



Chapitre 7 - TD : Suites

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

mardi 13 octobre, 2026

1 Généralités

Exercice 1 :

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

1. Montrer que si (u_n) et (v_n) sont convergentes vers ℓ et ℓ' respectivement avec $\ell < \ell'$, alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $u_n < v_n$.
2. Montrer que si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq a$ et $v_n \leq b$ et $u_n + v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a + b$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = b$.
3. Si $\forall n \geq 0$, $0 \leq u_n, v_n \leq 1$ et $u_n v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$, que peut-on dire pour ces suites ?

Correction

Exercice 2 ([✓]) :

Soit (u_n) une suite de réels non nuls telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

1. Montrer que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $|u_{n+1}| \leq \frac{|u_n|}{2}$.
2. En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Correction

Exercice 3 (Centrale PC (***)) :

Soit $K > 1$, (κ_n) une suite de réels positifs convergeant vers 0 et $(u_n) \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+1} \leq \frac{u_n + \kappa_n}{K}$$

1. Montrer que

$$\forall \eta > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, 0 \leq u_n \leq \frac{u_{n_0}}{K^{n-n_0}} + \eta \frac{1/K - 1/K^{n-n_0+1}}{1 - 1/K}$$

à l'aide d'une récurrence.

2. En déduire alors que (u_n) converge vers 0.

Correction

Exercice 4 :

Soit (u_n) une suite d'entiers naturels deux à deux distincts. Montrer que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$.

Correction

Exercice 5 :

1. Établir que

$$\forall x \geq 0, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$$

2. En déduire la limite de (u_n) définie par

$$\forall n \geq 1, u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$$

Correction

2 Limites

Exercice 6 (Calcul de limite) :

Déterminer les limites des suites suivantes :

- | | | |
|--|--|--|
| 1. $u_n = \frac{3^n - (-2)^n}{3^n + (-2)^n}$ | 2. $\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}$ | 3. $u_n = \frac{n - \sqrt{n^2 + 1}}{n + \sqrt{n^2 - 1}}$ |
| 4. $u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k$ | 5. $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ | 6. $u_n = \sqrt[n]{n^2}$ |
| 7. $u_n = \frac{\sin n}{n + (-1)^{n+1}}$ | 8. $u_n = \frac{n!}{n^n}$ | 9. $u_n = \frac{n - (-1)^n}{n + (-1)^n}$ |
| 10. $u_n = \frac{e^n}{n^n}$ | 11. $u_n = \sqrt[n]{2 + (-1)^n}$ | |

Correction

Exercice 7 :

Étudier

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - 1/n)^n, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{m \rightarrow +\infty} (1 - 1/n)^m, \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - 1/n)^m$$

Correction

Exercice 8 :

Étudier la fonction

$$f : x \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{m \rightarrow +\infty} \cos(n! \pi x)^{2m}.$$

Correction

Exercice 9 :

1. Montrer que

$$\forall n \geq 4, \forall k \in \{2, \dots, n-2\}, \binom{n}{k} \geq \frac{n(n-1)}{2}$$

2. En déduire la limite de

$$u_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^{-1}$$

Correction

Exercice 10 (Théorème de Césaro) :

1. Démontrer le théorème de Césaro : Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ convergente, alors $\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite convergente de même limite.
2. Montrer que le théorème de Césaro est encore vraie si $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ divergente vers $\pm\infty$.
3. La réciproque du théorème de Césaro est-elle vraie ?
4. En déduire le lemme de l'escalier : Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $\exists \ell \in \mathbb{C}$ tel que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$, alors $\frac{u_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.
5. Montrer que si $u \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telle que (u_{n+1}/u_n) est convergente, alors $(\sqrt[n]{u_n})$ est convergente et de même limite.
6. Déterminer les limites des suites de terme général :

$$u_n = \binom{2n}{n}^{1/n}, \quad v_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n}}, \quad w_n = \frac{\sqrt[n]{n(n+1)(n+2)\dots(n+n)}}{n},$$

$$x_n = \frac{\sqrt[n]{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}}{n}, \quad y_n = \frac{1}{n^2} \sqrt[n]{\frac{(3n)!}{n!}}.$$

Correction

Exercice 11 ([√]) :

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$.

1. Montrer que si $\ell < 1$, alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$
2. Montrer que si $\ell > 1$, alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$
3. Montrer que si $\ell = 1$, on ne peut rien dire.

Correction

Exercice 12 :

Soit $\rho > 0$ et $\theta \in]0, \pi[$. on considère la suite complexe définie par $z_0 = \rho e^{i\theta}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}$$

1. Exprimer z_n sous forme d'un produit.
2. Déterminer $\lim z_n$.

Correction

Exercice 13 :

Soit (x_n) et (y_n) deux suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \frac{x_n - y_n}{2} \quad \text{et} \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$$

En introduisant la suite complexe $z_n = x_n + iy_n$ montrer que les suites (x_n) et (y_n) convergent et déterminer leur limites.

Correction

Exercice 14 :

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_n \leq \frac{k}{n} + \frac{1}{k}$$

Montrer que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Correction

Exercice 15 :

Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de segments de $\mathbb{R}$. Donc $\exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = [a_n, b_n]$. On suppose que la suite des segments est emboîtée, i.e. on suppose que $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} \subset I_n$.

1. Montrer que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$.
2. De plus, montrer que si $b_n - a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, alors $\exists ! x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{x_0\}$.

Correction

Exercice 16 (Suites adjacentes) :

Montrer que les suites deux suites suivantes sont adjacentes :

1. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$ (la limite est $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ et sera étudiée plus en détails plus tard dans l'année)
2. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n}$ et $v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$ (ces suites sont aussi des suites de Riemann qui seront étudiées plus tard dans l'année, de limites $\ln(2)$).

Correction

3 Suites Arithmético-géométrique

Exercice 17 :

Déterminer les expressions en fonction de n des suites suivantes :

1. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2 - 3u_n$.
2. $z_0 = 1 + i$ et $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = (2 - 3i)z_n + 5 + i$
3. $v_0 = -2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = (\sqrt{2} - 1)v_n + 1 + \sqrt{2}$

Correction

Exercice 18 :

Soit les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \text{ et } v_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 2u_n + 3v_n \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(u_n - v_n)$ est constante.
2. Prouver que (u_n) est arithmético-géométrique.

3. Exprimer les termes généraux de (u_n) et (v_n) en fonction de n .

Correction

4 Suites récurrentes

Exercice 19 :

Déterminer l'expression des termes généraux des suites suivantes :

1. $u_0 = 0, u_1 = 1 + 4i$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = (3 - 2i)u_{n+1} - (5 - 5i)u_n$.
2. $u_0 = 1, u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.
3. $u_0 = 1, u_1 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, 2u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$.
4. $u_0 = 1, u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$.
5. $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 2\cos(\theta)u_{n+1} + u_n = 0$ où $0 < \theta < \pi$.
6. $u_0 > 0, u_1 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \sqrt[3]{u_{n+1}u_n^2}$.
7. $u_0 > 0, u_1 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{u_{n+1}u_n}{\sqrt{3u_n - u_{n+1}}}$.
8. $u_0 = 2, u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{u_n^2}{u_{n+1}}$.

Correction

Exercice 20 :

Étudier la suite définie par

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$$

Correction

Exercice 21 :

Étudier la suite (u_n) définie par

$$u_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = e^{u_n} - 1$$

Correction

Exercice 22 :

Étudier la suite définie par

$$u_0 > 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2 + u_n}$$

Correction

Exercice 23 ([✓]) :

Soit (u_n) la suite réelle définie par

$$u_0 = a \in [-6, 6] \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{6 - u_n}$$

1. Justifier que la suite (u_n) est bien définie et $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_n \leq 6$.
2. Quelles sont les limites possibles pour (u_n) ?
3. Montrer que $(|u_n - 2|)$ converge et en déduire la limite de (u_n) .

Correction

5 Suites extraites

Exercice 24 :

Montrer que les suites $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\sin(n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne convergent pas.

Correction

Exercice 25 :

Soit (u_n) une suite réelle. Si on suppose que $\forall n, p \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_{n+p} \leq \frac{n+p}{np}$, montrer que (u_n) tend vers 0.

Correction

Exercice 26 :

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ croissante telle (u_{2n}) converge.

Montrer que u converge.

Correction

Exercice 27 ([✓]) :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Montrer que (u_n) n'est pas forcément croissante mais qu'on peut en extraire une sous-suite strictement croissante.

Correction

Exercice 28 (Théorème d'approximation de Dirichlet (**)) :

Le théorème d'approximation de Dirichlet est un théorème fondamental en théorie des nombres permettant d'approcher un réel (et de préférence un irrationnel) par une suite de rationnel avec une approximation quadratique. Ce théorème a de nombreuses applications en théorie des nombres. Il est le fondement de la mesure d'irrationalité d'un nombre réel, qui donne, en quelque sorte, "l'éloignement" d'un réel par rapport aux rationnels.

1. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \forall N \in \mathbb{N}^*, \exists (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, 1 \leq q \leq N, \left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2}.$$

Indic : Considérer les $[kx]$ pour $k \in \{1, \dots, N+1\}$ et utiliser le principe des tiroirs.

2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \exists (p_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{Z}^*)^{\mathbb{N}}, \exists (q_n) \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$, tel que $q_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n^2}.$$

Correction

6 Négligeabilité, Dominance, Équivalence

Exercice 29 ([✓]) :

Déterminer les limites des suites de terme général suivants :

- | | | |
|---|--|--|
| 1) $\sqrt[n]{n}$ | 2) $(1 + \frac{x}{n})^n, (x \in \mathbb{R})$ | 3) $(\frac{n-1}{n+1})^{n+2}$ |
| 4) $n^2 \left(\cos(1/n) - \cos\left(\frac{1}{n+1}\right) \right)$ | 5) $\tan(\pi/4 + \alpha/n)^n$ | 6) $\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{n \ln n}$ |
| 7) $\left(\frac{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{4}}{3}\right)^n$ | 8) $(\sin(1/n))^{1/n}$ | 9) $\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$ |
| 10) $\cos(\pi n e^{\frac{1}{2n}})$ | 11) $n \sqrt{\ln\left(1 + \frac{1}{n^2+1}\right)}$ | 12) $(1 + \sin(1/n))^n$ |

Correction**Exercice 30 :**

Déterminer les limites des suites suivantes :

- $n^2 \left((n+1)^{1/n} - n^{1/n} \right)$
- $\left(\frac{a^{1/n} + b^{1/n}}{2} \right)^n$ où $a, b \geq 0$.
- $(3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3})^n$

Correction**Exercice 31 ([✓]) :**

Trouver un équivalent simple aux suites suivantes :

- | | | |
|--|--------------------------------------|---|
| 1) $(n + 3 \ln n)e^{-n-1}$ | 2) $\frac{\ln(n^2+1)}{n+1}$ | 3) $\frac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt[3]{n^2-n+1}}$ |
| 4) $\frac{n^3 - \sqrt{n^2+1}}{\ln n - 2n^2}$ | 5) $\frac{2n^3 - \ln n + 1}{n^2+1}$ | 6) $\frac{n! + e^n}{2^n + 3^n}$ |
| 7) $\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$ | 8) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$ | 9) $\sqrt{\ln(n+1) - \ln n}$ |
| 10) $\frac{\ln(n+1) - \ln n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$ | 11) $n^{+1}\sqrt{n+1} - \sqrt[n]{n}$ | 12) $\frac{\cos(1/n) - \cos(2/n)}{\ln(1+1/n) - \ln(1+2/n)}$ |
| 13) $\binom{2n}{n}$ | 14) $\sqrt[n]{n!}$ | 15) $\prod_{k=1}^n (2k+1)$ |

Correction**Exercice 32 (** [✓]) :**On veut déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ vérifiant

$$\forall x > 0, f(f(x)) = 6x - f(x)$$

- Soit f une telle fonction. Soit $x_0 > 0$. On définit la suite (u_n) par

$$\begin{cases} u_0 = x_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

- Montrer que

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda 2^n + \mu(-3)^n.$$

- Montrer que $\mu = 0$.

2. Conclure.

Correction

Exercice 33 :

Soit $\theta \in]0, \pi/2[$ et

$$u_n = 2^n \sin(2^{-n}\theta) \quad \text{et} \quad v_n = 2^n \tan(2^{-n}\theta)$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Quelle est leur limite commune ?

Correction

Exercice 34 :

On pose

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. En déduire un équivalent de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Correction

Exercice 35 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \sum_{k=0}^n k!$$

Montrer que $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n!$

Correction

Exercice 36 (MINES MP) :

Donner un développement asymptotique de $\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n k!$ à 4 termes.

Correction

Exercice 37 :

Soit (u_n) une suite réelle décroissante telle que

$$u_n + u_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

Déterminer un équivalent simple de u_n .

Correction

7 Suites implicites

Exercice 38 :

Montrer que la relation $nu_n^{n+1} - (n+1)u_n^n = 1$ définit une unique suite positive (u_n) . Étudier sa convergence et préciser sa limite.

Correction

Exercice 39 ([✓]) :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit les équations

$$x^n + x^{n-1} + \dots + x = 1 \quad (E_n)$$

1. Montrer que (E_n) possède une unique solution $x_n \in \mathbb{R}_+$ et même que $x_n \in [1/2, 1]$.
2. Montrer que (x_n) converge.
3. Déterminer sa limite.

Correction

Exercice 40 ([✓]) :

1. Montrer que l'équation $\tan(x) = x$ a une unique solution dans $I_n =]-\pi/2 + n\pi, n\pi + \pi/2[$.
2. Déterminer un équivalent de x_n .
3. Donner un développement asymptotique de 3 termes de x_n .

Correction

Exercice 41 (Centrale MP **) :

Montrer que l'équation $x^n + x^2 - 1 = 0$ admet une unique racine réelle strictement positive pour $n \geq 1$ notée x_n . Détermine la limite ℓ de x_n , puis un équivalent de $x_n - \ell$.

Correction

8 Shampooing (Tout-en-un)**Exercice 42 ([✓]) :**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = 1$ et $\forall n \geq 2, u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}$.

1. Montrer que $\forall n \geq 1, \sqrt{n} \leq u_n \leq 2\sqrt{n}$
2. Montrer que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n}$
3. Calculer la limite de $(u_n - \sqrt{n})$.

Correction

Exercice 43 (Constante d'Euler) :

On étudie la suite (S_n) de terme général

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

1. Établir que pour tout $t > -1, \ln(1+t) \leq t$ et en déduire

$$\forall t > 0, \ln(1+t) \geq \frac{t}{t+1}$$

2. Observer que

$$\forall n \geq 2, \ln(n+1) \leq S_n \leq 1 + \ln n$$

et en déduire un équivalent simple de S_n .

3. Montrer que la suite $(u_n) = (S_n - \ln n)$ est convergente. Sa limite est appelé Constante d'Euler et notée γ .

Correction**Exercice 44 (Irrationalité de e) :**

On définit

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad b_n = a_n + \frac{1}{nn!}$$

1. Montrer que (a_n) et (b_n) sont strictement monotones et adjacentes.

On admet qu'elles convergent vers e (on pourra le montrer une fois qu'on aura vu les Développement limité et les formules de Taylor-Young, Taylor-Lagrange et les autres). On veut montrer par l'absurde que $e \notin \mathbb{Q}$. Donc on suppose que $e = p/q$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$.

2. Montrer que $a_q < e < b_q$ et en déduire une absurdité.

Correction