



Chapitre 4 - TD : Fonctions usuelles

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

mardi 22 septembre, 2026

1 Puissances et logarithmes

Exercice 1 :

Soit $x > 0$ et $a = e^{x^2}$ et $b = \frac{\ln(x^{1/x})}{x}$. Simplifier a^b .

Correction

Exercice 2 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $e^x + e^{1-x} = e + 1$
2. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$
3. $2^{2x} - 3^{x-1/2} = 3^{x+1/2} - 2^{2x-1}$

Correction

Exercice 3 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système

$$\begin{cases} 8^x = 10y \\ 2^x = 5y \end{cases}$$

Correction

Exercice 4 :

Montrer que :

$$\begin{cases} \forall x > -1, \ln(1+x) \leq x \\ \forall x \geq 0, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \end{cases}$$

En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$,

$$(1 + 1/n)^n \leq e \leq (1 + 1/n)^{n+1}$$

Correction

Exercice 5 :

Soit $0 < a \leq b$ et $f : x \mapsto \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Étudier la monotonie de f et en déduire

$$\ln(1 + a/b) \ln(1 + b/a) \leq \ln(2)^2$$

Correction

Exercice 6 (Lemme de Gibbs (*)) :

Justifier la relation

$$\forall x > 0, \ln(x) \leq x - 1$$

et étudier les cas d'égalité.

Soit $(p_1, \dots, p_n), (q_1, \dots, q_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ tels que $\sum_{k=1}^n p_k = \sum_{k=1}^n q_k = 1$. Montrer que

$$\sum_{i=1}^n p_i \ln(q_i) \leq \sum_{i=1}^n p_i \ln(p_i)$$

et étudier les cas d'égalité.

Correction**2 Fonctions trigonométriques****Exercice 7 :**Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a + b + c \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$. Développer

$$\cos(3a) \quad \text{et} \quad \tan(a + b + c)$$

Correction**Exercice 8 :**Soit $p, q \in \mathbb{R}$ tels que $\sin(p) + \sin(q) \neq 0$. Simplifier

$$\frac{\cos(q) - \cos(p)}{\sin(p) + \sin(q)}$$

et en déduire la valeur de $\tan(\pi/24)$.Correction**Exercice 9 :**

Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\cos(x) - \sin(x)| \leq \sqrt{2}.$$

Correction**Exercice 10 :**Pour $a, b \in \mathbb{R}$, calculer

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(a + kb) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(a + kb)$$

Correction**Exercice 11 :**Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

- | | |
|--|---|
| a) $\cos(2x - \pi/3) = \sin(x + 3\pi/4)$ | b) $\cos(x)^4 + \sin(x)^4 = 1$ |
| c) $\sin(x) + \sin(3x) = 0$ | d) $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = 0$ |
| e) $3\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = \sqrt{6}$ | f) $2\sin(x)\cos(x) + \sqrt{3}\cos(2x) = 0$ |
| g) $\tan(x)\tan(2x) = 1$ | |

Correction

3 Fonctions trigonométriques réciproques

Exercice 12 :

Simplifier les expressions suivantes (en mettant les bons quantificateurs) :

$$\begin{array}{lll} a) \cos(2 \arccos(x)) & b) \cos(2 \arcsin(x)) & c) \sin(2 \arccos(x)) \\ d) \cos(2 \arctan(x)) & e) \sin(2 \arctan(x)) & f) \tan(2 \arcsin(x)) \end{array}$$

Correction

Exercice 13 :

Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier de deux manières différentes, l'expression :

$$\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

Correction

Exercice 14 :

Étudier les fonctions suivantes afin de pouvoir les dessiner facilement

$$\begin{array}{ll} a) f_1 : x \mapsto \arcsin(\sin(x)) + \arccos(\cos(x)) & b) f_2 : x \mapsto \arccos \sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}} \\ c) f_3 : x \mapsto \arcsin(\sin(x)) + \frac{1}{2} \arccos(\cos(2x)) & d) f_4 : x \mapsto \arccos(\cos(x)) + \frac{1}{2} \arcsin(\sin(2x)) \end{array}$$

Correction

Exercice 15 (Formule de Machin) :

On se propose de calculer, de deux façons différentes $\arctan(1) + \arctan(2) + \arctan(3)$.

- Calculer $(1+i)(1+2i)(1+3i)$.
 - Exprimer un argument de $1+i$, $1+2i$ et $1+3i$ à l'aide de $\arctan$, puis en déduire la valeur de $\arctan(1) + \arctan(2) + \arctan(3)$.
- Exprimer $\tan(a+b+c)$ en fonction de $\tan(a)$, $\tan(b)$, $\tan(c)$, pour $a, b, c \in]0, \pi/2[$ tels que $a+b+c \in]0, \pi/2[$.
 - Calculer directement la valeur de $\arctan(1) + \arctan(2) + \arctan(3)$ à l'aide de l'application directe du cours sur l'arctangente.
- [Bonus ***] Essayer de trouver une méthode similaire pour montrer la formule de Machin :

$$\pi = 16 \arctan(1/5) - 4 \arctan(1/239).$$

Correction

Exercice 16 :

Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \arctan(3x) - \arctan(x) = \arctan\left(\frac{2x}{1+3x^2}\right).$$

Correction

Exercice 17 :

Soit $f : x \mapsto \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) - 2 \arctan(x)$.

1. Dresser le tableau de variation de $\varphi : x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer le domaine de définition de f et son domaine de dérivabilité.
3. Calculer $f'(x)$.
4. Calculer $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
5. En déduire

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -\pi - 4 \arctan(x) & x < -1 \\ 0 & x \in [-1, 1] \\ \pi - 4 \arctan(x) & x > 1 \end{cases}$$

Correction

Exercice 18 :

Simplifier :

1. $\arctan(1/2) + \arctan(1/5) + \arctan(1/8)$
2. $\arctan(2) + \arctan(3) + \arctan(2 + \sqrt{3})$
3. $\arcsin(4/5) + \arcsin(5/13) + \arcsin(16/65)$

Correction

Exercice 19 :

Résoudre les équations suivantes d'inconnues $x \in \mathbb{R}$:

- | | |
|--|--|
| 1) $\arcsin(x) = \arcsin(4/5) + \arcsin(5/13)$ | 2) $\arcsin(\tan(x)) = x$ |
| 3) $\arccos(x) = \arcsin(2x)$ | 4) $\arctan(x) + \arctan(x\sqrt{3}) = 7\pi/12$ |
| 5) $\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \arctan(x)$ | 6) $\arcsin\left(\frac{\tan(x)}{2}\right) = x$ |

Correction

Exercice 20 (Choix d'un argument en physique et en SI) :

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}^*$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$ un argument de z .

1. Montrer que

$$\theta = \begin{cases} \arctan(b/a) & \text{si } a > 0 \\ \pi/2 & \text{si } a = 0, b > 0 \\ \arctan(b/a) + \pi & \text{si } a < 0, b \geq 0 \\ -\pi/2 & \text{si } a = 0, b < 0 \\ \arctan(b/a) - \pi & \text{si } a < 0, b < 0 \end{cases}$$

2. Montrer que

$$\theta = \text{sign}(b) \arccos(a/|z|)$$

Correction

Exercice 21 :

On va calculer $\arctan(a) + \arctan(b)$ pour $ab \neq 1$.

1. Soit $a, b > 0$.

- (a) Montrer que $\arctan(a) - \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a-b}{1+ab}\right)$.
- (b) Calculer $\arctan\left(\frac{7}{\sqrt{3}}\right) - \arctan\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto \arctan(x) + \arctan(a) - \arctan\left(\frac{a+x}{1-ax}\right)$.
- (a) Justifier que f est dérivable sur son ensemble de définition et calculer f' .
 - (b) Soit $b \in \mathbb{R}$ tel que $ab \neq 1$. Montrer que $f(b)$ est un multiple entier de π , en discutant le signe de a et $ab - 1$.
 - (c) En déduire une expression simplifiée de $\arctan(a) + \arctan(b)$.
3. Calculer :
- (a) $\arctan(1/2) + \arctan(1/5) + \arctan(1/8)$
 - (b) $\arctan(2) + \arctan(5) + \arctan(8)$

Remarque :

On pourrait aussi retrouver la formule de Machin rappelé dans l'exercice 15

Correction

4 Fonctions hyperboliques

Exercice 22 :

Établir que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $\operatorname{sh}(x) \geq x$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(x) \geq 1 + \frac{x^2}{2}$

Correction

Exercice 23 :

Soit $y \in]-\pi/2, \pi/2[$. On pose $x = \ln\left(\tan\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$. Montrer que

$$\operatorname{th}(x/2) = \tan(y/2), \quad \operatorname{th}(x) = \sin(y), \quad \operatorname{ch}(x) = \frac{1}{\cos(y)}$$

Correction

Exercice 24 :

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Calculer

$$\sum_{k=0}^n \operatorname{ch}(a + kb) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n \operatorname{sh}(a + kb)$$

puis exprimer $\operatorname{ch}(a)^n$ et $\operatorname{sh}(a)^n$ en fonction des $\operatorname{ch}(ka)$ et $\operatorname{sh}(ka)$ (selon la parité de n) et enfin $\operatorname{ch}(na)$ et $\operatorname{sh}(na)$ en fonction de $\operatorname{ch}(a)^k$ et $\operatorname{sh}(a)^k$.

Correction

Exercice 25 :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, simplifier

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^n \operatorname{ch}(x/2^k)$$

en calculant $P_n(x) \operatorname{sh}(x/2^n)$ et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x)$.

Correction

Exercice 26 :

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, montrer que

$$\operatorname{th}((n+1)x) - \operatorname{th}(nx) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(nx) \operatorname{ch}((n+1)x)}$$

Calculer alors

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\operatorname{ch}(kx) \operatorname{ch}((k+1)x)}$$

Correction