Lycée Loges

Chapitre 8 - TD
Groupes - Anneaux - Corps

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

lundi 9 novembre, 2026

1 Groupes

Exercice 1 (Loi de composition) :
On définit une loi de composition interne $\star$ sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ a \star b = \ln(e^a + e^b).$$

Quelle sont les propriétés de cette loi (associativité, commutativité) ? Y a-t-il un élément neutre ?

Exercice 2 (Exemple de groupe) :
On pose $E = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ et on définies les applications

$$i(x) = x,\ f(x) = 1 - x,\ g(x) = \frac{1}{x},\ h(x) = \frac{x}{x-1},\ k(x) = \frac{x-1}{x},\ \ell(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Montrer que ces applications sont des bijections sur E et que $G = \{i, h, g, h, k, \ell\}$ est un groupe non abélien pour la composition.

Exercice 3 :
Dire si les ensembles suivants sont-ils des groupes ou non :

1. L'ensemble des bijections continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ muni de la loi $\circ$
2. L'ensemble des bijections dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ muni de la loi $\circ$
3. $\{a + \omega b,\ a, b \in \mathbb{Z}\}$ et $\omega \in \mathbb{C}$ muni de la loi $+$
4. $\{a^n,\ n \in \mathbb{Z}\}$, $a \in \mathbb{C}^*$, muni de $\times$
5. $\{f_{a,b} : z \mapsto az + b,\ a \in \mathbb{C}^*,\ b \in \mathbb{C}\}$ muni de $\circ$

Exercice 4 :
Déterminer si les ensembles H suivants sont des sous-groupes du groupe G :

1. $G = (\mathbb{Z}, +)$, H est l'ensemble des nombres pairs
2. $G = (\mathbb{Z}, +)$, H est l'ensemble des nombres impairs
3. $G = (\mathbb{R}, +)$, $H = [-1, +\infty[$
4. $G = (\mathbb{R}^*, \times)$, $H = \mathbb{Q}^*$
5. $G = (\mathcal{S}(E), \circ)$, $H = \{f \in \mathcal{S}(E),\ f(x_0) = x_0\}$ où E est un ensemble non vide et $x_0 \in E$ fixé.

6. $G = (\mathcal{S}(E), \circ)$, $H = \{f \in \mathcal{S}(E),\ f(x_0) = y_0\}$ où E est un ensemble non vide et $x_0, y_0 \in E$ fixés avec $x_0 \neq y_0$.

Exercice 5 (Partie stable) :

On pose,

$$\forall x, y \in [0,1],\ x \star y = x + y - xy$$

1. Montrer que $\star$ est une LCI sur $[0,1]$.
2. $\star$ est-elle commutative ? Associative ?
3. Existe-t-il un élément neutre ? Quels sont les éléments inversibles ?
4. Montrer que $\forall a \in [0,1]$, $E_a = [a,1]$ est une partie stable.

Exercice 6 (**) :

Soit E un ensemble muni d'une LCI $\star$ associative. On suppose $\exists a \in E$ tel que $f : E \to E$ définie par $f(x) = a \star x \star a$ est surjective. On note b un antécédent de a par f.

1. Montrer $e = a \star b$ est un élément neutre à gauche et $e' = b \star a$ est élément neutre à droite pour $\star$. En déduire que $e = e'$.
2. Montrer que a est inversible et que f est bijective.

Exercice 7 (Caractérisation de la symétrisabilité par la bijectivité) :

Soit E un ensemble muni d'une LCI $\star$ associative et d'un élément neutre e.

Montrer que $a \in E$ est inversible pour $\star$ si, et seulement si, $f : x \mapsto a \star x$ est bijective.

Exercice 8 (Commutativité forcée) :

Soit $(G, \times)$ un groupe notée multiplicativement et e l'élément neutre. On suppose que $\forall x \in G$, $x^2 = e$.

1. Montrer que G est un groupe abélien.
2. Soit $a \in G$, $a \neq e$. On définit la relation $\sim$ sur G par

$$\forall x, y \in G,\ x \sim y \iff (x = y \text{ ou } x = ay)$$

Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur G. Montrer que toutes les classes d'équivalences contiennent deux éléments.

3. On définit une relation $\star$ sur l'ensemble $\mathrm{Cl}(G) = \{\mathrm{Cl}(x),\ x \in G\} \subset \mathcal{P}(G)$ des classes d'équivalences par

$$\forall x, y \in G,\ \mathrm{Cl}(x) \star \mathrm{Cl}(y) = \mathrm{Cl}(xy).$$

Montrer que $(\mathrm{Cl}(G), \star)$ est un groupe abélien dans lequel chaque élément est son propre inverse.

4. On suppose que G est fini. Montrer que le nombre d'éléments de G est une puissance de 2.

Exercice 9 ((*) Transport de loi) :

Soit $(G, \star)$ un groupe et E un ensemble. Soit $\varphi : G \to E$ bijective. On définit la loi $\diamond$ sur E par

$$\forall x, y \in E,\ x \diamond y = \varphi\left(\varphi^{-1}(x) \star \varphi^{-1}(y)\right).$$

Monter que $(E, \diamond)$ est un groupe.

Exercice 10 (Addition des vitesses en théorie de la relativité) :
Soit $c > 0$. On poe $I =]-c, c[$. On pose

$$\forall x, y \in I,\ x \star y = \frac{x+y}{1+\frac{xy}{c^2}}.$$

Montrer que $(I, \star)$ est un groupe abélien.

Remarque :
Si c est la vitesse de la lumière, cette loi correspond à l'addition des vitesses portées par un même axes en théorie de la relativité.

Exercice 11 (Produit cartésien de groupes) :
Soit $(G, \star)$ et $(H, \triangle)$ deux groupes. Montrer que si on munit $G \times H$ de la LCI

$$(g, h) \diamond (g', h') = (g \star g', h \triangle h')$$

$G \times H$ devient alors un groupe.

Exercice 12 (Produit idempotent) :
Soit G un groupe noté multiplicativement et e sont élément neutre. Soit $a, b \in G$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer

$$(ab)^n = e \implies (ba)^n = e$$

Exercice 13 ((**) Translations surjectives) :
Soit G un ensemble non vide muni d'une LCI associative $\star$ telle que

$$\forall a, b \in G,\ \exists x, y \in G,\ a = x \star b = b \star y.$$

Montrer que $(G, \star)$ est un groupe.

Exercice 14 (Sous-groupes emboîtés) :
Soit $(G, \star)$ un groupe. Pour H et K deux sous-groupes de G, on note $H \star K = \{h \star k,\ (h, k) \in H \times K\}$.
Soit H, K, L trois sous-groupes de G tels que $H \subset K$, $H \cap L = K \cap L$ et $H \star L = K \star L$.
Montrer que $H = K$.

Exercice 15 ((*) Sous-groupe de $\mathbb{R}^*$) :
Monter que

$$G = \{x + y\sqrt{3},\ x, y \in \mathbb{Z},\ x^2 - 3y^2 = 1\}$$

est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$.

Exercice 16 (Produit de sous-groupe) :
Soit G un groupe noté multiplicativement et H et K deux sous-groupes de G. On note

$$HK = \{hk,\ (h, k) \in H \times K\} \qquad \text{et} \qquad KH = \{kh,\ (h, k) \in H \times K\}.$$

Montrer que

$$HK \text{ sous-groupe } G \iff KH \subset HK$$

puis que dans ce cas, $HK = KH$.

Exercice 17 (Caractérisation des groupes abélien [✓]) :
Soit G un groupe noté multiplicativement et e sont élément neutre.

1. Montrer qu'on a équivalence entre :
   (a) G est abélien
   (b) $\forall a, b \in G,\ (ab)^2 = a^2b^2$
   (c) $\forall a, b \in G,\ (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$
2. En déduire que si $\forall x \in G,\ x^2 = e$, alors G est abélien.

Exercice 18 (Automorphisme intérieur [✓]) :
Soit $(G, \times)$ un groupe. On note :

$$\forall a \in G,\ \tau_a : \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ x & \mapsto & axa^{-1} \end{array}$$

1. Montrer que τ_a est un morphisme de groupe.
2. Montrer que $\forall a, b \in G,\ \tau_a \circ \tau_b = \tau_{ab}$.
3. Montrer que $\forall a \in G,\ \tau_a$ est bijective et déterminer sa réciproque.
4. En déduire que $\mathcal{T} = \{\tau_a,\ a \in G\}$ est un groupe pour la loi $\circ$.

Exercice 19 :
Montrer :

1. Soi $b \in \mathbb{N}$ tel que $b \geq 2$. Montrer que $\{\frac{a}{b^k},\ a \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
2. [Bonus : arithmétique] Si $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \{ap + bq,\ p, q \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 20 :
Déterminer les morphismes de groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ dans lui-même. Lesquels sont injectifs ? Surjectifs ?

Exercice 21 :
Montrer qu'il n'existe pas de morphismes de groupes surjectifs de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{Q}_+^*, \times)$.

Exercice 22 (Groupes des automorphismes) :
Soit G un groupe multiplicatif. On note $\mathrm{Aut}(G)$ l'ensemble des automorphismes de G.

1. Montrer que $\mathrm{Aut}(G)$ est un groupe pour la loi $\circ$
2. Déterminer $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z})$.
3. Pour $a \in G$, on note $\varphi_a : G \to G$ définie par $\varphi_a(g) = aga^{-1}$. Montrer que $\varphi_a \in \mathrm{Aut}(G)$ et que $a \mapsto \varphi_a$ est un morphisme de groupes.
4. L'application $\varphi : a \mapsto \varphi_a$ est-il surjectif ? A quelle condition est-il injectif ?

2 Anneaux

Exercice 23 :
Soit $(A, +, \times)$ un anneau.
Montrer que si $a \in A$ est inversible à droite et à gauche, alors $a \in A^\times$.

Exercice 24 (Entier de Gauss [✓]) :

On pose

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + ib,\ a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}.$$

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau. Déterminer les inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.
2. Justifier que $\forall a \in \mathbb{Q}$, $[a - 1/2, a + 1/2] \cap \mathbb{Z} \neq \emptyset$.
3. Soit $u, v \in \mathbb{Z}[i]$ avec $v \neq 0$. Montrer que $\exists q, r \in \mathbb{Z}[i]$ tels que $u = qv + r$ et $|r| < |v|$. A-t-on unicité ?
4. On pose $\forall z \in \mathbb{Z}[i]$, $N(z) = |z|^2$. Déterminer le groupe des inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.
5. Un élément $a \in \mathbb{Z}[i]$ est dit *irréductible* si : $(\exists u, v \in \mathbb{Z}[i],\ a = uv \implies u \in \mathbb{Z}[i]^\times$ ou $v \in \mathbb{Z}[i]^\times)$.
   Montrer que 2 n'est pas irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$.
6. On définit les rationnels de Gauss comme l'ensemble des complexes à coordonnées rationnelles : $\mathbb{Q}[i] = \mathbb{Q} + i\mathbb{Q} = \{a + ib,\ a, b \in \mathbb{Q}\}$.
   Montrer que $\mathbb{Q}[i]$ est un corps.

Exercice 25 :

On pose

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{x \in \mathbb{R},\ \text{t.q. } \exists a, b \in \mathbb{Z},\ x = a + b\sqrt{2}\}.$$

1. Montrer que pour $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, l'écriture précédente est unique.
2. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est un anneau.
3. Pour $x = a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, on pose $n(x) = a^2 - 2b^2$. Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $n(xy) = n(x)n(y)$.
4. (a) Montrer que $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est inversible si, et seulement si, $n(x) \in \{-1, 1\}$.
   (b) Montrer que $1 + \sqrt{2}$ et $\sqrt{2} - 1$ sont inversibles dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.
   (c) Montrer qu'il n'existe aucun élément inversible de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ dans $]1, 1 + \sqrt{2}[$.
   (d) Montrer que les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ strictement supérieurs à 1 inversibles sont exactement les nombres de la forme $(1 + \sqrt{2})^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.
5. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est dense dans $\mathbb{R}$.
6. En déduire qu'entre π et $\pi + 10^{-9}$, il y a un élément de la forme $p + \sqrt{2}q$ avec $p, q \in \mathbb{Z}$.

Exercice 26 (Anneau de Boole) :

Soit $(A, +, \times)$ un anneau de Boole [1], c'est-à-dire un anneau tel que $\forall x \in A$, $x^2 = x$.

1. Montrer que $\forall x \in A$, $2x = 0_A$. En déduire que A est un anneau commutatif.
2. Montrer que l'on définit une relation d'ordre $\preccurlyeq$ sur A on posant

$$x \preccurlyeq y \iff xy = x$$

Exercice 27 (Anneau de sous-parties) :

Soit E un ensemble. On définit la différence symétrique sur $\mathcal{P}(E)$ par $A \Delta B = (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B})$.
Montrer que $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ est un anneau commutatif. Est-il intègre ?

Exercice 28 (Nilpotent dans un anneau) :

Soit $(A, +, \times)$ un anneau. On dit que $x \in A$ est nilpotent si $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = 0_A$.
Soit $x, y \in A$.

1. Montrer que si x est nilpotent et x et y commutent, alors xy est nilpotent.
2. Montrer que si xy est nilpotent, alors yx l'est aussi.

1. On notera que l'anneau de l'exercice 27 est un exemple non trivial d'anneau de Boole

3. Montrer que si x et y sont nilpotents et commutent, alors $x+y$ est aussi nilpotent.
4. Montrer que si x est nilpotent, alors $1_A - x$ est inversible et préciser $(1_A - x)^{-1}$.

Exercice 29 :
Soit $(A, +, \times)$ un anneau et soit $a, b \in A$.
Montrer que si $1_A - ab$ est inversible, alors $1_A - ba$ l'est aussi.

Exercice 30 (Caractéristique d'un anneau) :
Soit $(A, +, \times)$ un anneau. On appelle *caractéristique de* A l'ordre de 1 dans $(A, +)$, s'il existe et on dit que A est de caractéristique 0 sinon.
On suppose que A est de caractéristique $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $\forall x \in A,\ nx = 0_A$.
2. Montrer que si A est intègre, alors n est nombre premier.

Exercice 31 :
Soit $(A, +, \times)$ et $(B, \oplus, \otimes)$ deux anneaux et $f : A \to B$ un morphisme d'anneau.

1. Montrer que si f est surjective, alors $f(A^\times) = B^\times$.
2. Que penser de la réciproque ?

3 Corps

Exercice 32 :
On pose

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ a \oplus b = a + b - 1 \qquad \text{et} \qquad a \odot b = ab - a - b + 2.$$

Montrer que $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ est un corps.

Exercice 33 (Produit cartésien) :
Soit $(A, +, \times)$ et $(B, \oplus, \odot)$ deux anneaux.

1. Montrer qu'en munissant $A \times B$ des lois

$$(a, b) \boxplus (a', b') = (a + a', b \oplus b') \qquad \text{et} \qquad (a, b) \boxdot (a', b') = (aa', b \odot b')$$

$A \times B$ devient un anneau.

2. Si A et B sont des corps, en est-il de même pour $A \times B$?

Exercice 34 :
Soit $F = \mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2},\ a, b \in \mathbb{Q}\}$. Montrer que F est un sous-corps de $\mathbb{R}$.