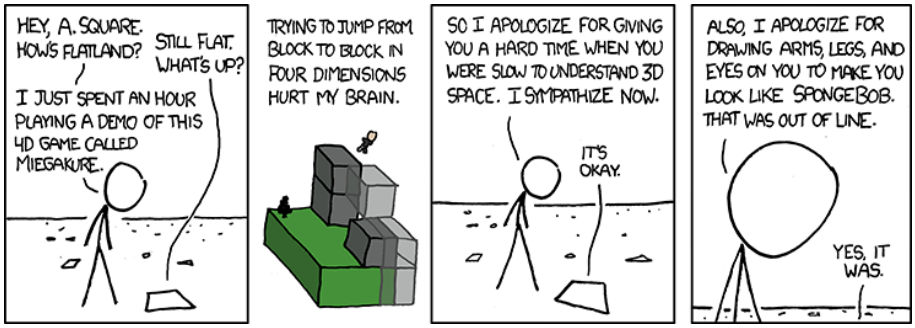
Lycée Loges

Chapitre 10
Dimension finie

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

mardi 24 novembre, 2026



Après avoir vu la notion générale d'espaces vectoriels, on va spécifier un peu. Ceux qui vont nous intéresser vraiment seront d'une sorte particulière. C'est ce qu'on appelle des espaces vectoriels de dimension finie. Bien sûr, vous vous en doutez, il existe des espaces de dimension infinie. Mais l'étude précise de ces espaces n'est pas au programme. Les espaces vectoriels de dimensions finies sont les ev "les plus simples".

En fait, dans un espace vectoriel, on a des directions disponibles pour se déplacer. Un ev de dimension finie est un ev avec un nombre finie de direction possible. Chaque dimension est l'une de ces directions. Et un ev de dimension infinie est un ev avec une infinité de directions différentes pour se déplacer.

On se contentera donc des ev de dimension finie. Sur ces ev, on va pouvoir compter le nombres de directions disponibles. Et surtout, compter les directions restantes éventuelles. Ça n'a l'air de rien, mais c'est ce qui fait tout l'intérêt d'un ev de dimension finie. Grâce à cet outils, on peut "découper" l'espace en plusieurs sous-espaces qui nous permettent de réduire du même coup les problème en se ramenant à l'étude d'espace "plus petits".

> All dimensions are critical dimensions, otherwise why are they there ?
>
> *Russ Zandbergen*

Table des matières

1 Famille libre, famille génératrice **2**
1.1 Famille libre 2
1.2 Famille génératrice 6
1.3 Base 9

2 Dimension **13**
2.1 Dimension 13
2.2 Dimension de référence 18
2.3 Caractérisations 20

3 Dimension et sev **22**
3.1 Généralités 22
3.2 Sommes et dimension 23
3.3 Rang 29

1 Famille libre, famille génératrice

1.1 Famille libre

Définition 1.1 (Famille libre, famille liée [✓]) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E.

On dit que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille de vecteurs libres (ou que la famille est libre) si

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K},\ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0_E \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0_{\mathbb{K}}$$

On dit également que les vecteurs $x_1, \dots, x_n$ sont linéairement indépendants.

Une famille non libre de vecteur est une famille liée.

Donc une famille $(x_1, \dots, x_n)$ est liée ssi $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0$. C'est la négation.

Une famille libre est donc une famille de vecteurs pour laquelle, la seule façons d'obtenir le vecteur nulle par combinaison linéaire de ces vecteurs, est la combinaison linéaire triviale.

Remarque :
En particulier, une famille vide est toujours libre. Mais bon ...

La famille (x) est libre si et seulement si $x \neq 0$.

Exemple 1.1 :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $x, y \in E$. On a :

$$(x, y) \text{ liée} \iff \exists (\lambda, \mu) \neq (0, 0) \in \mathbb{K}^2, \lambda x + \mu y = 0 \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, x = \lambda y \text{ ou } y = \lambda x$$

!!! ATTENTION !!!

⚠ (x, y) liée NE VEUX PAS DIRE que $\exists \lambda \in \mathbb{K}$, $x = \lambda y$. On pourrait avoir $y = 0$ et $x \neq 0$. Et dans ce cas là, patatra !

Exemple 1.2 :
Monter que la famille $(x \mapsto e^{ax},\ x \mapsto e^{bx})$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ si et seulement si $a \neq b$.

⚠ Attention donc ! Pour montrer qu'une famille est libre, il faut montrer une implication. il faut partir de "soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = 0$" et en déduire que $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. Il faut donc montrer une implication.

Remarque :
La combinaison linéaire $\sum_{k=1}^{n} 0 \times e_k$ est la combinaison linéaire triviale des $e_1, \dots, e_n$ et elle vaut toujours 0, bien sûr. Une combinaison linéaire non triviale est donc une combinaison linéaire dont les coefficients ne sont pas tous nuls, donc une combinaison linéaire $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$ avec $\lambda_i \neq 0$ pour un certain $i \in \{1, \dots, n\}$.

Une combinaison linéaire non triviale est une combinaison linéaire dont les coefficients ne sont pas tous nuls. Elle peut quand même être égale à 0. Et une combinaison linéaire dont les coefficients sont tous non nuls est une combinaison linéaire $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$ telle que $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\lambda_i \neq 0$. Mais elle peut quand même être égale à 0.

Attention donc au français. Ça peut porter à confusion. Il va falloir utiliser les bons mots au bon endroit et ne pas se tromper. En intervertissant seulement 2 mots, on change le sens.

Remarque :
L'indépendance linéaire est une propriété qui ne dépend que de la famille de vecteurs que l'on considère et pas du sev dans lequel on considère la famille. Si E un $\mathbb{K}$-ev et F un sev de E et si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille libre de vecteurs de F, c'est aussi une famille libre de vecteurs de E. Et inversement. Si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille de vecteurs de F et qu'elle est libre en tant que famille de vecteurs de E, elle est aussi libre en tant que famille de vecteurs de F.

Proposition 1.1 (Reformulation famille liée) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $n \geq 2$ et $e_1, \dots, e_n \in E$.

$$(e_1, \dots, e_n) \text{ liée } \iff \exists i \in \{1, \dots, n\},\ e_i \text{ est combinaison linéaire des autres}$$

Démonstration :
$\boxed{\Rightarrow}$ Puisque la famille est liée, on sait $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ avec $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = 0$. Comme $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq 0$, on sait qu'il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\lambda_i \neq 0$. On a alors $\lambda_i e_i = -\sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq i}} \lambda_k e_k$. Mais comme $\lambda_i \neq 0$, on en déduit donc

$$e_i = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq i}} \frac{-\lambda_k}{\lambda_i} e_k$$

et donc e_i est combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que e_i est combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille. Donc $\forall k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$, $\exists \lambda_k \in \mathbb{K}$ tel que $e_i = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq i}} \lambda_k e_k$. D'où $e_i - \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq i}} \lambda_k e_k = 0$, ie $\sum_{k=1}^{n} \mu_k e_k = 0$ avec $\mu_k = -\lambda_k$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ et $k \neq i$ et $\mu_i = 1$. En particulier $(\mu_1, \dots, \mu_n) \neq (0, \dots, 0)$. On trouve donc une combinaison linéaire non triviale des $e_1, \dots, e_n$ qui donne 0. Donc la famille est liée. □

Exemple 1.3 :
Dans $\mathbb{R}^3$, étudier la liberté de la famille (u, v, w) avec $u = (1, -1, 0)$, $v = (2, -1, 1)$, et $w = (0, 1, 1)$. Et en prenant $u = (1, 2, 1)$, $v = (1, -1, 1)$ et $w = (1, 1, 0)$, la famille est-elle libre ?

Exemple 1.4 :
Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère $f : x \mapsto 1$, $g : x \mapsto \cos(x)$ et $h : x \mapsto \sin x$. Montrer que la famille (f, g, h) est une famille libre.

Remarque :
Toute famille contenant le vecteur nul est une famille liée

Définition 1.2 (Vecteurs colinéaires, vecteurs coplanaires) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $u, v, w \in E$.

- On dit que les deux vecteurs u et v sont colinéaires si la famille (u, v) est liée.
- On dit que les trois vecteurs u, v, et w sont coplanaires si la famille (u, v, w) est liée.

Remarque :
En particulier, le vecteur nul est colinéaire à tous vecteur. Et trois vecteurs dont l'un est nul sont toujours coplanaire.

On justifiera le choix des termes colinéaire et surtout coplanaire un peu plus tard lorsque l'on parlera de dimension.

Proposition 1.2 (Sous-famille d'une famille libre, sur-famille d'une famille liée [✓]) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev.

1. Toute sous-famille d'une famille libre de vecteur de E est encore une famille libre.
2. Toute sur-famille d'une famille liée de vecteur de E est encore une famille liée.

Autrement dit :

- Si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille libre de E, alors $\forall p \in \{1, \dots, n\}$, $\forall i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, n\}$ avec $i_\ell \neq i_k$ si $\ell \neq k$, la famille $(x_{i_1}, \dots, x_{i_p})$ est libre.
- Si $(x_1, \dots, x_n)$ est liée, alors $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\forall (y_1, \dots, y_p) \in E^p$, la famille $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p)$ est liée.

Démonstration :
Soit $\mathcal{U} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille libre de vecteur de E. Soit $p \in \{1, \dots, n\}$ et $\mathcal{V} = (e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$ une sous famille de vecteurs de $\mathcal{U}$ ($\forall j \in \{1, \dots, p\}$, $i_j \in \{1, \dots, n\}$ et $j \neq j' \in \{1, \dots, p\}$, $i_j \neq i_{j'}$).

Soit $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_p} \in \mathbb{K}$ tel que $\sum_{j=1}^{p} \lambda_{i_j} e_{i_j} = 0$. On a donc $\sum_{k \in \{i_1, \dots, i_p\}} \lambda_k e_k = 0$. On complète cette somme en $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k e_k = 0$ en posant $\lambda_k = 0$ si $k \notin \{i_1, \dots, i_p\}$. Mais la famille $\mathcal{U}$ est une famille libre, donc $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $\lambda_k = 0$. En particulier, $\forall k \in \{i_1, \dots, e_p\}$, $\lambda_k = 0$. Donc la famille $\mathcal{V}$ est libre.

On aurait également pu démontrer ce résultat par l'absurde ou par contraposée.

Soit $\mathcal{U} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille liée de vecteurs de E. On considère une sur-famille de $\mathcal{U}$, c'est-à-dire une famille $\mathcal{V} = (e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{n+p})$ avec $p \geq 1$. Comme la famille $\mathcal{U}$ est liée, $\exists k \in \{1, \dots, n\}$ tel que e_k combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathcal{U}$, donc $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tel que $e_k = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k}} \lambda_i e_i$. On peut donc compléter et on a $e_k = \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ i \neq k}} \lambda_i e_i$ en posant $\lambda_i = 0$ pour $i \in \{n+1, \dots, n+p\}$. Donc la famille $\mathcal{V}$ est liée. □

Proposition 1.3 (Principe d'extension d'une famille libre [✓]) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $n \geq 1$ et $e_1, \ldots, e_{n+1}$ des vecteurs de E avec $(e_1, \ldots, e_n)$ libre.
La famille $(e_1 \ldots, e_{n+1})$ est libre si et seulement si $e_{n+1} \notin \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$.

Démonstration :
Supposons que $(e_1, \ldots, e_{n+1})$ est libre. Supposons que $e_{n+1} \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$. Alors $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $e_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$. Et donc $\sum_{k=1}^{n+1} \mu_k e_k = 0$ avec $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$, $\mu_k = -\lambda_k$ et $\mu_{n+1} = 1$. Donc $(\mu_1, \ldots, \mu_{n+1}) \neq (0, \ldots, 0)$ et donc la famille $(e_1, \ldots, e_{n+1})$ n'est pas libre. Donc contradiction.

Il faut donc juste montrer que la famille $(e_1, \ldots, e_{n+1})$ est libre en supposant $e_{n+1} \notin \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{K}$ tel que $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k e_k = 0$. En particulier, on en déduit que $\lambda_{n+1} e_{n+1} = -\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$. Donc si $\lambda_{n+1} \neq 0$, on a ☠. Donc $\lambda_{n+1} = 0$.

On a donc $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = 0$. Mais la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille libre par hypothèse. Donc $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$, $\lambda_k = 0$. Et donc finalement la famille étendue $(e_1, \ldots, e_{n+1})$ est libre. □

Exemple 1.5 :
Montrer que la famille $((1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (1,1,1,1))$ est libre dans $\mathbb{R}^4$.

1.2 Famille génératrice

Définition 1.3 (Famille engendrant un sev [✓]) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et F un sev de E.
On dit que la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ de vecteurs de E engendre F si $F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$, *i.e.* si $F = \{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k, \forall k \in \{1, \ldots, n\}, \lambda_k \in \mathbb{K}\}$. F est l'espace engendré par la famille $(e_1, \ldots, e_n)$.

Exemple 1.6 :
Dans $\mathbb{K}^3$, on considère $u = (1,1,1)$ et $v = (0,-1,2)$. Donner la forme des coordonnées des vecteurs de $\mathrm{Vect}(u, v)$.

Remarque :
Attention donc, une famille génératrice n'engendre qu'un espace donné. Une famille n'est pas

génératrice tout court. Elle est génératrice pour un certain espace (l'espace qu'elle engendre). Il faudra bien garder cela à l'esprit. C'est de là que va naître beaucoup de problème par la suite.

Proposition 1.4 (Principe d'élimination dans un Vect [✓]) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $e_1, \dots, e_{n+1}$ des vecteurs de E (pour $n \geq 1$).
Si $e_{n+1} \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$, *i.e.* si e_{n+1} est combinaison linéaire des $e_1, \dots, e_n$, alors $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{n+1}) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$.

Démonstration :
On sait déjà que $\{e_1, \dots, e_n\} \subset \{e_1, \dots, e_{n+1}\}$. Donc par les propriétés déjà vu plus haut, on sait que $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n) \subset \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{n+1})$.

Mais si $x \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{n+1})$, alors $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{K}$ tel que $x = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k e_k$. Mais d'un autre côté, $\exists \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{K}$ tel que $e_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \mu_k e_k$. On en déduit donc que x est en fait une combinaison linéaire seulement des $e_1, \dots, e_n$:

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k + \lambda_{n+1} e_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k + \lambda_{n+1}\mu_k) e_k \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$$

par factorisation dans les ev.
On a donc l'autre inclusion et donc égalité entre les deux espaces vectoriels. □

Autrement dit, l'information apporté par e_{n+1} dans l'espace vectoriel engendré est nulle, il ne sert à rien. Donc on peut l'enlever.

Remarque :
On a bien sûr $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n) = \mathrm{Vect}(e_2, e_3, \dots, e_n, e_1) = \mathrm{Vect}(e_n, e_{n-1}, \dots, e_1) = \mathrm{Vect}(e_1, e_3, e_5, \dots, e_{\lfloor (n-1)/2 \rfloor}, e_2, e_4, e_6, \dots, e_{\lfloor n/2 \rfloor})$ etc. L'ordre dans lequel on note les vecteurs n'a pas d'importance. C'est dû à la commutativité de l'addition dans les ev. Autrement dit :

Proposition 1.5 :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $e_1, \dots, e_n \in E$ (pour $n \geq 1$).
Alors $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n) = \mathrm{Vect}(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$.

Ici, $\mathfrak{S}_n$ correspond à l'ensemble des permutations de n éléments (voir chap sur les ensembles finis).

Autrement dit, on peut réordonner les vecteurs à sa guise dans une famille génératrice.

Exemple 1.7 :
Dans $\mathbb{R}^3$, montrer que $\mathrm{Vect}((1,0,1), (-1,1,-1), (1,1,1)) = \mathrm{Vect}((1,0,1), (1,1,1))$.

Proposition 1.6 (Principe de substitution dans un Vect [✓]) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $n \geq 1$ et $e_1, \ldots, e_n$ des vecteurs de E.
Alors, $\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$,

$$\lambda_n \neq 0 \implies \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n) = \mathrm{Vect}\left(e_1, \ldots, e_{n-1}, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right).$$

Exemple 1.8 :
Dans $\mathbb{R}^4$, Montrer que $\mathrm{Vect}((1,1,0,0),(1,0,1,0),(-1,-1,1,1),(0,1,0,-1)) = \mathrm{Vect}((1,1,0,0),(0,1,-1,0),(0,0,1,1),(0,0,0,1))$

Proposition 1.7 (Famille génératrice de la somme de deux espaces engendrés par des familles) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $n, m \in \mathbb{N}^*$ et $e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_m \in E$.

$$\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n) + \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_m) = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_m)$$

Démonstration :
On peut soit l'écrire en utilisant les définitions et les structures de $\mathbb{K}$-ev qui apparaissent, ou utiliser la propriété de l'espace vectoriel engendré par une réunion de partie que l'on a vu dans le chapitre précédent. □

Proposition 1.8 (Création d'une somme directe à partir d'une famille libre [✓]) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $e_1, \ldots, e_n \in E$ et $k \in \{1, \ldots, n\}$.
Si la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille libre de E, alors

$$\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n) = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k) \oplus \mathrm{Vect}(e_{k+1}, \ldots, e_n)$$

Démonstration :
Il suffit de montrer que l'intersection des deux sev est réduite à 0. Soit donc $x \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k) \cap \mathrm{Vect}(e_{k+1}, \ldots, e_n)$. Donc $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tel que $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i = \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i e_i$. On en déduit donc $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i - \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i e_i = 0$. Mais la famille est libre donc chacun des coefficients est nul, donc $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $\lambda_i = 0$. En particulier, $x = 0$. Donc $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k) \cap \mathrm{Vect}(e_{k+1}, \ldots, e_n) = \{0\}$. □

Exemple 1.9 :
Montrer que l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}(x \mapsto \cos x, x \mapsto \sin x)$ est en somme directe avec $\mathrm{Vect}(x \mapsto 1, x \mapsto x, x \mapsto x^2)$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1.3 Base

Définition 1.4 (Base d'un ev [✓]) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev. On appelle base de E une famille libre et génératrice de E

Exemple 1.10 :
Montrer que la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$ avec $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$, $e_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ et le 1 en k-ème position. Cette base s'appelle la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Exemple 1.11 :
Donner une base de $\mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{R}$-ev.

Définition 1.5 (Canonique (*Larousse*)) :
Adjectif (latin *canonicus*, du grec *kanonikos*). Mathématiques : Se dit de la forme naturelle, intrinsèque, principale de certains êtres ou de certaines représentations mathématiques.

Le principe que nous développerons dans la suite et d'utiliser les bases pour exprimer les vecteurs de l'espaces vectoriels dans cette base. Les bases seront donc des familles de vecteurs permettant de décrire les autres vecteurs.

Dans la suite, il faudra donc trouver des bases des ev. Il faudra donc faire un choix. Mais certains espaces fournissent automatiquement un choix de base. La définition même de ces espaces vectoriels fournit une base. On est pas obligé de choisir cette base, évidemment. Mais si l'on a besoin d'une base, un choix est fait d'office. Il n'est pas nécessaire de choisir de nous même et donc de discriminer tel ou tel vecteur. Il y a une base déjà fournie. C'est une sorte de faux choix.

Ces bases faussement choisies, déjà choisies sont les bases canoniques. Ce sont des choix canoniques, au sens où ce sont des choix évidents, faciles, toujours disponibles, qui ne nécessite pas de prise de position, qui ne dépendent pas de l'intervenant. Ce sont des choix qui sont faits par la définition même des espaces vectoriels. Ce sont des choix canoniques au sens facile, trivial, du terme.

Proposition 1.9 (Base canonique des ev de références) :

- Dans $\mathbb{K}^n$ la base canonique est la base $(1,0,0,\dots,0)$, $(0,1,0,0,\dots,0)$, $\dots$, $(0,0,\dots,0,1,0)$, $(0,0,\dots,0,1)$.
- La base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la famille $(E_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$
- La base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ est $(1,X,\dots,X^n)$.

Démonstration :
La démonstration se fera tout au long de l'année lorsque l'on définira ces ev. □

Les autres espaces vectoriels de références n'ont pas de bases (au sens limité par le programme).

Définition 1.6 (Concaténation (*Larousse*)) :
(nom féminin) Dans certains langages de programmation, enchaînement de deux listes ou de deux chaînes de caractères mises bout à bout.

En Python, vous savez faire des concaténation de listes ou de chaînes de caractères. Le principe est le même en mathématiques. La seule différence, c'est le type des objets que l'on manipule.

Définition 1.7 (Base adaptée à une somme directe [✓]) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et F,G deux sev de E en somme directe.
Une base adaptée à la somme directe $F\oplus G$ est une base de $F\oplus G$ composé d'une base de F concaténée avec une base de G, autrement dit, une base adaptée à $F\oplus G$ est une base $(e_1,\dots,e_n,e_{n+1},\dots,e_{n+p})$ tel que $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de F et $(e_{n+1},\dots,e_{n+p})$ est une base de G.

Proposition 1.10 :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $n,p\in\mathbb{N}^*$ et $(e_1,\dots,e_{n+p})$ une famille libre de E.
Alors $(e_1,\dots,e_{n+p})$ est une base adaptée à la somme directe $\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_n)\oplus\mathrm{Vect}(e_{n+1},\dots,e_{n+p})$.

Démonstration :
On sait que $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{n+p}) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n) \oplus \mathrm{Vect}(e_{n+1}, \dots, e_{n+p})$.

On sait que la famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_{n+p})$ est une famille libre et elle est génératrice de $\mathrm{Vect}(\mathcal{B})$ par définition. Donc c'est une base de cet espace vectoriel.

On peut effectuer le même raisonnement pour $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}_2 = (e_{n+1}, \dots, e_{n+p})$ qui sont des bases des sev de $\mathrm{Vect}(\mathcal{B})$. Et clairement, $\mathcal{B}$ est la concaténation de $\mathcal{B}_1$ et de $\mathcal{B}_2$. Donc c'est une base adaptée à la somme directe. □

Exemple 1.12 :
On pose $E = \{x \in \mathbb{R}^4, x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 0\}$ et $F = \{x \in \mathbb{R}^4, x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = x_1 + x_4 = 0\}$. Montrer que $\mathbb{R}^4 = E \oplus F$ et déterminer une base adaptée à la somme directe.

Remarque :
On peut étendre la notion de base adaptée à une somme directe pour une somme de plusieurs sev. Si $F_1, \dots, F_n$ sont des sev en sommes directes de E de dimension finie, alors une base adaptée à la somme directe $F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$ est une base de $F_1 + \cdots + F_n$ composée de concaténation de bases de $F_1, \dots, F_n$.

!!! ATTENTION !!!

⚠ Attention à l'ordre dans lequel on donne les sev d'une somme directe et l'ordre dans lequel on concatène leur base ! Fondamentalement, à cause de la structure de groupe abélien, ça n'a pas d'importance pour fabriquer des éléments de la somme (on a les même éléments dans $F \oplus G$ et dans $G \oplus F$). Mais l'ordre a beaucoup d'importance sur la façon dont on décrit ces vecteurs (et ça aura des conséquences drastiques dans des chapitres ultérieurs).

Théorème 1.11 (Composantes d'un vecteur dans une base [✓]) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors

$$\forall x \in E,\ \exists!(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n,\ x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$$

Les scalaires $(x_1, \dots, x_n)$ sont appelés coordonnées du vecteur x dans la base $\mathcal{B}$. x_k est la k-ème coordonnée de x.

Démonstration :
Par définition d'une base, la famille $\mathcal{B}$ est génératrice, donc $\forall x \in E$, $\exists(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$.

La liberté de la famille nous fournit l'unicité. En effet si on suppose $\exists(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k$. En faisant la différence, la liberté nous donne la nullité de chacun des coefficients qui sont les $y_k - x_k$. D'où l'unicité. □

!!! ATTENTION !!!

⚠ Les coordonnées d'un vecteur dépendent du choix d'une base. Les coordonnées d'un vecteur donné vont donc changer si l'on change de base. Le problème essentielle à partir de maintenant sera justement ce choix d'une base. Il faut EN PERMANENCE garder à l'esprit que l'on a effectué un choix sur une base et que tout dépendra du choix de cette base. Même quand ça ne se verra pas de façon évidente. Il y a TOUJOURS un choix d'une base quelque part. C'est une question de référentiel.

Exemple 1.13 :
On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Montrer que la famille $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_n)$ où $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $u_k = \sum_{i=1}^{k} e_i$ est une base de $\mathbb{K}^n$. Donner les coordonnées des vecteurs de la base canonique dans la nouvelle base.

On considère un vecteur $x \in \mathbb{K}^n$ dont les coordonnées dans la base canonique sont $(x_1, \dots, x_n)$. Donner ses coordonnées dans la base $\mathcal{U}$. Inversement, on considère un vecteur $y \in \mathbb{K}^n$ dont les coordonnées dans la base $\mathcal{U}$ est $(y_1, \dots, y_n)$. Déterminer les coordonnées de y dans la base canonique $\mathcal{B}$.

Proposition 1.12 (Coordonnées et opérations) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
Si les coordonnées de x et de y dans la bases $\mathcal{B}$ sont $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ respectivement, alors les coordonnées du vecteur $x + \lambda y$ sont $(x_1 + \lambda y_1, \dots, x_n + \lambda y_n)$.

Démonstration :
Ça vient simplement de la structure d'ev de E. □

Remarque :
Cet énoncé est le point de départ du chapitre sur la représentation matricielle qui est l'un des plus délicat d'algèbre linéaire, car c'est le chapitre qui fusionne tous les autres. Toutefois, si tous les chapitres d'algèbre linéaire sont bien compris, alors les représentations matricielles ne poseront aucun soucis. Mais il faut une bonne maîtrise et une bonne compréhension de ce qu'est réellement une base et plus particulièrement du point précédent.

2 Dimension

2.1 Dimension

Définition 2.1 (Ev de dimension finie) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev.

- On dit que E est de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.
- Si ce n'est pas le cas, on dit que E est de dimension infinie.

Exemple 2.1 :
$\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, mais $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est de dimension infinie.

Théorème 2.1 ((***)Existence d'une base [✓](***)) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev.
Si E est de dimension finie, alors il existe une base de E.

Démonstration :
On va faire une démonstration algorithmique.

Comme E est de dimension finie, par définition, E a une famille génératrice finie $(e_1, \dots, e_n)$.

Si la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre, alors c'est une base et on s'arrête là.

Si la famille n'est pas libre, c'est qu'elle est liée, par définition. Donc il y a un vecteur de la famille qui est combinaison linéaire des autres. Quitte à renuméroter les vecteurs, on peut supposer, sans perte de généralité, que c'est le dernier vecteur e_n qui est combinaison linaire des autres. Mais par le principe d'élimination dans un Vect, on a $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1}) = E$.

Et on recommence. Si cette famille est libre, alors c'est une base, sinon, on peut enlever un vecteur.

Le processus s'arrête obligatoirement puisque la famille est finie et qu'on n'enlève éventuellement un vecteur à chaque étape. Donc on ne peut faire qu'un maximum de n étapes. Au pire, on aboutit sur la famille vide qui est libre (et donc $E = \{0\}$). □

Remarque :
On verra plusieurs autres démonstration algorithmique. L'idée est de refaire comme un algorithme sur ordinateur. D'ailleurs, ces démonstrations pourraient parfaitement être écrite en Python

Pour faire ce genre de démonstration, il faut donc décrire les étapes du programme (mathématiquement et pas dans un langage ou pseudo-langage) et il faut aussi prouver que l'algorithme converge, c'est à dire qu'il finit par s'arrêter. Il faut donc vérifier qu'il n'y a pas de boucles infinies.

Le théorème suivant est fondamentale dans les ev de dimension finis.

Théorème 2.2 (Théorème de la base incomplète et de la base extraite [✓]) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.

- **[Théorème de la base incomplète] :** Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E.
- **[Théorème de la base extraite] :** De toute famille génératrice de E, on peut extraire une base de E.

Ce théorème nous permet donc de toujours pouvoir nous ramener à une base de E dans toutes les situations. Si on dispose d'une famille libre, c'est qu'elle ne permet pas de recouvrir l'espace E totalement et donc il suffit de lui rajouter assez de vecteur pour recouvrir E. Si on rajoute en plus des vecteurs qui ne sont pas dans l'espace vectoriel engendré par les vecteurs de départs, on garde la liberté.

De même, si on démarre avec une famille génératrice, on recouvre bien l'espace E en entier, mais on en a peut être trop pour avoir la liberté. Donc il suffit d'enlever ceux qui ne servent à rien, ceux qui sont déjà dans l'espace engendré par les autres. In fine, on finit par obtenir la liberté. Et comme on a enlevé les vecteurs de façon à ne pas perdre la génération, on a donc une base à la fin.

On va en donner une preuve algorithmique. C'est un bon entraînement que de le coder en Python...

Démonstration :
On commence par l'algorithme de la base extraite.

Soit $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille génératrice (qui a donc "trop" de vecteurs). On pose $\mathcal{B} := \emptyset$, $x := e_1$ et $\mathcal{E} := \mathcal{E} \setminus \{x\}$. Et on fait :

- Si $x \in \mathrm{Vect}(\mathcal{B})$, on a $\mathrm{Vect}(\mathcal{B}) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, x)$. On le jette et on fait $x :=$ premier vecteur de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E} := \mathcal{E} \setminus \{x\}$.
- Sinon, $x \notin \mathrm{Vect}(\mathcal{B})$, on pose $\mathcal{B} := \mathcal{B} \cup \{x\}$. On a donc $\mathrm{Vect}(\mathcal{B}) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, x)$. On passe au cran suivant en prenant $x :=$ premier vecteur de $\mathcal{E}$, $\mathcal{E} := \mathcal{E} \setminus \{x\}$.

L'algorithme s'arrête automatiquement lorsque $\mathcal{E}$ est vide, c'est à dire lorsqu'on a parcouru tous les vecteurs de la famille génératrice de départ. Et lors de la k-ème étape de la boucle, on a, dans les deux cas, $\mathrm{Vect}(\mathcal{B}) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$. Donc à la fin $\mathrm{Vect}(\mathcal{B}) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n) = E$. Donc $\mathcal{B}$ est une base.

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre. Comme E est de dimension finie, il admet une famille génératrice finie $(u_1, \dots, u_m)$. Alors la famille $(e_1, \dots, e_n, u_1, \dots, u_m)$ est une famille génératrice. On applique alors l'algorithme de la base extraite à cette famille. L'algorithme parcourt dans l'ordre la famille et ne conserve que les vecteurs linéairement indépendants. Donc l'algorithme va automatiquement conservé les vecteurs $(e_1, \dots, e_n)$ (on peut donc en fait démarrer l'algorithme à partir de là seulement). L'algorithme va alors sélectionner des vecteurs de $(u_1, \dots, u_m)$ pour compléter la famille $(e_1, \dots, e_n)$ et en faire une base. □

Exemple 2.2 :
Dans $\mathbb{R}^5$, on considère les vecteurs $(1, 2, 0, -1, -2)$, $(-1, -2, 1, 2, 0)$ et $(0, 1, 2, -1, -2)$. Montrer que ces vecteurs forment une famille libre et la compléter en une base de $\mathbb{R}^5$.

Proposition 2.3 (Condition suffisante pour avoir une famille liée) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev.

Si E est engendré par une famille de n vecteurs, alors toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.

Démonstration :
On va démontrer cette proposition par récurrence sur le nombre de vecteur de la famille génératrice. Pour $n = 0$, on a $E = \mathrm{Vect}(\emptyset) = \{0\}$. Donc évidemment, toute famille de vecteurs de E contient le vecteur nul et est donc liée.

Supposons donc que si E est engendré par une famille de $n-1$ vecteurs, alors toutes famille de n vecteurs est liée, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$.

On suppose donc maintenant que E est engendré par une famille de n vecteurs $(e_1, \dots, e_n)$. On considère une famille $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_{n+1})$ de $n+1$ vecteurs de E. On pose $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1}) \subset E$. On a donc, $E = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1}) + \text{Vect}(e_n) = F + \text{Vect}(e_n)$. Donc tout vecteurs de E a une décomposition dans cette somme (mais pas unique). En particulier, $\forall k \in \{1, \dots, n+1\}$, $\exists (v_k, \lambda_k) \in F \times \mathbb{K}$ tel que $u_k = v_k + \lambda_k e_n$. On va distinguer deux cas.

- 1er cas : $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \lambda_{n+1} = 0$.
  Alors dans ce cas, $\forall k \in \{1, \dots, n+1\}$, $u_k \in F$. Donc la famille $\mathcal{U}$ est une famille de $n+1$ vecteurs de F qui est engendré par $n-1$ vecteurs. Alors l'hypothèse de récurrence nous permet d'affirmer que la famille $\mathcal{U}$ est liée.
- 2nd cas : $\exists k \in \{1, \dots, n+1\}$, $\lambda_k \neq 0$.
  L'ordre des vecteurs n'ayant pas d'importance ici, quitte à ré-indexer les vecteurs, on peut supposer que $\lambda_{n+1} \neq 0$. On pose alors

$$\forall k \in \{1, \dots, n\},\ x_k = u_k - \frac{\lambda_k}{\lambda_{n+1}} u_{n+1} = v_k - \frac{\lambda_k}{\lambda_{n+1}} v_{n+1} \in F$$

  Donc la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille de n vecteurs de F. Donc par hypothèse de récurrence, cette famille est nécessairement liée. Donc $\exists (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ tel que $\sum_{i=1}^n \mu_i x_i = 0$. On en déduit donc

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \mu_i x_i = 0 &\iff \sum_{i=1}^n \mu_i \left(u_i - \frac{\lambda_i}{\lambda_{n+1}} u_{n+1} \right) = 0 \\ &\iff \sum_{i=1}^n \mu_i u_i - \frac{1}{\lambda_{n+1}} \left(\sum_{i=1}^n \mu_i \lambda_i \right) u_{n+1} = 0 \end{aligned}$$

  Mais comme $(\mu_1, \dots, \mu_n) \neq (0, \dots, 0)$, on en déduit donc $(\mu_1, \dots, \mu_n, \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i \lambda_i}{\lambda_{n+1}}) \neq (0 \dots, 0)$ et donc la famille est liée.

Ce qui achève la démo par récurrence. □

Théorème 2.4 (Nombre de vecteurs d'une base [✓]) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.
Alors toutes les bases de E ont le même nombre de vecteurs de E.

Démonstration :
Ce théorème est en fait un corollaire de la proposition précédente. En effet, si l'on suppose que l'on a deux bases avec des nombres différents de vecteurs. On note $\mathcal{B}_1$ la première avec n_1 vecteur et $\mathcal{B}_2$ la seconde composée de n_2 vecteurs et $n_1 < n_2$. On a donc $E = \text{Vect}(\mathcal{B}_1) = \text{Vect}(\mathcal{B}_2)$. Mais $\mathcal{B}_2$ est donc une famille libre de vecteurs de E ayant $n_2 > n_1$ vecteurs, alors que E est engendré par une famille de n_1 vecteurs. Donc la famille $\mathcal{B}_2$ est liée, donc elle n'est pas libre et donc ce n'est pas une base. D'où ☠. □

Définition 2.2 (Dimension [✓]) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.

- On appelle dimension de E, notée $\dim E$, le nombre de vecteurs d'une base de E. On remarque donc que $\dim E \in \mathbb{N}$.
- Si E n'est pas de dimension finie, on notera $\dim E = +\infty$.

Remarque :
Comme on vient de montrer que toutes les bases ont le même nombre de vecteurs, il suffit de compter le nombre de vecteurs de n'importe quelle base de E. L'une d'entre elle, votre préférée, fait très bien l'affaire et toutes les autres auront le même nombre de vecteurs. Mais pas les mêmes vecteurs !

!!! ATTENTION !!!

⚠ C'est le NOMBRE de vecteurs des bases qui est constant et pas les vecteurs des bases. Donc deux bases d'un ev de dimension finie auront le même nombre d'élément, mais ne seront pas composé (a priori) des même vecteurs. En fait, pour un ev de dimension finie, il y a une infinité de base possible (qui auront donc toutes le même nombre de vecteurs).

La notion de dimension est aux espaces vectoriels ce que la notion de degré est aux polynômes. On va voir que c'est un outil extrêmement puissant. 3/4 des résultats des chapitres d'algèbre linéaire sont en lien, directe ou indirecte, avec la notion de dimension.

Moralement, la dimension correspond aux nombres de directions selon lesquelles on peut se déplacer dans l'ev, comme en SI.

Exemple 2.3 :
Montrer que $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-ev et donner sa dimension en tant que $\mathbb{R}$-ev.

Définition 2.3 (Droite vectorielle, plan vectoriel) :
On définit

- Un espace vectoriel de dimension 1 est appelé droite vectorielle.
- Un espace vectoriel de dimension 2 est appelé plan vectoriel.

2.2 Dimension de référence

Proposition 2.5 (Dimension d'ev de référence) :
On a les dimension suivantes : $\forall n, p \in \mathbb{N}^*$,

$$\dim(\mathbb{K}^n) = n, \qquad \dim(\mathbb{K}_n[X]) = n+1, \qquad \dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = np$$

Démonstration :
La famille $\Big((1,0,\dots,0),(0,1,0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,1)\Big)$ est une base de $\mathbb{K}^n$ (c'est la base canonique qu'on note souvent $(e_1,\dots,e_n)$ avec $e_i = (0,\dots,0,1,0,\dots,0)$ avec le 1 en i-ème position). Et cette famille contient n vecteurs. C'est une base de $\mathbb{K}^n$ donc $\dim \mathbb{K}^n = n$.

La famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ (c'est la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$). Et il y a $n+1$ vecteurs dans cette base donc $\dim \mathbb{K}_n[X] = n+1$.

La base canonique des $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont les $(E_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$ où $E_{i,j}$ est la matrice composée d'un 1 en position (i,j) et de 0 partout ailleurs. □

On donnera les dimensions des autres ev classiques lorsqu'on les introduira.

!!! ATTENTION !!!

⚠ ATTENTION ! ! Piège !

$$\dim \mathbb{K}_n[X] = n+1$$

Remarque :
Pour déterminer la dimension d'un espace vectoriel, il faut donc trouver une base et compter le nombre de vecteurs de cette base.

Exemple 2.4 :
Déterminer la dimension de l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + xy = 0$ et $y'' + ay' + by = 0$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

On peut donc désormais parfaitement comprendre la démonstration des deux propriétés sur la structure de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ou second ordre qui se trouve dans le chapitre *ad hoc*. On vient d'en donner une démo dans un cas particulier.

Proposition 2.6 (Dimension d'un produit cartésien) :
Soit E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.
Alors $E \times F$ est aussi de dimension finie et

$$\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F).$$

Démonstration :
Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $(f_1, \dots, f_p)$ une base de F. On considère la famille $((e_1, 0), \dots, (e_n, 0), (0, f_1), \dots, (
Soit $(x, y) \in E \times F$. Alors $x \in E$ et $y \in F$ par définition d'un produit cartésien. Donc $\exists x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p \in \mathbb{K}$ tels que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^{p} y_j f_j$. Alors

$$\begin{aligned}
(x, y) &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{p} y_j f_j \right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, 0 \right) + \left(0, \sum_{j=1}^{p} y_j f_j \right) && \text{def LCI de } E \times F \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i (e_i, 0) + \sum_{j=1}^{p} y_j (0, f_j) && \text{def LCE et LCI de} E \times F
\end{aligned}$$

Donc $E \times F \subset \mathrm{Vect}((e_1, 0), \dots, (e_n, 0), (0, f_1), \dots, (0, f_p))$. L'autre inclusion est immédiate, donc $E \times F = \mathrm{Vect}((e_1, 0), \dots, (e_n, 0), (0, f_1), \dots, (f_p, 0))$.
Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_p \in \mathbb{K}$ tels que

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (e_i, 0) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j (0, f_j) = 0 \\
\iff & \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^{p} \mu_j f_j \right) = 0 && \text{def opé dans } E \times F \\
\iff & \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0 \\ \sum_{j=1}^{p} \mu_j f_j = 0 \end{cases} && \text{def} = \text{ dans } E \times F
\end{aligned}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0 \\ \mu_1 = \cdots = \mu_p = 0 \end{cases}$$ liberté

Donc, par définition, $((e_1, 0), \ldots, (e_n, 0), (0, f_1), \ldots, (0, f_p))$ est libre. Donc c'est une base de $E \times F$. Et donc $\dim(E \times F) = n + p = \dim(E) + \dim(F)$. □

2.3 Caractérisations

Proposition 2.7 (Lien entre dimension et nombre de vecteurs d'une famille libre ou génératrice) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \geq 0$.

1. Toute famille libre a moins de n éléments.
2. Toute famille génératrice a plus de n éléments.
3. Toute base a exactement n éléments.

Démonstration :
E possède une base de n vecteurs. Donc par un résultat précédent, on sait que toute famille de plus de $n + 1$ vecteurs est liée, autrement dit, toute famille libre a moins de n vecteurs.

Si on a une famille génératrice de m éléments avec $m < n$, alors, par théorème de la base extraite, on peut en extraire une base qui aura moins de $m < n$ éléments. Donc $\dim E < n$ ce qui est absurde. Donc la famille génératrice est de cardinal $m \geq n$.

Une base est une famille libre ET génératrice donc de cardinal à la fois plus grand et plus petit que n, donc de exactement n éléments. □

Théorème 2.8 (Caractérisation des bases en dimension finie [✓]) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \geq 0$ et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une famille formée de n vecteurs de E.

On a équivalence entre :

(i) $\mathcal{B}$ est une base de E

(ii) $\mathcal{B}$ est une famille libre

(iii) $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de E

Démonstration :
On a clairement (i) $\implies$ (ii) et (i) $\implies$ (iii).

(ii)⇒(iii)⇒(i) Supposons que $\mathcal{B}$ est libre et montrons qu'elle est génératrice par l'absurde. On suppose donc que $\exists x \in E$ tel que $x \notin \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$. Donc la famille $(e_1, \ldots, e_n, x)$ est libre. Or cette famille est formée de $n+1$ vecteurs ce qui contredit la proposition précédente. Donc elle est génératrice. Donc c'est une base.

(iii)⇒(ii)⇒(i) Supposons que $\mathcal{B}$ est génératrice et raisonnons encore par l'absurde. On suppose que $\mathcal{B}$ est liée. Donc l'un des vecteurs de $\mathcal{B}$ est combinaison linéaire des autres, donc, par principe d'élimination dans un Vect, on peut l'enlever de la famille sans changer la génération. On obtient donc une famille de cardinal $n-1$ qui engendre E. Ce qui est absurde d'après la proposition précédente. Donc $\mathcal{B}$ est aussi libre. □

Exemple 2.5 :
Dans $\mathbb{R}^3$, montrer que la famille $\mathcal{B} = (u, v, w)$, définie par

$$u = (1,1,1), \quad v = (1,2,1), \quad w = (0,1,1)$$

Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 2.6 :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et (e_1, e_2, e_3) une base de E. On définit une famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ par

$$\varepsilon_1 = e_2 + e_3, \quad \varepsilon_2 = e_1 + e_3, \quad \varepsilon_3 = e_1 + e_2$$

Montrer que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de E.

Remarque :
On a des ev classiques aussi :

- L'ensemble des solutions d'une équation différentielle

  $$y'' + ay' + by = 0$$

  est un plan vectoriel.
- L'ensemble des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2

  $$u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$$

  est un plan vectoriel.

!!! ATTENTION !!!

⚠ Toutes les caractérisations vues dans ce cours ne valent qu'en dimension finie ! Le but de la première année est d'étudier essentiellement les espaces de dimensions finies, mais ce ne sont pas les seuls. Il en existe d'autres dont certains que nous avons déjà vus. Par exemple, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ou $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sont des espaces vectoriels de dimension infinies. Dans ce contexte, tous ce qui est vu (ou presque) dans ce cours ne peut être utilisé.

Attention, donc, ces caractérisations, bien que très pratiques et très efficaces ne peuvent pas toujours être utilisées. Il faut bien vérifier avant d'être en dimension finie.

3 Dimension et sev

3.1 Généralités

Proposition 3.1 (Sev d'un ev de dimension finie) :
Tout sev d'un ev de dimension finie est de dimension finie.

Démonstration :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et F un sev de E.

Si $F = \{0\}$, alors la famille vide est une base de F. Donc il est de dimension finie (et de dimension 0, même).

Si $F \neq \{0\}$, $\exists e_1 \in F$ avec $e_1 \neq 0$. Si $\mathrm{Vect}(e_1) = F$, alors c'est une base de F. Donc F est de dimension finie. Sinon, $\exists e_2 \in F$ tel que $e_2 \notin \mathrm{Vect}(e_1)$. Alors la famille (e_1, e_2) est libre.

Si $\mathrm{Vect}(e_1, e_2) = F$, alors (e_1, e_2) est une base et donc F est de dimension finie. Sinon, $\exists e_3 \in F$ tel que $e_3 \notin \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$. Et on continue comme ça par itération.

Le processus s'arrête forcément puisque ce procédé créer une famille libre d'élément de F et que cette famille est aussi une famille libre d'élément de E, donc qui ne peut pas dépasser la dimension de E. On finit donc par avoir une base de F et donc F est de dimension finie. □

Corollaire 3.2 (Dimension d'un sev) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et F un sev de E. Alors

$$\dim F \leq \dim E$$

avec égalité si et seulement si $E = F$.

Démonstration :
On sait, par la proposition précédente que F est de dimension finie. Donc il a une base $\mathcal{B}$ de cardinal p. Cette base est une famille libre de E, donc son cardinal est plus petit que la dimension de E, ie $\dim F = p = \operatorname{Card} \mathcal{B} \leq \dim E$.

Et il y a égalité si et seulement $\mathcal{B}$ est une base de E donc si et seulement si $F = \operatorname{Vect} \mathcal{B} = E$. □

Définition 3.1 (Hyperplan [✓]) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \geq 1$.

On appelle hyperplan de E tout sous-espace de E de dimension $n-1$.

Exemple 3.1 :
Dans $\mathbb{R}^3$, donner la dimension des sev E et F définies par

$$E = \{(a+2b+c, b+c, a+b), a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

et

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x+y+z = 2x-y+z = 0\}$$

3.2 Sommes et dimension

Proposition 3.3 (Dimension de supplémentaires) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et F, G deux sev supplémentaires de E.

Alors une base de E est obtenue en concaténant une base de F et une base de G (c'est-à-dire une base adaptée à la somme directe), et en particulier,

$$\dim E = \dim F + \dim G$$

La démonstration suivante est ARCHI classique, il faut absolument la maîtriser.

Démonstration :
Soit $\mathcal{B}_F$ une base de F et $\mathcal{B}_G$ une base de G. Alors $\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ est une base de $F \oplus G$ adaptée à la somme directe. Comme $E = F \oplus G$, $\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ est donc une base de E. En comptant le nombre de vecteurs, on a directement

$$\dim E = \dim F + \dim G$$

□

Théorème 3.4 (Existence d'un supplémentaire [✓]) :
Tout sev d'un espace vectoriel de dimension finie possède un supplémentaire.

Démonstration :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et F un sev de E. Donc F est de dimension finie. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F. C'est une famille libre de E, donc, par théorème de la base incomplète, on peut la compléter en une base de E. Autrement dit, il existe $e_{p+1}, \dots, e_n \in E$ tel que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E. On pose alors $G = \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$.

Alors,

$$\begin{aligned} E &= \text{Vect}(e_1, \dots, e_n) && \text{def base} \\ &= \text{Vect}(e_1, \dots, e_p) \oplus \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n) && \text{par liberté} \\ &= F \oplus G && \text{def } G \end{aligned}$$

On en déduit donc, par définition, que F et G sont supplémentaires. □

!!! ATTENTION !!!

⚠ Il y a existence d'un supplémentaire MAIS CERTAINEMENT PAS unicité. On ne peut donc pas parler "du" supplémentaire. Il y a en fait une infinité de supplémentaire possible. On l'a déjà vue à la fin du chapitre précédent.

Remarque :
La démonstration est bien sûr à retenir en elle même, mais aussi parce qu'elle fournit une méthode. Une fois un sev donné, pour avoir un supplémentaire de ce sev, il suffit de compléter une base du sev en une base de l'espace ambiant par la théorème de la base incomplète. Les vecteurs que l'on rajoute fournissent une base d'un supplémentaire.

Exemple 3.2 :
Dans $\mathbb{R}^4$, on considère $F = \text{Vect}((1,1,1,1),(0,0,1,1))$. Déterminer un supplémentaire G de F.

Proposition 3.5 (Dimension d'une somme directe) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et F, G deux sev de E en somme directe. Alors

$$\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$$

Démonstration :
Comme $F \oplus G$ est également un sev de E, c'est encore un ev de dimension finie. Donc on peut regarder sa dimension.

Par ailleurs, on peut trouver une base de $F \oplus G$ adaptée à la somme directe. Autrement dit, il existe des vecteurs $e_1, \dots, e_p, e_{p+1} \dots, e_n$ tels que $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de F, $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ est une base de G et $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $F \oplus G$. Alors dans ce cas

$$\dim(F \oplus G) = n = p + (n - p) = \dim(F) + \dim(G)$$

□

Remarque :
On aurait pu démontrer cette proposition beaucoup plus rapidement et efficacement. En fait, c'est un corollaire du théorème de la dimension de deux supplémentaires. En effet, si F et G sont des sev de E en somme directe, alors ce sont aussi des sev de $F \oplus G$. Et F et G sont supplémentaires dans $F \oplus G$. Or $F \oplus G$ est un espace vectoriel de dimension finie puisque c'est un sev d'un espace vectoriel de dimension finie. Et donc l'application du théorème sur la dimension de supplémentaire nous donne alors $\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$.

Proposition 3.6 (Formule de Grassmann (dimension d'une somme de sev) [✓]) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et F, G deux sev. Alors

$$\dim(F + G) + \dim(F \cap G) = \dim F + \dim G$$

On va faire deux démonstrations. Une plus abstraite, plus jolie, mais plus difficile. Et une autre, plus calculatoire, où on construit les choses avec des vecteurs.

Démonstration (jolie) *:*
$F \cap G$ est un sev à la fois de F et de G (et de E). Donc $F \cap G$ admet un supplémentaire H dans F. Montrons que $F + G = G \oplus H$, c'est à dire que G et H sont supplémentaires dans $F + G$.

D'abord, comme $H \subset F$, $H \cap F = H$. Donc

$$H \cap G = H \cap F \cap G = \{0\}$$

D'autre part, on sait, par construction de H, que $F = H \oplus (F \cap G)$. Donc $F + G = H + (F \cap G) + G = H + (F \cap G + G) = H + G$. On en déduit donc que H et G sont supplémentaire dans $F + G$.

Finalement, par le théorème précédent,

$$\dim(F+G) = \dim H + \dim G$$

Mais comme H est un supplémentaire de $F \cap G$ dans F, on a aussi, toujours pas le résultat précédent, $\dim F = \dim(F \cap G) + \dim H$. Donc

$$\dim(F+G) = \dim F - \dim(F \cap G) + \dim G$$

□

Démonstration (calculatoire) *:*
$F \cap G$ est un sev à la fois de F et de G (et de E). Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de $F \cap G$. On peut compléter $\mathcal{B}$ en une base de F. On note $\mathcal{B}_F = (u_1, \dots, u_q)$ les vecteur à ajouter à $\mathcal{B}$ pour avoir une base de F, ie $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}_F$ est une base de F. De même, on rajoute des vecteurs à $\mathcal{B}$ pour en faire une base de G. On note $\mathcal{B}_G = (v_1, \dots, v_r)$ les vecteurs qu'on rajoute pour faire une base de G, ie $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}_G$ est une base de G.

Alors $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ est une famille génératrice de $F+G$. Soit $a_1, \dots, a_p$, $b_1, \dots, b_q$, $c_1, \dots, c_r \in \mathbb{K}$ tel que $\sum_{k=1}^{p} a_k e_k + \sum_{k=1}^{q} b_k u_k + \sum_{k=1}^{r} c_k v_k = 0$. On en déduit donc

$$F \ni \sum_{k=1}^{p} a_k e_k + \sum_{k=1}^{q} b_k u_k = -\sum_{k=1}^{r} c_k v_k \in G$$

donc $\sum_{k=1}^{q} b_k u_k = 0$ car $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}_F$ est une base de F. La liberté nous donne donc la nullité de tous les b_k. De même, $\sum_{k=1}^{r} c_k v_k = 0$ et la liberté nous donne la nullité des tous les c_k. On a donc la nullité de la dernière somme et par liberté encore une fois la nullité des dernier coefficients. On en déduit donc que $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ est libre. C'est donc une base de $F+G$. On an déduit donc

$$\dim F + G = \operatorname{Card} \mathcal{B} \cup \mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G = \operatorname{Card} \mathcal{B} + \operatorname{Card} \mathcal{B}_F + \operatorname{Card} \mathcal{B}_G = \dim F + (\dim G - \dim F \cap G)$$

□

Théorème 3.7 (Condition suffisante d'égalité entre sev par les dimensions [✓]) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et F, G deux sev de E.
Si $F \subset G$ et $\dim F = \dim G$, alors $F = G$.

Ce théorème est très important pour montrer l'égalité de deux sev. Et c'est un exemple qui permet de voir que la dimension joue le même rôle que le degré pour les polynômes.

Démonstration :
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F. Donc c'est une famille libre de G de cardinale la dimension de G. Par caractérisation des bases, $\mathcal{B}$ est une base de de G. Donc $F = \operatorname{Vect}(\mathcal{B}) = G$. □

Exemple 3.3 :
Montrer que l'intersection de deux plans distincts dans un espace de dimension 3 est une droite vectorielle.

Théorème 3.8 (Caractérisation des supplémentaires en dimension finie [✓]) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et F, G deux sev de E tels que

$$\dim E = \dim F + \dim G$$

Alors on équivalence entre

(i) F et G sont supplémentaires dans E

(ii) $F + G = E$

(iii) $F \cap G = \{0\}$.

Il faut comprendre ce théorème comme une liste de choses de situation à obtenir pour avoir des supplémentaires. Il suffit d'avoir la relation sur les dimension et le second point pour en déduire la supplémentarité. Ou bien l'égalité entre les dimensions et l'intersection pour la supplémentarité. Mais ça marche également dans l'autre sens (bien qu'alors, ce serait plutôt des applications des théorèmes précédents).

Démonstration :
(i)⇒(ii) C'est par définition des supplémentaires.

(ii)⇒(iii) Par la formule de Grassmann, on sait que

$$\dim F + \dim G = \dim E = \dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

d'où l'on déduit immédiatement

$$\dim(F \cap G) = 0$$

et donc $F \cap G = \{0\}$.

(iii)⇒(i) Comme $F \cap G = \{0\}$, on sait que la somme est directe. Et $F + G$ est un sev de E. Mais $\dim F + G = \dim F + \dim G - \dim F \cap G = \dim F + \dim G = \dim E$ par Grassmann. Donc $F + G$ est un sev de E de même dimension que E, donc $F + G = E$. Sans oublier $F \cap G = \{0\}$ par hypothèse, on a donc F et G supplémentaire. □

Exemple 3.4 (À CONNAÎTRE) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et H un hyperplan de E. Montrer que

$$\forall a \notin H,\ \mathrm{Vect}(a) \oplus H = E.$$

Proposition 3.9 (Caractérisation des sommes directes par les bases) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $F_1, \dots, F_n$ des sev de E.

Les sev $F_1, \dots, F_n$ sont en somme directe si, et seulement si, la concaténation de toute base de $F_1, \dots, F_n$ est une famille libre.

Remarque :
En particulier, F et G sont en sommes directes ssi, $\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ est libre, où $\mathcal{B}_F$ est une base de F et $\mathcal{B}_G$ une base de G.

Démonstration :
Si $F_1, \dots, F_n$ sont en somme directe, alors une concaténation d'une base de chacun des sev donne un base adaptée à la somme directe, par définition, et donc est libre.

Réciproquement, on note $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\mathcal{B}_i$ une base de F_i et $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_n$ la concaténation de ces bases. On suppose que $\mathcal{B}$ est libre. Soit $x \in \sum_{i=1}^n F_i$. Supposons $\exists (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in F_1 \times \dots \times F_n$ tel que $x = \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i$. Alors $\sum_{i=1}^n (x_i - y_i) = 0$. En décomposant dans les bases $\mathcal{B}_i$ et en utilisant la liberté de $\mathcal{B}$, on en déduit que $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $x_i = y_i$. Et donc l'écriture de x est unique. Et donc la somme est directe. □

Proposition 3.10 (Généralisation de dimension d'une somme de sev) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, soit $F_1, \dots, F_n$ des sev de E. Alors

$$\dim\left(\sum_{i=1}^n F_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \dim(F_i)$$

avec égalité si, et seulement si, la somme est directe.

Démonstration :
On va faire une récurrence sur le nombre de sev considérés. C'est évident pour $n = 1$. On le sait déjà pour $n = 2$.

Supposons que l'inégalité soit vraie pour une somme de n sev. On considère donc $F_1, \dots, F_{n+1}$ sev de E. On pose $G = F_1 + \dots + F_n$. Alors $F_1 + \dots + F_{n+1} = G + F_{n+1}$ par associativité. Et donc

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{n+1} F_i\right) = \dim(G + F_{n+1}) \leq \dim(G) + \dim(F_{n+1}) \leq \sum_{i=1}^{n+1} \dim(F_i)$$

Si la somme est directe, la même récurrence donne l'égalité car $\bigoplus_{i=1}^n F_i = \left(\bigoplus_{i=1}^{n-1} F_i\right) \oplus F_n$. Réciproquement, on suppose l'égalité des dimensions. On considère alors $\mathcal{C}$ une famille de vecteurs obtenue par concaténation d'une base de F_1, de F_2, etc jusqu'à F_n. Donc $\mathcal{C}$ contient $\sum_{i=1}^n \dim(F_i)$ vecteurs. Clairement, $\mathcal{C}$ est une famille génératrice de $H = \sum_{i=1}^n F_i$ et elle contient le même nombre

de vecteurs que $\dim(H)$. Donc, par caractérisation des bases en dimension finie, $\mathcal{C}$ est une base de E. Donc elle est libre. Et par suite, la somme est directe. □

3.3 Rang

Définition 3.2 (Rang d'une famille [✓]) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs de E.

On appelle rang de la famille $\mathcal{B}$ la dimension de l'espace vectoriel qu'elle engendre. On le note $\mathrm{rg}(e_1, \dots, e_n)$. Autrement dit

$$\mathrm{rg}(e_1, \dots, e_n) = \dim \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$$

Théorème 3.11 (Caractérisation de la liberté par le rang) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $e_1, \dots, e_n$ des vecteurs de E.

Alors $\mathrm{rg}(e_1, \dots, e_n) \leq n$ avec égalité si et seulement si la famille est libre.

Démonstration :
La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$, par définition. Mais ce n'est pas forcément une base. Cette famille n'est peut être pas libre. Donc $\mathrm{rg}(e_1, \dots, e_n) = \dim(\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)) \leq n$.

Si la famille est libre, c'est donc une base de l'espace vectoriel qu'elle engendre et donc, on a $n = \dim \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$.

Inversement, si $\dim \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n) = n$, alors la famille est une famille génératrice de même cardinal que la dimension de l'espace vectoriel engendré, donc c'est une base (par caractérisation des bases), et donc elle est libre (par def des bases). □

Théorème 3.12 (Caractérisation des familles génératrices par le rang) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de E.

On a $\mathrm{rg}(e_1, \dots, e_n) \leq \dim E$ avec égalité si et seulement si la famille engendre E.

Démonstration :
L'espace vectoriel $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ est un sev de E, donc $\mathrm{rg}(e_1, \dots, e_n) = \dim \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n) \leq \dim E$.

D'autre part, par la relation entre sev et dimension, on a égalité entre les dimension si et seulement si $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n) = E$. □

Remarque :
Les deux propositions précédentes nous fournissent automatiquement un majorant du rang de n'importe quel famille :

Si E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall e_1, \ldots, e_n \in E,\ \mathrm{rg}(e_1, \ldots, e_n) \leq \min(n, \dim(E)).$$

En effet, on vient de montrer que $\mathrm{rg}(e_1, \ldots, e_n) \leq n$ d'une part et $\mathrm{rg}(e_1, \ldots, e_n) \leq \dim(E)$ d'autre part. Donc $\mathrm{rg}(e_1, \ldots, e_n)$ est plus petite que les deux, donc que $\min(n, \dim(E))$ qui est l'un des deux.

Corollaire 3.13 (Caractérisation des bases par le rang) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs de E.
$(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E si et seulement si $\mathrm{rg}(e_1, \ldots, e_n) = n = \dim E$.

Démonstration :
C'est évident. □

Attention quand même : on a besoin des deux égalités. La première nous dit que la famille est libre et la seconde que l'espace vectoriel engendré est de même dimension que l'espace ambiant. Mais les deux égalités sont nécessaires.

On rappelle que d'après les principes de substitution, élimination etc, on ne modifie pas le rang d'une famille $(e_1, \ldots, e_n)$ en

- retirant le vecteur nul de la famille si celui ci y apparaît
- permutant les vecteurs de la famille
- remplaçant un vecteur e_i par une combinaison linéaire $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$ avec $\lambda_i \neq 0$

Remarque :
En résumé, pour le rang : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $\mathcal{F}$ une famille de p vecteurs de E.

- $\mathcal{F}$ est libre ssi $\mathrm{rg}\,\mathcal{F} = p$
- $\mathcal{F}$ est génératrice ssi $\mathrm{rg}\,\mathcal{F} = n$
- $\mathcal{F}$ est une base ssi $\mathrm{rg}\,\mathcal{F} = n = p$

Exemple 3.5 :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \geq 2$ et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On pose, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $u_i = \sum_{k=1}^{i} e_k$. Calculer $\mathrm{rg}(u_1, \ldots, u_n)$.