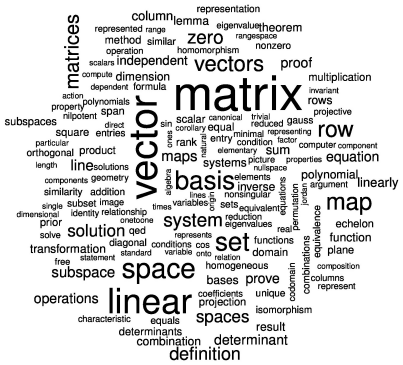
Lycée Loges

Chapitre 9
Espaces Vectoriels

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

lundi 16 novembre, 2026



Le début des espaces vectoriels remonte à la géométrie vectorielle (voir même la géométrie affine). Descartes et Fermat donnent les bases de la géométrie analytique en 1636. À partir de cette date là, la notions d'espaces vectoriels c'est étoffé doucement jusqu'à la fin du XIX ème siècle où Peano donne une définition rigoureuse d'un espace vectoriel (presque la version que nous verrons).

C'est à partir de ce moment là aussi que l'on s'aperçut de la transversalité de cette notion. La structure d'espace vectoriel se retrouve dans presque tous les domaines des mathématiques et permet de pouvoir introduire un point de vue algébrique dans des domaines pourtant analytique. Il devient alors possible de résoudre des problèmes d'analyses en utilisant des outils, des raisonnement d'algèbre, habituellement éloignés de l'analyse.

On a déjà, depuis le début de l'année, rencontré plusieurs espaces vectoriels. Y compris dans des domaines a priori plutôt analytique. On va donc ici théoriser la notion d'espace vectoriel. Nous allons l'introduire dans toute leur généralité et apprendre à les utiliser, dans un premier temps, hors de contexte particulier. Il sera alors possible de réutiliser tous ces outils, toutes ces techniques dans n'importe quel contexte, pourvu que puisse déceler une structure d'espace vectoriel quelque part.

> A plan is just a tangent vector on the manifold of reality
>
> *"Scratch" Garrison*

Table des matières

1 Espaces Vectoriels **3**
1.1 Définitions . . . 3
1.2 Premières propriétés . . . 6
1.3 Espaces vectoriels de référence . . . 11
1.4 Combinaisons linéaires . . . 13

2 Sous-espaces vectoriels **15**
2.1 Définition . . . 15
2.2 Sev engendré . . . 19

3 Opérations sur les sev **21**
3.1 Produit cartésien . . . 22
3.2 Somme de sev . . . 23
3.3 Intersections . . . 26
3.4 Somme directe et sev supplémentaires . . . 29

Dans toute la suite, et comme à l'accoutumée, $\mathbb{K}$ sera soit le corps $\mathbb{R}$ soit le corps $\mathbb{C}$. La distinction sera explicitement faite si nécessaire. Et pour plus de praticité, je noterais "espace(s) vectoriel(s)" par "ev".

1 Espaces Vectoriels

1.1 Définitions

Définition 1.1 (Loi de composition externe (LCE)) :
Soit E et K deux ensembles.

On dit que $*$ est une loi de composition externe sur E si c'est une fonction de deux variable de $K \times E$ dans E, *i.e.* si

$$* \ : \begin{array}{ccc} K \times E & \to & E \\ (k, x) & \mapsto & k * x \end{array}$$

Autrement dit, si $\forall (k, x) \in K \times E$, $k * x$ est bien défini et $k * x \in E$.

Là aussi, on en connaît plein.

Exemple 1.1 :

- Sur $\mathcal{F}(E, \mathbb{R})$, la multiplication par un réel est une loi de composition externe sur $\mathcal{F}(E, \mathbb{R})$.
- Sur $\mathbb{R}_+^*$, l'application $* : \mathbb{C} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ définie par $\lambda * x = (1 + |\lambda|^2)x$ est une LCE sur $\mathbb{R}_+^*$
- Sur $[0, 1]$, l'application $* : \mathbb{R} \times [0, 1] \to [0, 1]$ définie par $\lambda * x = \frac{x}{1+|\lambda|}$ est une LCE sur $[0, 1]$.

La structure d'espace vectoriel, à l'instar de la structure d'anneau ou de groupe, est une structure qui vient se superposer à la nature des objets que l'on étudie. C'est une structure qui décrit l'ensemble que l'on étudie. Cette structure permet d'avoir des relations entre les éléments de cet ensemble, ce qui donne une certaine cohérence à l'ensemble.

L'un des intérêts est de pouvoir avoir une nouvelle façon d'aborder les éléments de cet ensemble pour les étudier. On va développer des outils dans la suite des prochains chapitres qui vont permettre d'étudier ces structures indépendamment de la nature des objets de l'espace vectoriel.

La multiplication des points de vue est un des objectifs des mathématiques. Ils permettent de pouvoir aborder des problèmes sous plusieurs angles, permettant de faire des correspondance ou de résoudre des problèmes insolubles avec une autre approche.

Définition 1.2 (Espace vectoriel, Vecteurs, Scalaires, Vecteur nul [✓]) :
Soit E un ensemble.

- On dit que E est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ (ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel) si il existe

une LCI notée additivement $\underset{E}{+}$ (c'est à dire que $\forall x, y \in E,\ x \underset{E}{+} y \in E$) et une LCE notée multiplicativement $\underset{E}{\cdot}$ (*i.e.* si $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \underset{E}{\cdot} x \in E$) vérifiant :

(i) $(E, +)$ est un groupe abélien

(ii) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \forall x \in E,\ (\lambda \underset{\mathbb{K}}{+} \mu) \underset{E}{\cdot} x = \lambda \underset{E}{\cdot} x \underset{E}{+} \mu \underset{E}{\cdot} x$ [*Distributivité de* $\underset{E}{\cdot}$ *sur* $\underset{\mathbb{K}}{+}$]

(iii) $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x, y \in E,\ \lambda \underset{E}{\cdot} (x \underset{E}{+} y) = \lambda \underset{E}{\cdot} x \underset{E}{+} \lambda \underset{E}{\cdot} y$ [*Distributivité de* $\underset{E}{\cdot}$ *sur* $\underset{E}{+}$]

(iv) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \forall x \in E,\ \lambda \underset{E}{\cdot} (\mu \underset{E}{\cdot} x) = (\lambda \underset{\mathbb{K}}{\cdot} \mu) \underset{E}{\cdot} x$ [*Associativité de* $\underset{E}{\cdot}$]

(v) $\forall x \in E,\ 1_{\mathbb{K}} \underset{E}{\cdot} x = x$ [*Élément neutre pour la loi* $\underset{E}{\cdot}$]

- Les éléments de E en tant que $\mathbb{K}$-ev sont appelés des *vecteurs*.
- Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés des *scalaires* pour la structure de $\mathbb{K}$-ev.
- L'élément neutre e de la loi $\underset{E}{+}$ dans E est appelé *vecteur nul* et est noté 0_E.

Remarque :
Autrement dit, pour avoir la définition complète, il faut ajouter en premier les 4 propriétés définissant un groupe abélien. Donc un ev est défini à partir de 8 propriétés (9 si on compte l'existence d'une LCI et d'une LCE comme une propriété, ce qui est souvent le cas dans la littérature). Plus exactement, un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ est un ensemble E vérifiant :

(i) $\underset{E}{+}$ et $\underset{E}{\cdot}$ doivent être une LCI et une LCE sur E respectivement

(ii) $\forall x, y \in E,\ x \underset{E}{+} y = y \underset{E}{+} x$ [*Commutativité de* $\underset{E}{+}$]

(iii) $\exists e \in E$ tel que $\forall x \in E,\ x \underset{E}{+} e = e \underset{E}{+} x = x$ [*Élément neutre pour* $\underset{E}{+}$]

(iv) $\forall x \in E,\ \exists y \in E$ tel que $x \underset{E}{+} y = y \underset{E}{+} x = e$ [*Symétrique pour la loi* $\underset{E}{+}$]
(y sera noté $-x$)

(v) $\forall x, y, z \in E,\ (x \underset{E}{+} y) \underset{E}{+} z = x \underset{E}{+} (y \underset{E}{+} z) = x \underset{E}{+} y \underset{E}{+} z$ [*Associativité de* $\underset{E}{+}$]

(vi) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \forall x \in E,\ (\lambda \underset{\mathbb{K}}{+} \mu) \underset{E}{\cdot} x = \lambda \underset{E}{\cdot} x \underset{E}{+} \mu \underset{E}{\cdot} x$ [*Distributivité de* $\underset{E}{\cdot}$ *sur* $\underset{\mathbb{K}}{+}$]

(vii) $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x, y \in E,\ \lambda \underset{E}{\cdot} (x \underset{E}{+} y) = \lambda \underset{E}{\cdot} x \underset{E}{+} \lambda \underset{E}{\cdot} y$ [*Distributivité de* $\underset{E}{\cdot}$ *sur* $\underset{E}{+}$]

(viii) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \forall x \in E,\ \lambda \underset{E}{\cdot} (\mu \underset{E}{\cdot} x) = (\lambda \underset{\mathbb{K}}{\cdot} \mu) \underset{E}{\cdot} x$ [*Associativité de* $\underset{E}{\cdot}$]

(ix) $\forall x \in E,\ 1_{\mathbb{K}} \underset{E}{\cdot} x = x$ [*Élément neutre pour la loi* $\underset{E}{\cdot}$]

Remarque :
Le fait d'être un vecteur d'un espace vectoriel est indépendant de la nature de l'élément. C'est son rôle en tant qu'élément d'un ensemble qui est muni d'une structure.

Des vecteurs de deux espaces vectoriels peuvent donc avoir des natures très différentes. Un vecteur peut (ou pas) être (ou pas) une application, une matrice, un nombre, un n-uplet... Son rôle, en tant que membre, qu'élément d'un ensemble structurellement cohérent est indépendant de sa nature.

L'algèbre linéaire s'attache à étudier les ensembles uniquement à partir de leur structure (d'espace vectoriel en ce qui concerne l'algèbre linéaire), sans s'attacher à la nature des objets qui constituent

ces espaces. Le gros avantage est que les outils que nous allons développer ici vont pouvoir s'appliquer à n'importe quel ensemble, tant que c'est un espace vectoriel.

On pourra donc très bien trouver des questions d'algèbre linéaire en analyse (presque tous les ensembles de fonctions au programme sont des espaces vectoriels).

Remarque :
On sait que $\mathbb{Q}$ est un corps. En fait, on peut tout à faire définir un espace vectoriel sur n'importe quel corps. L'avantage du corps $\mathbb{Q}$ est qu'il permet de pouvoir faire de l'arithmétique (en multipliant par un dénominateur commun). Mais on perd tout un tas de propriété de $\mathbb{R}$, ce qui peut être assez désagréable.

Le programme de limite au cas des $\mathbb{R}$-ev et des $\mathbb{C}$-ev, ce que nous ferons dans ce cours (mais on se laissera peut être la liberté d'explorer un peu les $\mathbb{Q}$-ev lors d'un DM par exemple...).

!!! ATTENTION !!!

⚠ Il faudra toujours avoir les idées claires sur le rôle des objets qu'on considère. Un scalaire n'est pas un vecteur et inversement. Même si les deux ont la même valeur. En particulier, on a $0_{\mathbb{K}} \cdot_E 0_E = 0_E$. Il y a des zéros partout, mais ce ne sont pas les mêmes ! Attention donc, $0 \neq 0$!

On gardera l'indice sur les zéros pendant un petit moment pour bien clarifier les choses. On les supprimera ensuite. Mais dans le cas où une ambiguïté pourrait apparaître, ne pas hésiter à remettre des indices pour se fixer les idées. Si les indices aident à clarifier les choses, alors il faut en mettre. Ce n'est absolument pas interdit. Pas très élégant, mais la "classitude" passe après la "correctitude".

Exemple 1.2 :
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-ev muni de la sommation coordonnée par coordonnée et la multiplication par les scalaires coordonnée par coordonnée.

!!! ATTENTION !!!

⚠ Les seules opérations autorisées sont dans la définition d'un espace vectoriel. Aucune autre n'est permise. En particulier, on ne peut pas additionner un scalaire avec un vecteur. Et on ne peut surtout pas multiplier des vecteurs entre eux ! C'est taboo ! On ne fait surtout pas ça.

Exemple 1.3 :
Montrer que les ensembles suivants sont des ev :

1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 3x - 7y = z\}$ sur $\mathbb{R}$
2. $E_3 = \{f \in \mathcal{F}([0, 1], \mathbb{C}), f(0) = f(1)\}$ sur $\mathbb{C}$
3. $E_4 = \{f \in \mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R}), f' = 3f\}$ sur $\mathbb{R}$

Remarque :
$\emptyset$ n'est pas un $\mathbb{K}$-ev puisqu'il doit exister un élément neutre. Or cet ensemble ne contient personne, donc en particulier pas d'élément neutre. Donc un ev n'est JAMAIS vide.

Par contre $\{0\}$ est toujours un ev. Il s'appelle *espace vectoriel trivial*. C'est l'espace vectoriel réduit à son élément neutre. Il n'est pas très intéressant. Attention quand même, le zéro en question peut avoir différente nature. Par exemple, le zéro de $\mathbb{R}$ n'est pas la fonction constante égale à 0, qui n'est pas la suite constante égale à 0, qui n'est pas le polynôme nul etc. Donc il y a plein de $\mathbb{K}$-ev triviaux de natures différentes.

L'espace vectoriel trivial jouera un rôle très important dans la suite.

Remarque :
ATTENTION ! ! Prenez garde ! Toutes les opérations que l'on définit ici ne sont pas les opérations que vous avez l'habitude de côtoyer. Elles n'ont donc pas, a priori, les mêmes propriétés. En fait (et c'est le but de cette partie), on va montrer qu'elles se comportent de la même manière (ce qui justifiera du coup, a posteriori, les notations additives et multiplicatives pour ces lois). Mais ce n'est pas donné d'emblée. Donc il faut faire table rase de ce que vous croyez savoir. Tout ce que vous savez n'est valable QUE et UNIQUEMENT dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, etc. Pas dans un espace vectoriel général a priori.

1.2 Premières propriétés

Les propositions que l'on va développer ici ne sont pas très intéressantes en elles-mêmes. Elles n'ont d'intérêt que de forcer à manipuler les ev et se familiariser avec ce nouveau monde. Les démos

comportent cependant quelques astuces classiques de l'algèbre linéaire. Il est absolument vital de les maîtriser. La maîtrise de ces démos nécessite une bonne compréhension de ce qu'est un ev. Et la bonne compréhension de ce qu'est un ev permettra de s'assurer un reste d'année confortable. Donc il faut ABSOLUMENT comprendre ces démos. Ne pas les connaître par cœur, surtout pas, mais bien les comprendre pour savoir les refaire sans problème.

Proposition 1.1 (Distributivité de la multiplication sur l'addition dans $\mathbb{K}$) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, $x \in E$. Alors

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \underset{E}{\cdot} x = \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right) \underset{E}{\cdot} x$$

Démonstration :
Bien sûr, on en a très envie, on démontre cette proposition par récurrence.

Avec $n = 1$, c'est évident. Avec $n = 2$, c'est dans la définition du $\mathbb{K}$-ev.

Supposons donc maintenant qu'il existe une entier $n \geq 1$ tel que $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ et $\forall x \in E$, $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \underset{E}{\cdot} x = (\sum_{k=1}^{n} \lambda_k) \underset{E}{\cdot} x$.

Soit donc maintenant $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{K}$ et $x \in E$. On pose $y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \underset{E}{\cdot} x$. On a donc, par associativité de la loi $\underset{E}{+}$, $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x = y \underset{E}{+} \lambda_{n+1} x$. Or, par hypothèse de récurrence, on sait que $y = (\sum_{k=1}^{n} \lambda_k) \underset{E}{\cdot} x$. Donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k \underset{E}{\cdot} x &= \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \underset{E}{\cdot} x\right) \underset{E}{+} \lambda_{n+1} \underset{E}{\cdot} x && \text{par associativité de } \underset{E}{+} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right) x \underset{E}{+} \lambda_{n+1} \underset{E}{\cdot} x && \text{par hyp rec} \\
&= \left(\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right) \underset{\mathbb{K}}{+} \lambda_{n+1}\right) \underset{E}{\cdot} x && \text{par distributivité de } \underset{E}{\cdot} \text{ sur } \underset{\mathbb{K}}{+} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k\right) \underset{E}{\cdot} x && \text{par associativité de l'addition dans } \mathbb{K}
\end{aligned}$$

D'où le résultat par récurrence. □

Proposition 1.2 (Distributivité de la multiplication sur l'addition dans E) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x_1, \dots, x_n \in E$. Alors

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda \underset{E}{\cdot} x_k = \lambda \underset{E}{\cdot} \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)$$

Démonstration :
On va, là aussi, procéder par récurrence puisqu'on en a très envie.

Pour $n = 1$, c'est évident. Pour $n = 2$, c'est donner dans la définition d'un $\mathbb{K}$-ev.

Supposons donc qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ et $\forall x_1, \dots, x_n \in E$, $\sum_{k=1}^{n} \lambda \underset{E}{\cdot} x = \lambda \underset{E}{\cdot} (\sum_{k=1}^{n} x_k)$.

Soit donc maintenant $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x_1, \dots, x_{n+1} \in E$. Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \lambda \underset{E}{\cdot} x_k &= \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda \underset{E}{\cdot} x_k\right) \underset{E}{+} \lambda \underset{E}{\cdot} x_{n+1} && \text{par associativité de } \underset{E}{+} \\
&= \lambda \underset{E}{\cdot} \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \underset{E}{+} \lambda \underset{E}{\cdot} x_{n+1} && \text{par hyp rec} \\
&= \lambda \underset{E}{\cdot} \left(\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \underset{E}{+} x_{n+1}\right) && \text{par distributivité de } \underset{E}{\cdot} \text{ sur } \underset{E}{+} \\
&= \lambda \underset{E}{\cdot} \left(\sum_{k=1}^{n+1} x_k\right) && \text{par associativité de } \underset{E}{+}
\end{aligned}$$

Ce qui démontre la propriété par récurrence simple. □

Proposition 1.3 (Zéro c'est zéro (et c'est heureux)) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Alors, $\forall x \in E$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K}$,

$$\lambda \underset{E}{\cdot} 0_E = 0_E \qquad \text{et} \qquad 0_{\mathbb{K}} \underset{E}{\cdot} x = 0_E$$

On fera bien garde dans cette propriété, plusieurs 0 apparaissent mais ce ne sont pas les mêmes.

Démonstration :
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

Comme $0_E \underset{E}{+} 0_E = 0_E$, on a donc, en distribuant

$$\lambda \underset{E}{\cdot} 0_E = \lambda \underset{E}{\cdot} 0_E \underset{E}{+} \lambda \underset{E}{\cdot} 0_E$$

mais $\lambda \underset{E}{\cdot} 0_E \in E$ donc par définition des $\mathbb{K}$-ev, le vecteur $\lambda \underset{E}{\cdot} 0_E$ admet un symétrique pour la loi $\underset{E}{+}$. On appelle ce symétrique $-\lambda \underset{E}{\cdot} 0_E$. On obtient donc $\lambda \underset{E}{\cdot} 0_E - \lambda \underset{E}{\cdot} 0_E = 0_E$. Et en ajoutant le symétrique de $\lambda \underset{E}{\cdot} 0_E$ dans la relation précédente, on trouve

$$\begin{aligned}
0_E &= \lambda \underset{E}{\cdot} 0_E - \lambda \underset{E}{\cdot} 0_E \\
&= \left(\lambda \underset{E}{\cdot} 0_E + \lambda \underset{E}{\cdot} 0_E\right) \underset{E}{-} \lambda \underset{E}{\cdot} 0_E \\
&= \lambda \underset{E}{\cdot} 0_E \underset{E}{+} 0_E && \text{associativité et symétrique}
\end{aligned}$$

$$= \lambda \underset{E}{\cdot} 0_E$$

car 0_E est l'élément neutre pour la loi $\underset{E}{+}$. Et on a donc la première partie de la proposition.

Soit $x \in E$. On opère exactement de la même manière. On a aussi $0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}}$. Donc, par distributivité, $0_{\mathbb{K}} \underset{E}{\cdot} x = 0_{\mathbb{K}} \underset{E}{\cdot} x \underset{E}{+} 0_{\mathbb{K}} \underset{E}{\cdot} x$. Mais c'est un vecteur de E, donc il a un symétrique pour $\underset{E}{+}$ et en ajoutant le symétrique, on trouve

$$0_E = 0_{\mathbb{K}} \underset{E}{\cdot} x$$

□

Proposition 1.4 (Unicité du symétrique d'un vecteur [✓]) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Alors $\forall x \in E$, $\exists! y \in E$ tel que $x \underset{E}{+} y = 0_E$.

Démonstration :
Soit $x \in E$. Supposons qu'il existe $y, z \in E$ tel que $x \underset{E}{+} y = 0_E = x \underset{E}{+} z$. On a alors

$$\begin{aligned}
y &= y \underset{E}{+} 0_E && \text{par def de l'élément neutre } 0_E \\
&= y \underset{E}{+} \left(x \underset{E}{+} z\right) && \text{par def } z \\
&= \left(y \underset{E}{+} x\right) \underset{E}{+} z && \text{par associativité de } \underset{E}{+} \\
&= 0_E \underset{E}{+} z && \text{par def } y \\
&= z && \text{par def élément neutre } 0_E
\end{aligned}$$

d'où l'unicité. □

Proposition 1.5 (Multiplication d'un vecteur par $-1 \in \mathbb{K}$) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Alors $\forall x \in E$,

$$(-1) \underset{E}{\cdot} x = -x$$

ATTENTION ! Ici, le second membre est à comprendre au sens de sa définition, *i.e.* le symétrique du vecteur x pour la loi $\underset{E}{+}$.

Démonstration :
Soit $x \in E$. On a

$$\begin{aligned} x \underset{E}{+} (-1) \underset{E}{\cdot} x &= 1 \underset{E}{\cdot} x \underset{E}{+} (-1) \underset{E}{\cdot} x && \text{par la dernière propriété de la def des ev} \\ &= \Big(1 \underset{\mathbb{K}}{+} (-1)\Big) \underset{E}{\cdot} x && \text{par distributivité} \\ &= 0_{\mathbb{K}} \underset{E}{\cdot} x \\ &= 0_E && \text{par la prop 1.3} \end{aligned}$$

On en déduit donc que $(-1) \underset{E}{\cdot} x$ est un symétrique de x pour la loi $\underset{E}{+}$. Mais le symétrique est unique. D'où la proposition. □

Proposition 1.6 (Pas de diviseur de 0_E [✓]) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Alors $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ et $\forall x \in E$,

$$\lambda \underset{E}{\cdot} x = 0_E \implies \lambda = 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } x = 0_E$$

Démonstration :
Soit $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda \underset{E}{\cdot} x = 0_E$. Si $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$, c'est terminé.

On suppose donc que $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$. Alors, dans $\mathbb{K}$ qui est un corps, λ est inversible pour la multiplication. Dans ce cas

$$\begin{aligned} 0_E &= \frac{1}{\lambda} \underset{E}{\cdot} 0_E && \text{par la prop 1.3} \\ &= \frac{1}{\lambda} \underset{E}{\cdot} (\lambda \underset{E}{\cdot} x) && \text{par def de } \lambda \text{ et } x \\ &= \left(\frac{1}{\lambda} \underset{\mathbb{K}}{\cdot} \lambda\right) \underset{E}{\cdot} x && \text{par associativité de } \underset{E}{\cdot} \\ &= 1 \underset{E}{\cdot} x && \text{par def de l'inverse} \\ &= x && \text{par la dernière prop dans la def d'un } \mathbb{K}\text{-ev} \end{aligned}$$

ce qui termine la démo. □

Proposition 1.7 (Unicité de l'élément neutre [✓]) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev.
Alors l'élément neutre 0_E de E est unique.

Démonstration :
On sait que l'élément neutre existe par définition de la structure de $\mathbb{K}$-ev. Montrons l'unicité. Supposons qu'il y a deux éléments neutres e et e'. Autrement dit, $\forall x \in E$, $x+e = e+x = x = x+e' = e'+x$. Alors dans ce cas, comme $e \in E$, par définition de e' en tant qu'élément neutre, on a $e = e+e' = e'$ puisque $e' \in E$ et e est élément neutre. Ce qui donne l'unicité. □

1.3 Espaces vectoriels de référence

Proposition 1.8 ($\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-ev) :
$\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-ev.

Démonstration :
On sait plein de choses (presque tout) sur $\mathbb{K}$. Il suffit donc d'écrire les relations que l'on veut, voir qu'elles sont vraies puisqu'on est sur $\mathbb{K}$, et le considérer en tant que relation d'un $\mathbb{K}$-ev. □

⚠ ATTENTION ! Ce $\mathbb{K}$-ev a de quoi normalement vous donner une crise d'apoplexie neuronale. Dans ce $\mathbb{K}$-ev, les scalaires sont confondus avec les vecteurs, mais ils ne jouent pas le même rôle pour autant et pourtant si. On a tout et rien en même temps. Donc attention. C'est sûrement le plus beau des $\mathbb{K}$-ev mais le plus déroutant.

On l'utilisera assez peu.

Proposition 1.9 ($\mathbb{K}^n$) :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-ev où les opérations se font coordonnées par coordonnées.

Démonstration :
À faire. C'est très bien pour manipuler la def des ev. □

Proposition 1.10 (Les espaces de suites) :
L'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Démonstration :
Il suffit d'utiliser la définition des opérations sur les suites pour le premier et montrer que le second est un sev du premier à l'aide des opérations sur les suites convergentes. □

Proposition 1.11 (Les espaces de fonctions) :
Soit E un ensemble quelconque. Alors $\mathcal{F}(E, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-ev dont le vecteur nul est la fonction constante égale à 0.

Démonstration :
Il suffit de se souvenir de la définition d'une somme de fonction et de la définition du produit d'une fonction par un scalaire. □

Exemple 1.4 :
L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire est un espace vectoriel.

Proposition 1.12 (Ev de polynôme) :
$\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$-ev dont le vecteur nul est le polynôme nul.

Donc les vecteurs de $\mathbb{K}[X]$ vu en tant que $\mathbb{K}$-ev sont les polynômes. On a pas encore la définition, mais je le mets pour avoir tout au même endroit. En reverra ce résultat dans le chapitre sur les polynômes.

Proposition 1.13 (Espace de matrices) :
Si $n, m \in \mathbb{N}^*$, l'espace $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-ev dont le vecteur nul est la matrice nulle.

Remarque :
Il existe beaucoup d'autres exemples d'espaces vectoriels classiques. La liste n'est pas exhaustive. Mais c'est un bon début.

1.4 Combinaisons linéaires

On va commencer à enlever certains indices pour commencer à s'habituer à la gymnastique mentale qu'il faut faire en manipulant les rôles des objets. Vous pouvez les rajouter si vous en avez besoin.

Définition 1.3 (Famille de vecteurs) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle famille de n vecteurs de E, toute collection de n vecteurs de E.

Il peut y avoir des redondances dans une famille. Par exemple, $(x \mapsto 1, x \mapsto x^2+1, x \mapsto e^x, x \mapsto 1+x, x \mapsto 1)$ est une famille de 6 vecteurs de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Une famille est notée avec des parenthèses.

Définition 1.4 (Combinaison linéaire [✓]) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $x_1, \dots, x_n \in E$ des vecteurs de E. On appelle combinaison linéaire de $x_1, \dots, x_n$ tout vecteur y de la forme

$$y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot x_k$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.

!!! ATTENTION !!!

⚠ La notion de combinaison linéaire ne fonctionne *QUE* avec des sommes finies. Une somme infinie de vecteurs n'est PAS une combinaison linéaire. Une combinaison linéaire est une somme finie de vecteur avec des coefficients qui sont dans le corps de base.

En plus, si on avait une somme infinie de vecteurs, on se heurterait à un problème de définition d'une telle somme (spécifiquement, la convergence, la possibilité de pouvoir sommer une infinité de terme. Une partie de ces problèmes seront étudiés dans le chapitre sur les séries et uniquement dans le cas où $E = \mathbb{K}$. Le cas général sera vu en MP).

Exemple 1.5 :
Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la fonction $x \mapsto 3x^5 - \frac{1}{2}x + 2 - \cos(x) + e^{x-1}$ est une combinaison linéaire des fonctions $x \mapsto x^5$, $x \mapsto x$, $x \mapsto 1$, $x \mapsto \cos(x)$, $x \mapsto e^x$.

Définition 1.5 (Famille libre (vecteurs linéairement indépendants), Famille liée [✓]) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E.

- On dit que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille libre de vecteurs (ou que les vecteurs sont linéairement indépendants) si, et seulement si :

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \ \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0_E \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0_{\mathbb{K}} \right)$$

- Une famille non libre de vecteurs est une famille liée.

Donc une famille $(x_1, \dots, x_n)$ est dite liée ssi $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0$. C'est la négation.

Une famille libre est donc une famille de vecteurs pour laquelle, la seule façons d'obtenir le vecteur nulle par combinaison linéaire de ces vecteurs, est la combinaison linéaire triviale.

Et une famille de vecteur est liée est une famille pour laquelle, on peut trouver une combinaison linéaire non triviale donnant le vecteur nul. Autrement dit, le vecteur nul peut être obtenue à partir d'une combinaison linéaire non triviale de cette famille de vecteurs.

Remarque :
La famille (x) est libre si et seulement si $x \neq 0$.

Exemple 1.6 :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $x, y \in E$. On a :

$$(x, y) \text{ liée} \iff \exists (\lambda, \mu) \neq (0, 0) \in \mathbb{K}^2, \lambda x + \mu y = 0 \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, x = \lambda y \text{ ou } y = \lambda x$$

!!! ATTENTION !!!

⚠ (x, y) liée NE VEUX PAS DIRE que $\exists \lambda \in \mathbb{K}$, $x = \lambda y$. On pourrait avoir $y = 0$ et $x \neq 0$. Et dans ce cas là, patatra ! C'est un raccourcis qui est souvent fait et qui est faux.

Exemple 1.7 :
Montrer que les vecteurs $(1, 2, 3)$, $(-1, 1, 0)$ et $(1, 1, 1)$ sont linéairement indépendant.

⚠ Attention donc ! Pour montrer qu'une famille est libre, il faut montrer une implication. il faut partir de "Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = 0$" et en déduire que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Il faut donc montrer une implication.

Remarque :
Une famille de vecteurs qui continent le vecteur est toujours liée. En effet, si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille de vecteur de E et si $\exists k \in \{1, \dots, n\}$ tel que $x_k = 0$. On pose alors $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\lambda_i = 0$ si $i \neq k$ et $\lambda_k = 1$. Alors $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$. Et $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \lambda_k x_k = 1 \cdot x_k = 0$.

2 Sous-espaces vectoriels

2.1 Définition

Définition 2.1 (Sous-ev) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev. On appelle sous-espace vectoriel de E, toute partie $F \subset E$ telle que

1. $F \neq \emptyset$
2. $\forall x, y \in F$, $x + y \in F$ [*Stabilité par* $+$]
3. $\forall x \in F$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \cdot x \in F$ [*Stabilité par produit par des scalaires*]

Exemple 2.1 :
$\{0_E\}$ et E sont des sous-ev de E. On les appelles les sous-ev triviaux.

Théorème 2.1 (Les sev sont des ev [✓]) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev.
Alors tout sev de E est un $\mathbb{K}$-ev.

Ce théorème est FONDAMENTAL. Il est à la base de toute l'algèbre linéaire. Entre autre, il nous dit que pour montrer qu'un ensemble est un $\mathbb{K}$-ev, il suffit en fait de montrer que c'est un un sev d'un $\mathbb{K}$-ev plus gros que l'on connaît. L'intérêt est qu'on a besoin de vérifier seulement les 3 petits points du dessus au lieu des 8 ou 9 de la définition d'un $\mathbb{K}$-ev. Ce qui est beaucoup plus pratique.

Le fait qu'un sev hérite de la structure du $\mathbb{K}$-ev ambiant est tout à fait normal, compte tenu de la définition d'un sev. En effet, la stabilité va permettre que les propriété des vecteurs de F vu comme vecteurs de E vont en fait ne dépendre que de F et pas vraiment de E.

Démonstration :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $F \subset E$ un sev. il faut montrer que F vérifie les 9 points de la définition d'un $\mathbb{K}$-ev.

1. $+$ et $\cdot$ sont une LCI et une LCE sur F. Ces deux points sont donnés dans la définition d'un sev. En effet, si on considère deux éléments de F, ce sont des vecteurs de E, donc on peut faire la somme. Mais par def de F, la somme est un élément de F. Donc la loi $+$ va bien de $F \times F$ dans F. C'est donc bien une LCI. De même pour la LCE.
2. Soit $x, y \in F$. En tant que vecteur de E, on a la commutation, donc $x + y = y + x$ dans E. Mais F étant un sev, les sommes $x + y$ et $y + x$ sont des éléments de F. On a donc l'égalité $x + y = y + x$ dans F.
3. On va montrer que O_E, l'élément neutre de E est aussi l'élément neutre de F. On sait que $F \neq \emptyset$. Donc $\exists x \in F$. Par def du sev, on sait que $-x = (-1) \cdot x \in F$, donc le symétrique de x est aussi un élément de F. Et toujours par def des sev, $x - x \in F$. Mais vu dans le $\mathbb{K}$-ev E, on a $x - x = 0_E$. Donc $0_E \in F$. Et alors dans ce cas, on a clairement que $\forall x \in F$, $0_E + x = x$ puisqu'on a cette identité dans E et que F est stable par addition.
4. Dans le point précédemment on vient de montrer aussi que tout élément de F admet un symétrique pour l'addition.
5. On a l'associativité de $+$ dans E. Mais comme F est stable par addition, toutes les sommes qui interviennent dans l'écriture de l'associativité sont en fait des éléments de F, donc la loi $+$ est associative dans F.
6. La distributivité est obtenue grâce à la distributivité dans E et le fait que F est stable par addition et par multiplication par les scalaires.
7. De même pour l'autre distributivité
8. Ici aussi, l'associativité de la multiplication par les scalaires est obtenue sur F par la stabilité de F par la multiplication par des scalaires et par l'associativité que l'on a sur E.
9. Enfin, on sait que $\forall x \in F$, $1 \cdot x = x$ dans E, mais comme F est un sev, cette relation est vraie dans F

On vient de vérifier la définition d'un $\mathbb{K}$-ev et donc F est un $\mathbb{K}$-ev à part entière. □

Proposition 2.2 (Caractérisation des sev [✓]) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $F \subset E$.

$$F \text{ sev } E \iff \begin{cases} 0_E \in F \\ \forall x, y \in F,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \lambda x + \mu y \in F \end{cases}$$

Cette proposition a plusieurs reformulation équivalente. À la place de la première condition, on peut seulement mettre $F \neq \emptyset$ comme dans la def d'un sev. Mais dans la démo, très vite on montre que 0_E. Et en pratique, pour savoir que F n'est pas vide, il faut exhiber un élément qui y appartient. Autant choisir l'élément neutre.

La seconde condition peut se reformuler ainsi :

$$\forall x, y \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda x + y \in F$$

ou encore, on peut la scindé en deux

$$\forall x, y \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K},\ x + y \in F \text{ et } \lambda x \in F$$

Bien sûr, la dernière reformulation est moins intéressante. Il faut vérifier deux choses. La formulation de l'énoncé a l'avantage de ressembler fortement à la définition de combinaison linéaire qui est une notion indispensable et primordiale d'algèbre linéaire (démontrer l'équivalence des trois formulations en exercices).

Démonstration :
$\boxed{\Rightarrow}$ Si F est un sev de E, on a vu dans la démo de la proposition précédente que $0_E \in F$. Mais on sait que F est un $\mathbb{K}$-ev. Donc il est forcément stable par combinaison linéaire (c'est la combinaison de la LCI et la LCE).

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $0_E \in F$, alors clairement $F \neq \emptyset$. D'autre part, si $x, y \in F$, en posant $\lambda = \mu = 1$, on trouve $x + y \in F$ et en posant $\mu = 0_{\mathbb{K}}$, on trouve $\lambda x \in F$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$. Donc F vérifie la définition d'un sev. □

Exemple 2.2 :

1. L'ensemble des solutions d'une équation différentielle homogène linéaire (du premier ou second ordre) est un ev.
2. L'ensemble $\{u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, u \text{ converge}\}$ est un $\mathbb{K}$-ev
3. Si $a, b \in \mathbb{K}$, l'ensemble $\{u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$ est un $\mathbb{K}$-ev
4. Les ensembles du premier exemple du cours sont des ev

La difficulté donc, pour montrer qu'un ensemble est un ev, sera de trouver un ev connu qui le contient et de montrer ensuite que cet ensemble est un sev de ce gros ev. D'où l'intérêt d'avoir des $\mathbb{K}$-ev de référence.

⚠ Attention ! Tout sous-ensemble d'un $\mathbb{K}$-ev n'est pas forcément un sev. Les sev sont seulement certains élus parmi l'ensemble des sous-ensembles d'un ev. Autrement dit, si E est un $\mathbb{K}$-ev, $\mathcal{P}(E)$ n'est pas composé que de sev de E, bien au contraire. Par exemple, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 1\}$ n'est pas un sev de $\mathbb{R}^3$. Mais c'est bien un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 2.3 :
Les ensembles suivants ne sont pas des ev pour les opérations classiques (justifier) :

1. $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{K}),\ f(\pi) = 1\}$
2. $\{u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1}u_n\}$
3. $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x + y + z + t = -1\}$
4. $\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty\}$
5. $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ f$ croissante$\}$

Proposition 2.3 (Stabilité d'un sev par combinaison linéaire) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $F \subset E$ un sev.

Alors toute combinaison linéaire de vecteurs de F est encore un vecteurs de F, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x_1, \dots, x_n \in F,\ \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K},\ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \in F.$$

Démonstration :
On le démontre bien sûr par récurrence sur n.

Avec $n = 1$, il n'y a pas grand chose à faire. Le cas $n = 2$ est donné dans la caractérisation des sev.

Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que toute combinaison linéaire de n vecteurs de F soit encore un vecteur de F. On considère donc $x_1, \dots, x_{n+1}$ des vecteurs de F et $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{K}$. Alors

$$\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k = \underbrace{(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n)}_{\in F} + \underbrace{\lambda_{n+1} x_{n+1}}_{\in F} \in F$$

car F est un sev donc stable par addition. □

2.2 Sev engendré

Définition 2.2 (Espace engendré par une famille de vecteurs, Famille génératrice [✓]) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de n vecteurs de E et F un sev de E.

- On appelle sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $(e_1, \dots, e_n)$, noté $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$, l'espace
$$\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k, \forall k \in \{1, \dots, n\}, \lambda_k \in \mathbb{K} \right\}$$
composé de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs de la famille $(e_1, \dots, e_n)$.
- Si il existe $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p \in E$ tels que $F = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$, la famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ est une famille génératrice de F.

Exemple 2.4 :
Déterminer une famille génératrice des espaces suivants

1. $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x + y = x - z = 0\}$
2. $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ f'' - 3f' + 2f = 0\}$
3. $G = \{u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = (1+i)u_{n+1} - iu_n\}$

!!! ATTENTION !!!

⚠ Pour une famille donnée, il y a un unique espace vectoriel qu'elle engendre. En revanche, un espace vectoriel peut avoir une infinité de familles différentes qui l'engendre. Autrement dit, à une famille de vecteurs donnée est associé un unique espace vectoriel engendré ; mais à un espace vectoriel donné, il peut lui être associé une infinité de familles génératrices.

Remarque :
On pourra noter qu'une famille de vecteurs peut toujours être considérée comme une famille génératrice d'un bon espace vectoriel. Une famille de vecteur est toujours génératrice de l'espace vectoriel qu'elle engendre.

!!! ATTENTION !!!

⚠ Il faut prendre garde à la terminologie. Si une famille de vecteur engendre un ev (ce qui est toujours le cas), elle engendre un ev particulier. Il faut donc toujours préciser de quel ev la famille est génératrice. Une famille de vecteurs ne peut pas être "génératrice" dans le vide, sans plus de précision. Écrire par exemple "la famille $\mathcal{F}$ est génératrice" sans plus de précision n'a pas de sens. On engendre toujours quelque chose.

Proposition 2.4 ($\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_n)$ est un sev [✓]) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $n \in \mathbb{N}^*$ et $e_1,\dots,e_n \in E$.
Alors $\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_n)$ est un sev de E.

Démonstration :
Par définition de $\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_n)$, on a $0 = \sum_{k=1}^{n} 0\times e_k \in \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_n)$. Soit $x, y \in \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_n)$ et $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$. Toujours par def de l'espace engendré, on sait que $\exists \lambda_1,\dots,\lambda_n,\mu_1,\dots,\mu_n \in \mathbb{K}$ tel que $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$ et $y = \sum_{k=1}^{n} \mu_k e_k$. Alors dans ce cas

$$\alpha x + \beta y = \sum_{k=1}^{n} (\alpha\lambda_k + \beta\mu_k) e_k \in \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_n)$$

par associativité et distributivité. □

Exemple 2.5 :
L'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficient complexe $y'' - iy + (-1+i)y = 0$ est un sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ engendré par $x \mapsto e^{(2+i)x}$ et $x \mapsto e^{(2-i)x}$.

Remarque :
Il faut donc maintenant aller relire les deux propositions du cours sur les équations différentielles qui étaient un peu en avance sur leur temps. Vous pouvez désormais en comprendre une partie. Le reste des énoncés va s'éclaircir avec le prochain chapitre.

Définition 2.3 (Sev engendré par une partie) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $A \subset E$.
On définit le sev engendré par la partie A, noté $\mathrm{Vect}(A)$, par

$$\mathrm{Vect}(A) = \left\{ y \in E,\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ \exists e_1, \dots, e_n \in A,\ \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K},\ y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\}$$

c'est-à-dire l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires possibles formées à partir de vecteurs de A

Écrit de façon plus claires à lire et à comprendre mais moins correcte (comprendre : fausse) :

$$\mathrm{Vect}(A) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k,\ \text{où } n \in \mathbb{N}^*,\ e_1, \dots, e_n \in A,\ \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \right\}$$

Proposition 2.5 ($\mathrm{Vect}(A)$ est un sev) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $A \subset E$.
Alors $\mathrm{Vect}(A)$ est un sev de E.

Démonstration :
Laisser en exercice. A faire. Très bon entraînement. □

Exemple 2.6 :
Montrer que si E est un $\mathbb{K}$-ev et F un sev de E, alors $\mathrm{Vect}(F) = F$.

3 Opérations sur les sev

Un sev est donc en particulier un sous-ensemble de l'ev que l'on considère. Or on connaît des opérations sur les ensembles (réunion, intersections etc). On va donc essayer de comprendre comment va se comporter la structure d'ev lorsque l'on fait des opérations sur les ev, *i.e.* lorsque l'on fait des réunion, des intersections d'ev.

3.1 Produit cartésien

Proposition 3.1 (Produit de $\mathbb{K}$-ev) :
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev. Alors $E \times F$ muni de l'addition et la multiplication coordonnées par coordonnées, *i.e.* définies par $\forall x, x' \in E$, $\forall y, y' \in F$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $(x, y)+(x', y') = (x+x', y+y')$ et $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$, est un $\mathbb{K}$-ev.

Démonstration :
On ne peut pas montrer que c'est un sev puisque cet ensemble n'est inclu dans rien du tout (a priori). Il faut donc vérifier tous les points de la def des $\mathbb{K}$-ev. Allons-y.

Il faut vérifier qu'on a bien une LCI et une LCE. Mais puisque E et F sont des $\mathbb{K}$-ev, $\forall x, x' \in E$ et $\forall y, y' \in F$, $x + x' \in E$ et $y + y' \in F$. Donc $(x + x', y + y') \in E \times F$, ie $(x, y) + (x', y') \in E \times F$. Donc c'est bien une LCI. Et $\forall (x, y) \in E \times F$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, comme E et F sont des $\mathbb{K}$-ev, on a aussi $\lambda x \in E$ et $\lambda y \in F$. Donc $(\lambda x, \lambda y) \in E \times F$. Donc $\lambda(x, y) \in E \times F$. Donc c'est bien une LCE.

On peut donc passer aux différents points de la def (je ne fais pas les détails, mais il faut les écrire). □

Remarque :
On notera que les opérations sur chaque coordonnées n'ont aucune raisons d'être les mêmes. Les LCI et LCE sur E et F n'ont aucune raison d'être les mêmes.

Exemple 3.1 :

- L'ensemble $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-ev.
- L'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est une $\mathbb{R}$-ev.
- L'ensemble $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-ev.

3.2 Somme de sev

On a une opération particulière sur les ev qui est la somme (la loi de groupe).

Définition 3.1 (Somme de sev [✓]) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et F, G deux sev de E.
On définit l'ensemble $F+G$ par

$$F+G = \{x+y, x \in F, y \in G\} = \{z \in E,\ \exists (x,y) \in F \times G,\ z = x+y\}$$

!!! ATTENTION !!!

⚠ Cette définition et cette notation n'est canonique QUE pour des sev d'un même ev. On ne peut l'utiliser qu'ici. Parce qu'on a le droit de sommer des éléments. Mais c'est tout. Dans un autre cadre, ça n'aurait pas de sens.

!!! ATTENTION !!!

⚠ La réunion de deux sev n'est (en général) PAS un sev. Voir TD.

Exemple 3.2 :
On considère dans $\mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R} \times \{0\}$ et $G = \{0\} \times \mathbb{R}$. Montrer que F et G sont des sev de $\mathbb{R}^2$ mais que $F \cup G$ n'est pas un sev. Déterminer enfin $F+G$ et montrer que c'est un sev de $\mathbb{R}^2$.

Proposition 3.2 (La somme de deux sev est un sev) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et F, G deux sev de E.
Alors :

1. $F+G$ est un sev de E
2. $F, G \subset F+G$

Démonstration :

1. On $0_E = 0_E + 0_E \in F + G$ et si $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $z, z' \in F + G$, alors $\exists (x, y), (x', y') \in F \times G$ tel que $z = x + y$ et $z' = x' + y'$. Et alors

$$\lambda z + \mu z' = \underbrace{(\lambda x + \mu x')}_{\in F} + \underbrace{(\lambda y + \mu y')}_{\in G} \in F + G$$

   Donc par la caractérisation des sev, $F + G$ est un sev de E.
2. On a facilement, $\forall x \in F$, $x = x + 0_E \in F + G$. Et de même pour G. Donc $F \subset F + G$ et de même pour G.

□

Proposition 3.3 (Caractérisation de la somme de deux sev) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et F, G deux sev de E.

Alors $F + G$ est l'unique sev H de E vérifiant

$$\begin{cases} F, G \subset H \\ \forall H' \subset E \text{ sev de } E,\ F, G \subset H' \implies H \subset H' \end{cases}$$

Démonstration :
Commençons par l'unicité. Supposons qu'il existe deux sev H et H' de E vérifiant la propriété. On a donc en particulier H est un sev de E avec $F, G \subset H$. Donc $H' \subset H$ par def de H'. Mais H' est aussi un sev de E avec $F, G \subset H'$. Donc $H \subset H'$ par def H. Donc $H = H'$ ce qui nous donne l'unicité.

L'existence d'un tel sev de E n'est pas utile. On le sait déjà. C'est fait plus haut. □

Remarque :
Autrement dit, $F + G$ est le plus petit sev de E au sens de l'inclusion contenant à la fois F et G.

Cette propriété n'est pas utile en pratique, mais elle a l'avantage de permettre de mieux "voir" ce qu'est l'espace $F + G$.

Proposition 3.4 (Propriété de la somme de sev) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Alors

1. $\forall F, G$ sev de E, $F + G = G + F$
2. $\forall F, G, H$ sev de E, $(F + G) + H = F + (G + H)$
3. $\forall F$ sev de E, $F + \{0_E\} = F$
4. $\forall F$ sev de E, $F + F = F$
5. $\forall F$ sev de E, $F + E = E$.

Démonstration :
Laissé en exercice. C'est un bon entraînement. A faire absolument pour se familiariser avec les sommes de sev. □

Définition 3.2 (Somme d'un nombre fini de sev) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $E_1, \dots, E_n$ des sev de E.
Alors $E_1 + \cdots + E_n = \sum_{k=1}^{n} E_k = \{x_1 + \cdots + x_n, \text{ t.q. } \forall k \in \{1, \dots, n\},\ x_k \in E_k\}$.

Remarque :
On a

$$E_1 + \cdots + E_n = \mathrm{Vect}\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right)$$

(voir plus bas avec une récurrence).

Proposition 3.5 (Espaces engendrés et inclusion) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $A, B \subset E$. Alors

$$A \subset B \implies \mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Vect}(B)$$

Démonstration :
On a $A \subset B \subset \mathrm{Vect}(B)$ par def de $\mathrm{Vect}(B)$. On a donc $\mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Vect}(B)$ par stabilité de $\mathrm{Vect}(B)$ par combinaisons linéaires. □

Exemple 3.3 :

Remontrer plus facilement que $F = \mathrm{Vect}(F)$ si F est $\mathbb{K}$-ev.

Proposition 3.6 (Espace engendré par une réunion [✓]) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $A, B \subset E$. Alors

$$\mathrm{Vect}(A \cup B) = \mathrm{Vect}(A) + \mathrm{Vect}(B)$$

Démonstration :
On a facilement, par def de $\mathrm{Vect}(A)$ et par def de la somme de deux sev, $A \subset \mathrm{Vect}(A) + \mathrm{Vect}(B)$. De même, par symétrie, $B \subset \mathrm{Vect}(A) + \mathrm{Vect}(B)$. On a donc $A \cup B \subset \mathrm{Vect}(A) + \mathrm{Vect}(B)$. Or $\mathrm{Vect}(A) + \mathrm{Vect}(B)$ est un sev de E, donc on a $\mathrm{Vect}(A \cup B) \subset \mathrm{Vect}(A) + \mathrm{Vect}(B)$.

Inversement, on a évidemment $A \subset A \cup B$. Donc $\mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Vect}(A \cup B)$ par la proposition précédente. Par le même raisonnement, on a donc $\mathrm{Vect}(B) \subset \mathrm{Vect}(A \cup B)$. Or $\mathrm{Vect}(A \cup B)$ est un $\mathbb{K}$-ev, donc $\mathrm{Vect}(A)$ et $\mathrm{Vect}(B)$ sont des sev de $\mathrm{Vect}(A \cup B)$ et donc $\mathrm{Vect}(A) + \mathrm{Vect}(B)$ est un sev de $\mathrm{Vect}(A \cup B)$, d'où $\mathrm{Vect}(A) + \mathrm{Vect}(B) \subset \mathrm{Vect}(A \cup B)$ et d'où l'égalité. □

Exemple 3.4 :
En particulier, $\mathrm{Vect}(F \cup G) = F + G$ sur F et G sont des sev de E (à démontrer, c'est facile avec tout ce qu'il y a au dessus. Ça dois prendre 2 ligne en écrivant gros). Donc $F + G$ est le plus petit sev de E contenant à la fois F et G (on l'a déjà vu).

Remarque :
On notera aussi que si F et G sont des sev de E, alors $\mathrm{Vect}(F + G) = \mathrm{Vect}(F) + \mathrm{Vect}(G)$.

3.3 Intersections

Proposition 3.7 (Intersections de 2 sev [✓]) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et F, G deux sev de E.
Alors $F \cap G$ est un sev de E.

Démonstration :

On va utiliser la caractérisation des sev. On a $0_E \in F$ et $0_E \in G$. Donc, par def de l'intersection, $0_E \in F \cap G$.

Soit maintenant $x, y \in F \cap G$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On a donc en particulier $x, y \in F$. Mais comme a une structure d'ev, il est stable par combinaison linéaire et donc $\lambda x + \mu y \in F$. De même, on a $x, y \in G$ et G est un ev, donc stable par combinaison linéaire. On a donc également $\lambda x + \mu y \in G$. Donc $\lambda x + \mu y$ est un élément de F et de G en même temps. Donc par def d'une intersection, on a $\lambda x + \mu y \in F \cap G$. Donc $F \cap G$ est stable par combinaison linéaire.

Donc $F \cap G$ est un sev de E par la caractérisation des sev. □

Proposition 3.8 (Intersection quelconque de sev est un sev) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev.

Toute intersection quelconque (finie ou infinie) de sev de E est encore un sev de E.

Démonstration :
Soit I un ensemble et $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sev de E (finie ou infinie selon si I est fini ou infini). On note $F = \bigcap_{i \in I} F_i$.

On a $\forall i \in I$, $0_E \in F_i$, donc $0_E \in F$.

Soit $x, y \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Donc $\forall i \in I$, on a $x, y \in F_i$ par définition de l'intersection. Mais pour tout $i \in I$, F_i est un $\mathbb{K}$-ev et est donc stable par combinaison linéaire, donc $\forall i \in I$, $\lambda x + \mu y \in F_i$. D'où l'on déduit que $\lambda x + \mu y \in F$.

Et donc F vérifie la caractérisation des sev et donc est lui même sev de E. □

Exemple 3.5 :
Montrer que $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3, x + y = 2x - 3z = 0\}$ est un espace vectoriel.

⚠ Attention ! $\mathrm{Vect}(A \cap B) \neq \mathrm{Vect}(A) \cap \mathrm{Vect}(B)$. Prendre par exemple $A = \{(0, 1)\}$ et $B = \{(1, 0)\}$.

Proposition 3.9 (Expression de la somme de deux sev) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $F, G \subset E$ deux sev de E. Alors

$$F + G = \bigcap_{\substack{H \text{ sev } E \\ F,G \subset H}} H$$

Démonstration :
On pose $\mathcal{F} = \{H \subset E, H \text{ sev } E \text{ tel que } F, G \subset H\}$ et $V = \bigcap_{H \in \mathcal{F}} H$.

Comme $\forall H \in \mathcal{F}$, $F, G \subset H$ et par caractérisation de $F + G$, on a donc $F + G \subset H$. Puis, par intersection, $F + G \subset V$.

D'autre part, on sait que $F + G$ est un sev de E et $F, G \subset F + G$. Donc $F + G \in \mathcal{F}$. Donc $V \subset F + G$. D'où l'égalité. □

Remarque :
Cet énoncé est équivalent à la caractérisation de la somme de deux sev. Il n'est pas utile en pratique, clairement, mais là encore, il aide à mieux comprendre la somme de deux sev.

Proposition 3.10 (Caractérisation de $\mathrm{Vect}(A)$) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $A \subset E$.

$\mathrm{Vect}(A)$ est l'unique sev H de E tel que

$$\begin{cases} A \subset H \\ F \text{ sev } E, A \subset F \implies H \subset F \end{cases}$$

et même

$$\mathrm{Vect}(A) = \bigcap_{\substack{F \text{ sev } E \\ A \subset F}} F$$

$\mathrm{Vect}(A)$ est donc le plus petit sev de E contenant A.

Démonstration :
Commençons par l'unicité. Supposons donc deux sev G et G' vérifiant les deux points. En particulier, G est un sev de E qui contient A. Donc $G' \subset G$ puisque G' vérifie la deuxième propriété. Mais le même raisonnement s'applique sur G et donc on a également $G \subset G'$. D'où l'égalité.

On note $\mathcal{A} = \{F \text{ sev } E, A \subset F\} \subset \mathcal{P}(E)$. Et on note $V = \bigcap_{F \in \mathcal{A}} F$. Alors V est un sev de E puisque c'est une intersection de sev de E. On sait que $\forall F \in \mathcal{A}$, $A \subset F$ par def de $\mathcal{A}$. Donc $A \subset V$. Et clairement, par def de V, si F est un sev de E tel que $A \subset F$, alors $F \in \mathcal{A}$ et donc $V \subset F$.

Or $\mathrm{Vect}(A)$ est un sev de E et on a déjà vu que $A \subset \mathrm{Vect}(A)$. Donc par def de V, $V \subset \mathrm{Vect}(A)$.

Enfin, on sait que $A \subset V$ donc toutes combinaison linéaire de vecteur de A est dans V puisque V est un ev. Mais $\mathrm{Vect}(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de vetceurs de A. Donc $\mathrm{Vect}(A) \subset$

V par def de $\mathrm{Vect}(A)$. Ce qui termine la démo. □

Remarque :
Là non plus, pas utile en pratique, mais éclairant.

Exemple 3.6 :
Déterminer $\mathrm{Vect}(\emptyset)$ et $\mathrm{Vect}(E)$.
Soit $x \in E$. Déterminer $\mathrm{Vect}(x)$.

3.4 Somme directe et sev supplémentaires

Définition 3.3 (Somme directe [✓]) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et F, G deux sev de E.
On dit que F et G sont en somme directe ssi $F \cap G = \{0_E\}$. Et dans ce cas, on notera $F \oplus G$ la somme de F et G.

ATTENTION ! ! On rappelle que 0_E est un élément de tout sev de E. Donc 0_E est toujours dans l'intersections de sev de E. En plus, l'intersection des sev de E est encore un sev de E, donc elle doit obligatoirement contenir 0. Une intersection de sev ne peut JAMAIS être vide. Ce n'est pas possible. Ou alors l'un des ensembles n'est pas un sev.

La notation $F \oplus G$ veut dire qu'on considère la somme $F + G$ (d'où le plus à l'intérieur), mais que cette somme est particulière. Elle a de particulier qu'elle est directe, c'est à dire que l'intersections de F et G est réduite au vecteur nul.

!!! ATTENTION !!!

⚠ Pour montrer que deux sev sont en somme directe, montrer que tout élément de $F \cap G$ est nul ne suffit pas à montrer que la somme est directe ! Méfiance dans la rédaction ! Techniquement, en prenant un $x \in F \cap G$, et montrer que $x = 0$, on ne fait que montrer qu'une inclusion. On ne peut que en déduire que $F \cap G \subset \{0\}$. Il ne faut pas oublier de faire l'autre inclusion ! Sans quoi le raisonnement n'est pas complet.

L'intérêt est le suivant :

Proposition 3.11 (Caractérisation d'une somme directe [✓]) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et F, G deux sev de E.
F et G sont en sommes directe ssi $\forall x \in F+G$, $\exists!(f,g) \in F \times G$, $x = f+g$.

Démonstration :
$\boxed{\Rightarrow}$ Soit $x \in F+G$. Donc $\exists f \in F$ et $g \in G$ tel que $x = f+g$ par def de la somme $F+G$. Supposons qu'il existe un autre couple $(f',g') \in F \times G$ tel que $x = f'+g'$. On a donc $x = f+g = f'+g'$. Donc $f - f' = g' - g$. Or $f, f' \in F$ et F est un sev, donc $f - f' \in F$. De même, $g' - g \in G$. D'où l'on a $f - f', g' - g \in F \cap G = \{0\}$. On en déduit donc $f = f'$ et $g = g'$, donc $(f,g) = (f',g')$ et d'où l'unicité.
$\boxed{\Leftarrow}$ Soit $x \in F \cap G$. Donc $x \in F+G$ puisque par exemple $x \in F \subset F+G$. Mais $x = x+0 = 0+x$. Donc x a deux décomposition dans la somme $F+G$ ($(x,0)$ et $(0,x)$). Or cette décomposition est unique, donc $(0,x) = (x,0)$ et donc $x = 0$. D'où $F \cap G = \{0\}$. □

La notion de somme directe est absolument fondamentale en algèbre linéaire. Elle permet de décomposer un vecteur de façons unique comme somme de deux autres vecteurs. Vous avez en fait l'habitude de faire ça depuis tout petit. C'est intuitivement ce qu'on fait sans s'en rendre compte. C'est comme ça que l'on fonctionne intuitivement. On suppose d'office que toutes les sommes sont directes. Mais ce n'est pas le cas.

!!! ATTENTION !!!

⚠

Du coup, dans le cas d'une somme qui n'est pas directe, il n'y a absolument pas unicité de la décomposition. Il peut y avoir plusieurs façons de décomposer un vecteur donné !

Remarque :
$\{0\}$ est en somme directe avec n'importe quel sev. Mais ce sev n'est pas très intéressant. Attention cependant à ne pas dire que si deux sev sont en sommes directes, ils sont forcément non réduits à 0. Ce n'est pas vrai.

Exemple 3.7 :
Dans $\mathbb{R}^3$, on définit $E = \{(x,x,x), x \in \mathbb{R}\}$, $F = \{(x,y,-y), x,y \in \mathbb{R}\}$, $G = \{(x,0,0), x \in \mathbb{R}\}$. Montrer que E, F, G sont trois sev de $\mathbb{R}^3$. Montrer que E et F sont en somme directe mais F et G ne le sont pas (de deux façons différentes).

En considérant des sommes de sev, on obtient encore un sev (ça on le sait depuis un moment). Mais parmi tous les sev disponible, il y en a un qui a un intérêt particulier. C'est l'espace ambiant, l'espace total. En général, le but est justement de trouver des sev dont la somme vaut l'espace vectoriel ambiant total. De sorte que l'on puisse décomposer les vecteurs de E comme la somme de deux vecteurs, un dans chacun des sev.

Définition 3.4 (Sev supplémentaires [✓]) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et F, G deux sev de E.
On dit que F et G sont supplémentaires dans E ssi

$$F \oplus G = E$$

!!! ATTENTION !!!

⚠ Une fois deux sev en main, on peut toujours regarder leur sommes. Mais ça ne suffit pas pour qu'ils soient supplémentaires. Il y a des conditions précises. Et c'est SUPPlémentaires et pas COMPlémentaires. Qui n'a pas de sens en algèbre linéaire.

Il ne suffit pas non plus d'avoir une somme directe. Il faut en plus que la somme recouvre totalement l'espace ambiant.

Proposition 3.12 (Reformulation de la supplémentarité [✓]) :
Si E est un $\mathbb{K}$-ev et F et G sont des sev de E.

$$F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } E \iff \begin{cases} F \cap G = \{0\} \\ E = F + G \end{cases}$$

Démonstration :
C'est évident avec tout ce qui précède. □

Exemple 3.8 :
$\{0\}$ et E sont des sev supplémentaires dans E. Ce sont des supplémentaires triviaux.

Théorème 3.13 (Caractérisation des supplémentaires [✓]) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev, F, G deux sev de E.

$$F \text{ et } G \text{ supplémentaires dans } E \iff \forall x \in E,\ \exists!(f,g) \in F \times G,\ x = f + g$$

Démonstration :
C'est évident compte tenu de la caractérisation des sommes directes. □

Exemple 3.9 :
Soit $P = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), f \text{ paire}\}$ et $I = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), f \text{ impaire}\}$. Montrer que $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = P \oplus I$.

!!! ATTENTION !!!

⚠

Un sev donné admet une infinité de supplémentaire. Il n'y a absolument PAS unicité des supplémentaires.

Exemple 3.10 :
Soit $H = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n x_i = 0\}$ et $D_0 = \{(x, \dots, x) = x(1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n\}$ et $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, on note $D_k = \{(0, \dots, 0, x, 0, \dots, 0)) \in \mathbb{R}^n\}$ avec le coefficient x en $k$ème position. Montrer que $\forall k \in \{0, \dots, n\}$, $H \oplus D_k = \mathbb{R}^n$.

On pourrait bien sûr en trouver beaucoup d'autre. On verra lesquels plus tard, si on a le temps.

Remarque :
On peut bien sûr définir une somme directe de plusieurs sev avec une récurrence. Mais c'est plus un exercice. Essayez d'y penser quand même.

Proposition 3.14 (Somme directe de plusieurs sev) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $E_1, \dots, E_n$ des sev de E.
Si la somme $\sum_{k=1}^{n} E_k$ est directe, on la note $\bigoplus_{k=1}^{n} E_k$. Et on a :

$$\begin{aligned}
& \textstyle\sum_{k=1}^{n} E_k = \bigoplus_{k=1}^{n} E_k \\
\iff \quad & \forall x \in \sum_{k=1}^{n} E_k,\ \exists!(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n,\ x = \sum_{k=1}^{n} x_k \\
\iff \quad & \forall (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n,\ \left(\sum_{k=1}^{n} x_k = 0 \implies \forall k \in \{1, \dots, n\},\ x_k = 0 \right)
\end{aligned}$$

Remarque :
Attention ! Il ne suffit pas que les sev $E_1, \dots, E_n$ soient deux à deux en sommes directes pour que la somme globale soit directe. Par exemple $\mathrm{Vect}((1,0))$, $\mathrm{Vect}((1,1))$ et $\mathrm{Vect}((0,1))$ sont deux à deux en sommes directes, mais la somme des trois n'est pas directe.