +\infty[$

7.2 Fonctions usuelles

Fonction	Primitive	Intervalles
$\ln(x)$	$x \ln(x) - x$	$\mathbb{R}_+^*$
$e^{\alpha x}$ $\alpha \in \mathbb{C}^*$	$\frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$-\ln \cos(x) $	$\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[, k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{sh}(x)$	$\operatorname{ch}(x)$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{ch}(x)$	$\operatorname{sh}(x)$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{th}(x)$	$\ln(\operatorname{ch}(x))$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$] -1, 1[$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2} \ln \left \frac{1+x}{1-x} \right $	$] -\infty, -1[,] -1, 1[,] 1, +\infty[$

7.3 Formules de Taylor

7.3.1 Formule de Taylor-Young

Si $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$, alors

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n).$$

7.3.2 Taylor avec reste intégrale

Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$, alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt$$

7.3.3 Inégalité de Taylor-Lagrange

Si $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ et $\|f^{(n)}\|_\infty \leq M$, alors

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x-a|^{n+1}.$$

7.3.4 Taylor polynomial

$$P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\widetilde{P^{(k)}}(a)}{k!} (X-a)^k.$$

8 Polynômes et Fractions rationnelles

8.1 Polynômes

8.1.1 Théorème fondamental de l'arithmétique dans $\mathbb{C}[X]$

Si $P \in \mathbb{C}[X]$, $\deg(P) \geq 1$, alors $\exists a \in \mathbb{C}^*$, $\exists n \in \mathbb{N}^*$, $\exists x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts, $\exists m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$P(X) = a \prod_{k=1}^n (X - x_k)^{m_k}.$$

8.1.2 Théorème fondamental de l'arithmétique dans $\mathbb{R}[X]$

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, $\deg(P) \geq 1$. Alors $\exists a \in \mathbb{R}^*$, $\exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$, $\exists x_1, \dots, x_{n_1} \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts, $\exists (p_1, q_1), \dots, (p_{n_2}, q_{n_2}) \in \mathbb{R}^2$ deux à deux distincts tels que $\forall j \in \{1, \dots, n_2\}$, $\Delta_j = p_j^2 - 4q_j < 0$ et $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_{n_1}, \beta_1, \dots, \beta_{n_2} \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$P(X) = a \prod_{k=1}^{n_1} (X - x_k)^{\alpha_k} \prod_{j=1}^{n_2} (X^2 + p_j X + q_j)^{\beta_j}$$

8.1.3 Relations coefficients/racines

Soit $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$ scindé. Soit $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ ses racines comptées avec multiplicités. Alors

$$\sum_{k=1}^n x_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad \text{et} \quad \prod_{k=1}^n x_k = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Plus généralement, avec les fonctions symétriques élémentaires

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \prod_{j=1}^k x_{i_j} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}.$$

8.1.4 Polynômes interpolateur de Lagrange

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts.

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, L_k(X) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{X - x_j}{x_k - x_j}.$$

Alors

$$\begin{cases} \forall k \in \{0, \dots, n\}, \deg(L_k) = n \\ \forall i, j \in \{0, \dots, n\}, \widetilde{L}_i(x_j) = \delta_{i,j} \\ (L_0, \dots, L_n) \text{ base de } \mathbb{K}_n[X]. \end{cases}$$

et

$$\forall P \in \mathbb{K}_n[X], P(X) = \sum_{k=0}^n \widetilde{P}(x_k) L_k(X).$$

8.2 Fractions Rationnelles

8.2.1 Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$

Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ (sous forme irréductible). Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ les pôles de F d'ordre $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}^*$ respectivement. Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ la partie entière de F .

Alors $\exists! (\lambda_{k,\ell})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq \ell \leq m_k}} \in \mathbb{C}^{m_1 + \dots + m_n}$ tel que

$$F(X) = Q(X) + \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^{m_k} \frac{\lambda_{k,\ell}}{(X - \alpha_k)^\ell}.$$

8.2.2 Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$

Soit $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{R}(X)$ sous forme irréductible. Par le théorème fondamentale de l'arithmétique dans $\mathbb{R}[X]$, B se factorise sous la forme $B(X) = \prod_{k=1}^r (X - x_k)^{\alpha_k} \prod_{j=1}^s (X^2 + p_j X + q_j)^{\beta_j}$, avec $p_j^2 - 4q_j < 0$. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ la partie entière de F .

Alors il existe trois familles uniques de réels $(\lambda_{k,\ell})_{\substack{1 \leq k \leq r \\ 1 \leq \ell \leq \alpha_k}}$, $(\gamma_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq s \\ 1 \leq j \leq \beta_i}}$ et $(\mu_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq s \\ 1 \leq j \leq \beta_i}}$ tels que

$$F(X) = Q(X) + \underbrace{\sum_{k=1}^r \sum_{\ell=1}^{\alpha_k} \frac{\lambda_{k,\ell}}{(X - x_k)^\ell}}_{\text{éléments simples de 1ère espèce}} + \underbrace{\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{\beta_i} \frac{\gamma_{i,j} X + \mu_{i,j}}{(X^2 + p_i X + q_i)^j}}_{\text{éléments simples de 2ème espèce}}.$$

8.2.3 Cas des pôles simples

Soit $F = A/B \in \mathbb{K}(X)$ irréductible. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ un pôle simple de F . Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\frac{\lambda}{X - \alpha}$ soit la partie polaire de F associée à α . Soit $B_1 \in \mathbb{K}[X]$ tel que $B(X) = (X - \alpha)B_1(X)$ et $\widetilde{B_1}(\alpha) \neq 0$. Alors

$$\lambda = \widetilde{(X - \alpha)F}(\alpha) = \frac{\widetilde{A}(\alpha)}{\widetilde{B_1}(\alpha)} = \frac{\widetilde{A}(\alpha)}{\widetilde{B}'(\alpha)}.$$

8.2.4 Cas particulier P'/P

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ scindé.

Alors $\exists a \in \mathbb{K}^*$, $\exists n \in \mathbb{N}^*$, $\exists x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts, $\exists m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}^*$ tels que $P(X) = a \prod_{k=1}^n (X - x_k)^{m_k}$ et alors

$$\frac{P'(X)}{P(X)} = \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{X - x_k}.$$

9 Matrices

9.1 Produit matriciel

Si $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{j,k}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Alors $C = AB \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ et

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall k \in \{1, \dots, q\}, c_{i,k} = \sum_{j=1}^p a_{i,j} b_{j,k}.$$

$$\underbrace{E_{i,j}}_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})} \underbrace{E_{k,\ell}}_{\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})} = \delta_{j,k} \underbrace{E_{i,\ell}}_{\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})}.$$

Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $Y \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$, alors

$$AX = \sum_{j=1}^p x_j C_j(A) \quad YA = \sum_{i=1}^n y_i L_i(A).$$

9.2 Transposée, Matrices symétriques, Matrices antisymétriques

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$$

$$\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{K})) = \frac{n(n+1)}{2} \quad \dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{K})) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad M = \underbrace{\frac{M + {}^t M}{2}}_{\mathcal{S}_n(\mathbb{K})} + \underbrace{\frac{M - {}^t M}{2}}_{\mathcal{A}_n(\mathbb{K})}.$$

9.3 Trace

Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors

$$\text{tr}(A) = \sum_{k=1}^{\min(n,p)} a_{k,k}.$$

Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, alors

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA).$$

Et

$$\text{tr}(A) = \text{tr}({}^t A).$$

9.4 Déterminant

9.4.1 Formule de Sarrus

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n a_{k,\sigma(k)}.$$

9.4.2 Développement selon une ligne ou une colonne

$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{k=1}^n a_{i,k} (-1)^{i+k} A_{i,k} && \text{Développement selon } L_i \\ &= \sum_{k=1}^n a_{k,j} (-1)^{k+j} A_{k,j} && \text{Développement selon } C_j \end{aligned}$$

9.4.3 Déterminant de Vandermonde

$$V(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

9.5 Système de Cramer

Si $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, alors la solution du système $AX = B$ est donnée par

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i = \frac{\det(C_1(A), \dots, C_{i-1}(A), B, C_{i+1}(A), \dots, C_n(A))}{\det(A)}.$$

9.6 Comatrice

$$\text{com}(A) = ((-1)^{i+j} A_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$$

$${}^t \text{com}(A)A = A {}^t \text{com}(A) = \det(A)I_n.$$

10 Séries

10.1 Produit de Cauchy

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites, le produit de Cauchy des suites (u_n) et (v_n) est la suite (w_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^n u_{n-k} v_k.$$

Si $\sum u_n$ converge absolument et $\sum v_n$ converge absolument, alors $\sum w_n$ converge absolument et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} \right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right).$$

10.2 Série de Riemann

$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.
Et

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

10.3 Série exponentielle

$$\forall z \in \mathbb{C}, \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

10.4 Familles sommables

Critère de sommabilité des séries doubles :

Soit $(a_{p,q})_{p,q \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^2}$.

$$(a_{p,q})_{p,q \in \mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N}^2, \mathbb{C}) \iff \begin{cases} \forall p \in \mathbb{N}, \sum_{q \in \mathbb{N}} |a_{p,q}| \text{ converge} \\ \sum_{p \in \mathbb{N}} \left(\sum_{q=0}^{+\infty} |a_{p,q}| \right) \text{ converge} \end{cases}$$

Et dans ce cas

$$\sum_{p,q \in \mathbb{N}} a_{p,q} = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{q=0}^{+\infty} a_{p,q} = \sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,q} \quad [\text{Fubini discret}]$$

11 Espaces Préhilbertiens

11.1 Produits scalaires canoniques

Ev	Produit scalaire	Commentaires
$\mathbb{R}^n$	$\langle x y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k$	Dans la base canonique
$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$	$\langle A B \rangle = \text{tr}(A^t B) = \text{tr}({}^t A B)$	
$\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$	$\langle f g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$	
$\mathbb{R}[X]$	$\langle P Q \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \widetilde{P^{(n)}}(a) \widetilde{Q^{(n)}}(a)$	$a \in \mathbb{R}$
	$\langle P Q \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$	$P(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n, Q(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n X^n$
	$\langle P Q \rangle = \int_a^b \tilde{P}(t) \tilde{Q}(t) dt$	
$\mathbb{R}_n[X]$	$\langle P Q \rangle = \sum_{k=0}^n \tilde{P}(a_k) \tilde{Q}(a_k)$	$a_1, \dots, a_n$ deux à deux distincts dans $\mathbb{R}$

Sur $\mathbb{R}[X]$ la liste n'est pas exhaustive.

11.2 Normes usuelles

Nom	Notation	$\mathbb{R}^n$	$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$	$\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$
Norme 1	$\ \cdot\ _1$	$\sum_{k=1}^n x_k $	$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} $	$\int_a^b f(t) dt$
Norme 2	$\ \cdot\ _2$	$\sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$	$\sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2}$	$\sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt}$
Norme infinie	$\ \cdot\ _\infty$	$\max_{1 \leq k \leq n} x_k $	$\max_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} $	$\sup_{x \in [a, b]} f(x) $

11.3 Théorème de Pythagore

Si $(x_1, \dots, x_n)$ est orthogonale, alors

$$\left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2.$$

Il y a équivalence, si et seulement si, $n = 2$.

11.4 Expression dans une BON

Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une BON, alors

$$x = \sum_{k=1}^n \langle x | e_k \rangle e_k, \quad \langle x | y \rangle = \sum_{k=1}^n \langle x | e_k \rangle \langle y | e_k \rangle, \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^n \langle x | e_k \rangle^2.$$

11.5 Projections orthogonales

Si F est de dimension finie et $(e_1, \dots, e_p)$ est une BON de F et p_F la projection orthogonale sur F , alors

$$p_F(x) = \sum_{k=1}^p \langle x | e_k \rangle e_k.$$

11.6 Distance à un sev

Soit F de dimension finie, $(e_1, \dots, e_p)$ une BON de F . Alors

$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$$

et

$$d(x, F)^2 = \|x - p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2$$

si $F^\perp$ est de dimension finie

$$d(x, F)^2 = \|p_{F^\perp}(x)\|^2$$

12 Variables Aléatoires

12.1 Espérance, Variance, Covariance

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\}).$$

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X(X - 1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2$$

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

12.2 Inégalité de Markov

Si $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$, alors

$$\forall a \geq 0, \mathbb{E}(X) \geq a \mathbb{P}(X \geq a).$$

12.3 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$\forall \varepsilon > 0, \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2} \geq \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon)$$

12.4 Lois usuelles

12.4.1 Loi uniforme

$$X \sim \mathcal{U}(n) \iff \begin{cases} X(\Omega) = \{1, \dots, n\} \\ \forall k \in \{1, \dots, n\}, \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n} \end{cases}$$
$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}, \quad \mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

12.4.2 Loi de Bernoulli

$$X \sim \mathcal{B}(p) \iff \begin{cases} X(\Omega) = \{0, 1\} \\ \mathbb{P}(X = 1) = p \\ \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p \end{cases}$$
$$\mathbb{E}(X) = p \quad \mathbb{V}(X) = p(1 - p)$$

12.4.3 Loi binomiale

$$X \sim \mathcal{B}(n, p) \iff \begin{cases} X(\Omega) = \{0, \dots, n\} \\ \forall k \in \{0, \dots, n\}, \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \end{cases}$$
$$\mathbb{E}(X) = np \quad \mathbb{V}(X) = np(1-p)$$

Schéma de Bernoulli :

Si $X_1, \dots, X_n$ VAAID $\mathcal{B}(p)$, alors $\sum_{k=1}^n X_k \sim \mathcal{B}(n, p)$