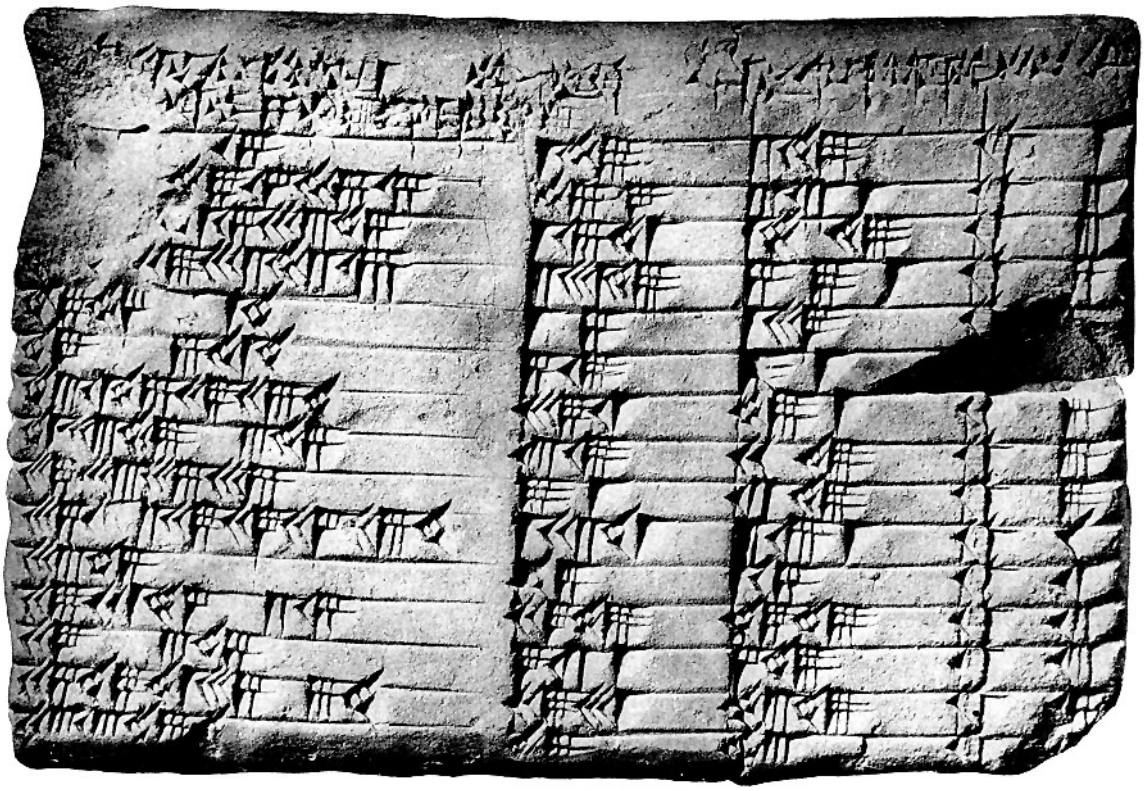
Cahier de calcul

— pratique et entraînement —



Plimpton 322, tablette d'argile babylonienne (1 800 av. JC)

Cette tablette, vieille de près de 4 000 ans, donne une liste de triplets pythagoriciens, c'est-à-dire de triplets (a, b, c) de nombres entiers vérifiant $a^2 + b^2 = c^2$.

Ce cahier de calcul a été écrit collectivement.

Coordination

Colas Bardavid

Équipe des participants

Vincent Bayle, Romain Basson, Olivier Bertrand, Ménard Bourgade, Julien Bureaux, Alain Camanes, Mathieu Charlot, Mathilde Colin de Verdière, Keven Commault, Miguel Concy, Rémy Eupherte, Hélène Gros, Audrey Hechner, Florian Hechner, Marie Hézard, Nicolas Laillet, Valérie Le Blanc, Thierry Limoges, Quang-Thai Ngo, Xavier Pellegrin, Fabien Pellegrini, Jean-Louis Pourtier, Valérie Robert, Jean-Pierre Técourt, Guillaume Tomasini, Marc Tenti

Le pictogramme 🕓 de l'horloge a été créé par Ralf Schmitzer (The Noun Project).

La photographie de la couverture vient de Wikipedia.

Version 10 — 7 mars 2022

Sommaire

- ☐ **1.** Fractions 1
- ☐ **2.** Puissances 3
- ☐ **3.** Calcul littéral 4
- ☐ **4.** Racines carrées 6
- ☐ **5.** Expressions algébriques 8
- ☐ **6.** Équations du second degré 10
- ☐ **7.** Exponentielle et logarithme 13
- ☐ **8.** Trigonométrie 16
- ☐ **9.** Dérivation 19
- ☐ **10.** Primitives 22
- ☐ **11.** Calcul d'intégrales 25
- ☐ **12.** Nombres complexes 27
- ☐ **13.** Trigonométrie et nombres complexes 28
- ☐ **14.** Coefficients binomiaux 30
- ☐ **15.** Suites numériques 32

Présentation et mode d'emploi

Qu'est-ce que ce cahier ?

Ce cahier est un cahier de calcul, basé sur le programme de mathématiques collège/lycée ainsi que sur le programme de première année post-Bac. Il ne se substitue en aucun cas aux TD donnés par votre professeur de maths mais est un outil pour vous aider à vous améliorer en calcul.

À quoi sert-il ?

En mathématiques, la technique et le calcul sont fondamentaux.

Sans technique, il est impossible de correctement appréhender une question mathématique. De même que l'on doit faire des gammes et beaucoup pratiquer lorsque l'on apprend un instrument, on doit calculer régulièrement lorsque l'on pratique les mathématiques, notamment en CPGE et dans les études post-Bac.

Comment est-il organisé ?

Ce cahier comporte plusieurs parties :

- Un sommaire vous permettant de voir d'un seul coup d'œil les différentes fiches et de noter celles que vous avez déjà faites ou pas.
- Une partie de **calculs élémentaires**, faisables dès le début de la première année, centrée sur les calculs « de base » : développement, factorisation, racines carrées, fractions, *etc.* Cela peut vous paraître simple, mais sachez que ce type d'erreur de calcul est toujours fréquent, même en spé, même sur les copies de concours. Travailler les techniques élémentaires de calcul vous facilitera grandement la vie !
- Une partie liée au programme de première année : sont indiqués précisément les chapitres nécessaires pour pouvoir aborder chaque fiche de calcul.
- Les réponses brutes ainsi que les corrigés détaillés sont dans un second cahier dédié, diffusé selon le choix de votre professeur.

Chaque fiche de calcul est organisée ainsi :

- Une présentation du thème de la fiche et des prérequis (notamment, pour des techniques propres à certaines filières, on précise de quelle filière il s'agit)
- Une liste de calculs, dont le temps de résolution (incluant la longueur et la technicité du calcul) est symbolisé par une (🕓), deux (🕓🕓), trois (🕓🕓🕓) ou quatre (🕓🕓🕓🕓) horloges.
- Vous êtes invité à écrire directement les réponses dans les cadres prévus à cet effet.

Comment l'utiliser ?

Un travail personnalisé.

Ce cahier de calcul est prévu pour être **utilisé en autonomie**.

Choisissez les calculs que vous faites en fonction des difficultés que vous rencontrez et des chapitres que vous étudiez, ou bien en fonction des conseils de votre professeur de mathématiques.

Pensez aussi à l'utiliser à l'issue d'un DS ou d'une colle, lorsque vous vous êtes rendu compte que certains points de calcul étaient mal maîtrisés.

Enfin, ne cherchez pas à faire linéairement ce cahier : les fiches ne sont pas à faire dans l'ordre, mais en fonction des points que vous souhaitez travailler.

Un travail régulier.

Essayez de pratiquer les calculs à un rythme régulier : **une quinzaine de minutes par jour** par exemple. Privilégiez un travail régulier sur le long terme plutôt qu'un objectif du type « faire 10 fiches par jour pendant les vacances » .

Point important : pour réussir à calculer, il faut répéter. C'est pour cela que nous avons mis plusieurs exemples illustrant chaque technique de calcul.

Il peut être utile de parfois refaire certains calculs : n'hésitez pas à cacher les réponses déjà écrites dans les cadres, ou à écrire vos réponses dans les cadres au crayon à papier.

Un travail efficace.

Attention à l'utilisation des réponses et des corrigés : il est important de chercher suffisamment par vous-même avant de regarder les réponses et/ou les corrigés. Il faut vraiment **faire les calculs** afin que le corrigé vous soit profitable.

N'hésitez pas à ne faire qu'en partie une feuille de calculs : il peut être utile de revenir plusieurs fois à une même feuille, afin de voir à quel point telle technique a bien été assimilée.

La progression

Avoir une solide technique de calcul s'acquiert sur le long terme, mais si vous étudiez sérieusement les fiches de ce cahier, vous verrez assez rapidement des progrès apparaître, en colle, en DS, *etc.* Une bonne connaissance du cours combinée à une plus grande aisance en calcul, c'est un très beau tremplin vers la réussite en prépa ou dans vos études !

Une erreur ? Une remarque ?

Si jamais vous voyez une erreur d'énoncé ou de corrigé, ou bien si vous avez une remarque à faire, n'hésitez pas à écrire à l'adresse `cahierdecalcul@gmail.com`. Si vous pensez avoir décelé une erreur, merci de donner aussi l'identifiant de la fiche, écrit en gris clair en haut à droite de chaque fiche.

Fiche de calcul n° 1

Fractions

Prérequis
Règles de calcul sur les fractions.

Calculs dans l'ensemble des rationnels

Calcul 1.1 — Simplification de fractions.

Simplifier les fractions suivantes (la lettre k désigne un entier naturel non nul).

a) $\dfrac{32}{40}$ .....

b) $8^3 \times \dfrac{1}{4^2}$ .....

c) $\dfrac{27^{-1} \times 4^2}{3^{-4} \times 2^4}$ .....

d) $\dfrac{(-2)^{2k+1} \times 3^{2k-1}}{4^k \times 3^{-k+1}}$ .....

Calcul 1.2 — Sommes, produits, quotients, puissances.

Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

a) $\dfrac{2}{4} - \dfrac{1}{3}$ .....

b) $\dfrac{2}{3} - 0{,}2$ .....

c) $\dfrac{36}{25} \times \dfrac{15}{12} \times 5$ .....

d) $-\dfrac{2}{15} \div (-\dfrac{6}{5})$ .....

Calcul 1.3

Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

a) $(2 \times 3 \times 5 \times 7)(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7})$ .....

b) $\left(\dfrac{136}{15} - \dfrac{28}{5} + \dfrac{62}{10}\right) \times \dfrac{21}{24}$ .....

c) $\dfrac{5^{10} \times 7^3 - 25^5 \times 49^2}{(125 \times 7)^3 + 5^9 \times 14^3}$ .....

d) $\dfrac{1\,978 \times 1\,979 + 1\,980 \times 21 + 1958}{1\,980 \times 1\,979 - 1\,978 \times 1\,979}$ .....

Calcul 1.4 — Un petit calcul.

Écrire $\dfrac{0{,}5 - \frac{3}{17} + \frac{3}{37}}{\frac{5}{6} - \frac{5}{17} + \frac{5}{37}} + \dfrac{0{,}5 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 0{,}2}{\frac{7}{5} - \frac{7}{4} + \frac{7}{3} - 3{,}5}$ sous forme d'une fraction irréductible. .....

Calcul 1.5 — Le calcul littéral à la rescousse.

En utilisant les identités remarquables et le calcul littéral, calculer les nombres suivants.

a) $\dfrac{2\,022}{(-2\,022)^2 + (-2\,021)(2\,023)}$ ..

b) $\dfrac{2\,021^2}{2\,020^2 + 2\,022^2 - 2}$ .....

c) $\dfrac{1\,235 \times 2\,469 - 1\,234}{1\,234 \times 2\,469 + 1\,235}$ .....

d) $\dfrac{4\,002}{1\,000 \times 1\,002 - 999 \times 1\,001}$ ...

Calcul 1.6 — Les fractions et le calcul littéral.

Mettre sous la forme d'une seule fraction, qu'on écrira sous la forme la plus simple possible.

a) $\dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ .....

b) $\dfrac{a^3 - b^3}{(a-b)^2} - \dfrac{(a+b)^2}{a-b}$ pour $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$, distincts deux à deux. .....

c) $\dfrac{\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\frac{2n+2}{n^2(n-1)^2}}$ pour $n \in \mathbb{N}^* \backslash \{1,2\}$. .....

Calcul 1.7 — Le quotient de deux sommes de Gauss.

Simplifier $\dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n^2} k}{\sum\limits_{k=0}^{n} k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en utilisant la formule $1 + 2 + \cdots + p = \dfrac{p(p+1)}{2}$. .....

Calcul 1.8 — Décomposition en somme d'une partie entière et d'une partie décimale.

Soit $k \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et $x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$. Écrire les fractions suivantes sous la forme $a + \dfrac{b}{c}$ avec $b < c$.

a) $\dfrac{29}{6}$ .....

b) $\dfrac{k}{k-1}$ ...

c) $\dfrac{3x-1}{x-2}$ ..

Calcul 1.9 — Un produit de fractions.

Soit $t \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$. On donne $A = \dfrac{1}{1+t^2} - \dfrac{1}{(1+t)^2}$ et $B = \left(1+t^2\right)(1+t)^2$.

Simplifier AB autant que possible. .....

Comparaison

Calcul 1.10 — Règles de comparaison.

Comparer les fractions suivantes avec le signe « $>$ », « $<$ » ou « $=$ ».

a) $\dfrac{3}{5} \cdots \dfrac{5}{9}$ .....

b) $\dfrac{12}{11} \cdots \dfrac{10}{12}$ .....

c) $\dfrac{125}{25} \cdots \dfrac{105}{21}$ ....

Calcul 1.11 — Produit en croix.

Les nombres $A = \dfrac{33\ 215}{66\ 317}$ et $B = \dfrac{104\ 348}{208\ 341}$ sont-ils égaux ? Oui ou non ? .....

Calcul 1.12 — Produit en croix.

On pose $A = \dfrac{100\ 001}{1\ 000\ 001}$ et $B = \dfrac{1\ 000\ 001}{10\ 000\ 001}$: a-t-on $A > B$, $A = B$ ou $A < B$? .....

Réponses mélangées

$\dfrac{-1}{n(n+1)^2}$	$-\dfrac{ab}{a-b}$	2	3	$\dfrac{12}{11} > \dfrac{10}{12}$	$\dfrac{1}{2}$	247	$\dfrac{n^3+n}{n+1}$	$1\ 000$	$\dfrac{1}{9}$	
$2t$	$2\ 022$	$\dfrac{-10}{3}$	$\dfrac{4}{5}$	$3 + \dfrac{5}{x-2}$	$\dfrac{3}{2}n$	$\dfrac{203}{24}$	$\dfrac{7}{15}$	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{3}{5} > \dfrac{5}{9}$	9
$4 + \dfrac{5}{6}$	$A > B$	1	$\dfrac{16}{35}$	2^5	$-2 \times 3^{3k-2}$	Non	$1 + \dfrac{1}{k-1}$	$\dfrac{125}{25} = \dfrac{105}{21}$		

Puissances

Prérequis
Opérations sur les puissances (produits, quotients), décompostion en facteurs premiers, sommes d'expressions fractionnaires (même dénominateur), identités remarquables, factorisations et développements simples.

Calcul 2.1

Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme d'une puissance de 10.

a) $10^5 \cdot 10^3$ .....

b) $(10^5)^3$ .....

c) $\dfrac{10^5}{10^3}$ .....

d) $\dfrac{10^{-5}}{10^{-3}}$ .....

e) $\dfrac{(10^5 \cdot 10^{-3})^5}{(10^{-5} \cdot 10^3)^{-3}}$ ....

f) $\dfrac{(10^3)^{-5} \cdot 10^5}{10^3 \cdot 10^{-5}}$ .....

Calcul 2.2

Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme a^n avec a et n deux entiers relatifs.

a) $3^4 \cdot 5^4$ .....

b) $(5^3)^{-2}$ .....

c) $\dfrac{2^5}{2^{-2}}$ .....

d) $(-7)^3 \cdot (-7)^{-5}$ ....

e) $\dfrac{6^5}{2^5}$ .....

f) $\dfrac{(30^4)^7}{2^{28} \cdot 5^{28}}$ .....

Calcul 2.3

Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme $2^n \cdot 3^p$, où n et p sont deux entiers relatifs.

a) $\dfrac{2^3 \cdot 3^2}{3^4 \cdot 2^8 \cdot 6^{-1}}$ .....

b) $2^{21} + 2^{22}$ .....

c) $\dfrac{3^{22} + 3^{21}}{3^{22} - 3^{21}}$ .....

d) $\dfrac{\left(3^2 \cdot (-2)^4\right)^8}{\left((-3)^5 \cdot 2^3\right)^{-2}}$ .....

Calcul 2.4

Dans chaque cas, simplifier au maximum.

a) $\dfrac{8^{17} \cdot 6^{-6}}{9^{-3} \cdot 2^{42}}$ .....

b) $\dfrac{55^2 \cdot 121^{-2} \cdot 125^2}{275 \cdot 605^{-2} \cdot 25^4}$ .....

c) $\dfrac{12^{-2} \cdot 15^4}{25^2 \cdot 18^{-4}}$ .....

d) $\dfrac{36^3 \cdot 70^5 \cdot 10^2}{14^3 \cdot 28^2 \cdot 15^6}$ .....

Calcul 2.5

Dans chaque cas, simplifier au maximum l'expression en fonction du réel x.

a) $\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{2}{x^2-1}$ .....

b) $\dfrac{2}{x+2} - \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{8}{x^2-4}$ .....

c) $\dfrac{x^2}{x^2-x} + \dfrac{x^3}{x^3+x^2} - \dfrac{2x^2}{x^3-x}$ .....

d) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{x+2}{x^2-4} + \dfrac{2}{x^2-2x}$ .....

Réponses mélangées

$\dfrac{x}{x+1}$ $\quad 15^4 \quad$ $\dfrac{2x}{x+1}$ $\quad 2^{21} \cdot 3 \quad 10^{15} \quad 11 \quad 5^{-6} \quad 2^{38} \cdot 3^{26}$

$10^2 \quad 10^8 \quad 10^{-2} \quad 2^{-4} \cdot 3^{-1} \quad 2^6 \cdot 5 \quad 3^5 \quad (-7)^{-2}$

$\dfrac{2}{x-2} \quad 10^4 \quad 8 \quad 2^7 \quad 10^{-8} \quad 3^{10} \quad \dfrac{1}{x-2} \quad 3^{28} \quad 2$

Fiche de calcul n° 3

Calcul littéral

Prérequis
Les identités remarquables.

Développer, réduire et ordonner

Dans cette section, on tâchera de mener les calculs avec le minimum d'étapes. Idéalement, on écrira directement le résultat. La variable x représente un nombre réel (ou complexe).

Calcul 3.1

Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes selon les puissances décroissantes de x.

a) $\left(2x - \frac{1}{2}\right)^3$ .....

b) $(x-1)^3\left(x^2+x+1\right)$ .....

c) $(x+1)^2(x-1)\left(x^2-x+1\right)$ ....

d) $(x+1)^2(x-1)\left(x^2+x+1\right)$ ....

e) $(x-1)^2(x+1)\left(x^2+x+1\right)$ ....

f) $\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)$ .....

Calcul 3.2

Développer, réduire et ordonner les expressions polynomiales suivantes selon les puissances croissantes de x.

a) $(x-2)^2\left(-x^2+3x-1\right)-(2x-1)(x^3+2)$ .....

b) $(2x+3)(5x-8)-(2x-4)(5x-1)$ .....

c) $\left((x+1)^2(x-1)\left(x^2-x+1\right)+1\right)x-x^6-x^5+2$ .....

d) $(x+1)(x-1)^2-2\left(x^2+x+1\right)$ .....

e) $\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(1-\sqrt{2}x+x^2\right)$ .....

f) $\left(x^2+x+1\right)^2$ .....

Factoriser

Calcul 3.3 — Petite mise en jambe.

Factoriser les expressions polynomiales de la variable réelle x suivantes.

a) $-(6x+7)(6x-1)+36x^2-49$ .....

b) $25-(10x+3)^2$ .....

c) $(6x-8)(4x-5)+36x^2-64$ .....

d) $(-9x-8)(8x+8)+64x^2-64$ .....

Calcul 3.4 — À l'aide de la forme canonique.

Factoriser les polynômes de degré deux suivants en utilisant leur forme canonique. On rappelle que la forme canonique de ax^2+bx+c est $a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$ (où $a\neq 0$).

a) x^2-2x+1 .....

b) x^2+4x+4 .....

c) x^2+3x+2 .....

d) $3x^2+7x+1$ .....

e) $2x^2+3x-28$ .....

f) $-5x^2+6x-1$ .....

Calcul 3.5 — Avec plusieurs variables.

Factoriser sur $\mathbb{R}$ les expressions polynomiales suivantes dont les variables représentent des nombres réels.

a) $(x+y)^2-z^2$ .....

b) $x^2+6xy+9y^2-169x^2$ .....

c) $xy+x+y+1$ .....

d) $xy-x-y+1$ .....

e) $x^3+x^2y+2x^2+2xy+x+y$ ..

f) $y^2\left(a^2+b^2\right)+16x^4\left(-a^2-b^2\right)$ ..

Calcul 3.6 — On passe au niveau supérieur.

Factoriser sur $\mathbb{R}$ les expressions polynomiales suivantes dont les variables représentent des nombres réels.

a) x^4-1 .....

b) $\left(-9x^2+24\right)\left(8x^2+8\right)+64x^4-64$ .....

c) x^4+x^2+1 .....

d) $(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$ .....

e) $(ap+bq+cr+ds)^2+(aq-bp-cs+dr)^2+(ar+bs-cp-dq)^2+(as-br+cq-dp)^2$.

Réponses mélangées

$1+2x+3x^2+2x^3+x^4$ $\quad$ $\left(a^2+b^2\right)\left(y-4x^2\right)\left(y+4x^2\right)$ $\quad$ $(x+1)(x+2)$

$2+x^3-x^4-x^5$ $\quad$ $x^5-x^3-x^2+1$ $\quad$ $\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)$

$2\left(x+\dfrac{3-\sqrt{233}}{4}\right)\left(x+\dfrac{3+\sqrt{233}}{4}\right)$ $\quad$ $2(3x-4)(10x+3)$ $\quad$ $1+x^4$ $\quad$ $(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)$

$\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)\left(p^2+q^2+r^2+s^2\right)$ $\quad$ $(x+y-z)(x+y+z)$ $\quad$ $4(5x+4)(-5x+1)$

$-1-3x-3x^2+x^3$ $\quad$ x^4+x^2+1 $\quad$ $3(14x+3y)(-4x+y)$ $\quad$ $(x+1)(y+1)$

$x^5-2x^4+x^3-x^2+2x-1$ $\quad$ $(x-1)^2$ $\quad$ $(x+y)(x+1)^2$ $\quad$ $-6(6x+7)$

$8x^3-6x^2+\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{8}$ $\quad$ $-5(x-1)\left(x-\dfrac{1}{5}\right)$ $\quad$ $\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)$ $\quad$ $(x-1)(y-1)$ $\quad$ $(x+2)^2$

$-2+12x-17x^2+8x^3-3x^4$ $\quad$ $x^5+2x^4+x^3-x^2-2x-1$ $\quad$ $x^5-x^3+x^2-1$ $\quad$ $-28+21x$

$-8\left(x^2+1\right)(x-4)(x+4)$ $\quad$ $3\left(x+\dfrac{7-\sqrt{37}}{6}\right)\left(x+\dfrac{7+\sqrt{37}}{6}\right)$ $\quad$ $-8(x+1)(x+16)$

Fiche de calcul n° 4

Racines carrées

Prérequis
Racines carrées. Méthode de la quantité conjuguée.

Premiers calculs

Calcul 4.1 — Définition de la racine carrée.

Exprimer sans racine carrée les expressions suivantes.

a) $\sqrt{(-5)^2}$ .....

b) $\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}$ .....

c) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$ .....

d) $\sqrt{(2-\sqrt{7})^2}$ .....

e) $\sqrt{(3-\pi)^2}$ .....

f) $\sqrt{(3-a)^2}$ .....

Calcul 4.2 — Transformation d'écriture.

Écrire aussi simplement que possible les expressions suivantes.

a) $(2\sqrt{5})^2$ .....

b) $(2+\sqrt{5})^2$ .....

c) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ .....

d) $\sqrt{11+6\sqrt{2}}$ .....

e) $(3+\sqrt{7})^2-(3-\sqrt{7})^2$ .....

f) $\left(\sqrt{2\sqrt{3}}\right)^4$ .....

g) $\left(\dfrac{5-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2$ .....

h) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2+(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$ .....

Avec la méthode de la quantité conjuguée

Calcul 4.3

Rendre rationnels les dénominateurs des expressions suivantes.

a) $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}$ .....

b) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ .....

c) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ .....

d) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ .....

e) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ .....

f) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$ .....

g) $\dfrac{5+2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{5-2\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ .....

h) $\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}\right)^2$ .....

Calcul 4.4

Exprimer la quantité suivante sans racine carrée au dénominateur.

$\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ .....

Calculs variés

Calcul 4.5 — Avec une variable.

On considère la fonction f qui à $x > 1$ associe $f(x) = \sqrt{x-1}$.

Pour tout $x > 1$, calculer et simplifier les expressions suivantes.

a) $f(x) + \dfrac{1}{f(x)}$ .....

b) $\dfrac{f(x+2) - f(x)}{f(x+2) + f(x)}$ .....

c) $\sqrt{x + 2f(x)}$ .....

d) $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ .....

e) $f(x) + 4f''(x)$ .....

f) $\dfrac{f(x)}{f''(x)}$ .....

Calcul 4.6 — Mettre au carré.

Élever les quantités suivantes au carré pour en donner une expression simplifiée.

a) $\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}$ .....

b) $\sqrt{3-2\sqrt{2}} + \sqrt{3+2\sqrt{2}}$ .....

Calcul 4.7 — Méli-mélo.

Donner une écriture simplifiée des réels suivants.

a) $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}$ .....

b) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ .....

c) $\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}$ .....

d) $3\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\ln 3}$ .....

e) $2\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}}$ .....

f) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ .....

Calcul 4.8

Simplifier $\sqrt[3]{3+\sqrt{9+\dfrac{125}{27}}} - \sqrt[3]{-3+\sqrt{9+\dfrac{125}{27}}}$.

On commencera par exprimer A^3 en fonction de A. .....

Réponses mélangées

$12\sqrt{7}$ $\quad -4(x-1)^2$ $\quad -(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ $\quad 9-\dfrac{10}{3}\sqrt{2}$ $\quad 20$ $\quad -\dfrac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}$

$\sqrt{2}$ $\quad 1+\sqrt{5}$ $\quad 2\sqrt{2}$ $\quad \dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$ $\quad |3-a|$ $\quad 50-25\sqrt{3}$ $\quad 1+\sqrt{x-1}$

$\sqrt{3}-1$ $\quad 3+\sqrt{2}$ $\quad 1+\sqrt{2}$ $\quad 2-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}\sqrt{6}$ $\quad 5$ $\quad \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x-1}$

$\dfrac{x(x-2)}{(x-1)\sqrt{x-1}}$ $\quad \sqrt{3}$ $\quad \sqrt{15}+\sqrt{10}-\sqrt{6}-2$ $\quad 1$ $\quad 2\sqrt{2}$ $\quad 9+4\sqrt{5}$

$\ln(1+\sqrt{2})$ $\quad 1+\sqrt{3}$ $\quad -\sqrt{3}+2$ $\quad \pi-3$ $\quad 12$ $\quad \sqrt{7}-2$ $\quad 3-2\sqrt{2}$

$1+\sqrt{2}$ $\quad -11+5\sqrt{5}$ $\quad x-\sqrt{x^2-1}$ $\quad 10$ $\quad \dfrac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}$ $\quad 1-\sqrt{10}+\sqrt{15}$

Expressions algébriques

Prérequis
Identités remarquables.

Équations polynomiales

Calcul 5.1 — Cubique.

Soit a un nombre réel tel que $a^3 - a^2 + 1 = 0$.
Exprimer les quantités suivantes sous la forme $xa^2 + ya + z$ où x, y, z sont trois nombres rationnels.

a) $(a+2)^3$ .....

b) $a^5 - a^6$ .....

c) a^{12} .....

d) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a^2}$ .....

Calcul 5.2 — Introduction aux nombres complexes.

Soit i un nombre tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.
Exprimer les quantités suivantes sous la forme $x + \mathrm{i}y$ où x, y sont deux réels.

a) $(3+\mathrm{i})^2$ .....

b) $(3-\mathrm{i})^2$ .....

c) $(3-\mathrm{i})^3$ .....

d) $(3-2\mathrm{i})^3$ .....

Calcul 5.3

Même exercice.

a) $(4-5\mathrm{i})(6+3\mathrm{i})$ .....

b) $(2+3\mathrm{i})^3(2-3\mathrm{i})^3$ .....

c) $\left(-4+\mathrm{i}\sqrt{5}\right)^3$ .....

d) $\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$ .....

Calcul 5.4 — Puissance cinquième.

Soit a un nombre distinct de 1 tel que $a^5 = 1$. Calculer les nombres suivants :

a) $a^7 - 3a^6 + 4a^5 - a^2 + 3a - 1$ .....

b) $a^{1234} \times a^{2341} \times a^{3412} \times a^{4123}$ .....

c) $\displaystyle\prod_{k=0}^{1234} a^k$ .....

d) $1 + a + a^2 + a^3 + a^4$ .....

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{99} a^k$ .....

f) $\displaystyle\prod_{k=0}^{4} (2 - a^k)$ .....

Expressions symétriques

Calcul 5.5 — Inverse.

Soit x un réel non nul. On pose $a = x - \dfrac{1}{x}$. Exprimer les quantités suivantes en fonction de a uniquement.

a) $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ .... $\boxed{}$ b) $x^3 - \dfrac{1}{x^3}$ .... $\boxed{}$ c) $x^4 + \dfrac{1}{x^4}$ .... $\boxed{}$

Calcul 5.6 — Trois variables.

Soient x, y, z trois nombres deux à deux distincts. On pose

$$a = x + y + z, \qquad b = xy + yz + zx \qquad \text{et} \qquad c = xyz.$$

Exprimer les quantités suivantes en fonction de a, b, c uniquement.

a) $x^2 + y^2 + z^2$ ..... $\boxed{}$

b) $x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y)$ ..... $\boxed{}$

c) $x^3 + y^3 + z^3$ ..... $\boxed{}$

d) $(x+y)(y+z)(z+x)$ ..... $\boxed{}$

e) $x^2yz + y^2zx + z^2xy$ ..... $\boxed{}$

f) $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$ ..... $\boxed{}$

Calcul 5.7

Même exercice.

a) $x^3(y+z) + y^3(z+x) + z^3(x+y)$ ..... $\boxed{}$

b) $x^4 + y^4 + z^4$ ..... $\boxed{}$

c) $\dfrac{x}{(x-y)(x-z)} + \dfrac{y}{(y-z)(y-x)} + \dfrac{z}{(z-x)(z-y)}$ ..... $\boxed{}$

d) $\dfrac{x^2}{(x-y)(x-z)} + \dfrac{y^2}{(y-z)(y-x)} + \dfrac{z^2}{(z-x)(z-y)}$ ..... $\boxed{}$

e) $\dfrac{x^3}{(x-y)(x-z)} + \dfrac{y^3}{(y-z)(y-x)} + \dfrac{z^3}{(z-x)(z-y)}$ ..... $\boxed{}$

Réponses mélangées

$-4 + 43\mathrm{i}\sqrt{5}$ $\quad a^4 + 4a^2 + 2$ $\quad ab - c$ $\quad -1$ $\quad -9 - 46\mathrm{i}$ $\quad a^3 + 3a$ $\quad 7a^2 + 12a + 7$

$39 - 18\mathrm{i}$ $\quad 18 - 26\mathrm{i}$ $\quad 8 - 6\mathrm{i}$ $\quad a^4 - 4a^2b + 4ac + 2b^2$ $\quad a^2 + 2$ $\quad 3$ $\quad 1$

$8 + 6\mathrm{i}$ $\quad ac$ $\quad 1$ $\quad 0$ $\quad 31$ $\quad a$ $\quad a^2 - a - 1$ $\quad 1$ $\quad 2197$ $\quad a^2b - ac - 2b^2$

$-a^2 + 1$ $\quad -2ac + b^2$ $\quad ab - 3c$ $\quad 0$ $\quad a^2 - 2b$ $\quad 4a^2 - a - 3$ $\quad 1$ $\quad a^3 - 3ab + 3c$

Équations du second degré

Prérequis
Relations entre coefficients et racines.

Dans cette fiche :

- tous les trinômes considérés sont réels ;
- on ne s'intéresse qu'à leurs éventuelles **racines réelles** ;
- tous les paramètres sont choisis de telle sorte que l'équation considérée soit bien de degré 2.

Les formules donnant explicitement les racines d'une équation du second degré en fonction du discriminant **ne servent nulle part** dans cette fiche d'exercices !

Recherche de racines

Calcul 6.1 — Des racines vraiment évidentes.

Résoudre mentalement les équations suivantes. *Les racines évidentes sont à chercher parmi* $0, 1, -1, 2, -2$ *ainsi éventuellement que* 3 *et* -3.

a) $x^2 - 6x + 9 = 0$ .....

b) $9x^2 + 6x + 1 = 0$ .....

c) $x^2 + 4x - 12 = 0$ .....

d) $x^2 - 5x + 6 = 0$ .....

e) $x^2 - 5x = 0$ .....

f) $2x^2 + 3x = 0$ .....

g) $2x^2 + 3 = 0$ .....

h) $x^2 + 4x - 5 = 0$ .....

i) $3x^2 - 11x + 8 = 0$ .....

j) $5x^2 + 24x + 19 = 0$ .....

Calcul 6.2 — Somme et produit.

Résoudre mentalement les équations suivantes.

a) $x^2 - 13x + 42 = 0$ .....

b) $x^2 + 8x + 15 = 0$ .....

c) $x^2 + 18x + 77 = 0$ .....

d) $x^2 - 8x - 33 = 0$ .....

e) $x^2 - (a + b)x + ab = 0$ .....

f) $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$ .....

Calcul 6.3 — L'une grâce à l'autre.

Calculer la seconde racine des équations suivantes.

a) $3x^2 - 14x + 8 = 0$ sachant que $x = 4$ est racine .....

b) $7x^2 + 23x + 6 = 0$ sachant que $x = -3$ est racine .....

c) $mx^2 + (2m + 1)x + 2 = 0$ sachant que $x = -2$ est racine .....

d) $(m + 3)x^2 - (m^2 + 5m)x + 2m^2 = 0$ sachant que $x = m$ est racine .....

Calcul 6.4 — Racine évidente.

Trouver une racine des équations suivantes et calculer l'autre en utilisant les relations entre les coefficients du trinôme et ses racines.

Seuls les deux derniers calculs ne se font pas de tête.

a) $(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0$ .....

b) $a(b-c)x^2+b(c-a)x+c(a-b)=0$ .....

c) $(x+a)(x+b)=(m+a)(m+b)$ .....

d) $(b-c)x^2+(c-a)mx+(a-b)m^2=0$ .....

e) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{b}{x}=\dfrac{m}{a}+\dfrac{b}{m}$ .....

f) $\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-b}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ .....

Recherche d'équations

Calcul 6.5 — À la recherche de l'équation.

En utilisant la somme et le produit des racines d'une équation du second degré, former l'équation du second degré admettant comme racines les nombres suivants.

a) 9 et 13 .....

b) -11 et 17 .....

c) $2+\sqrt{3}$ et $2-\sqrt{3}$ .....

d) $m+\sqrt{m^2-3}$ et $m-\sqrt{m^2-3}$ .....

e) $m+3$ et $\dfrac{2m-5}{2}$ .....

f) $\dfrac{m+1}{m}$ et $\dfrac{m-2}{m}$ .....

Calcul 6.6 — Avec le discriminant.

Déterminer la valeur à donner à m pour que les équations suivantes admettent une racine double, et préciser la valeur de la racine dans ce cas.

a) $x^2-(2m+3)x+m^2=0$ .....

b) $(m+2)x^2-2(m-1)x+4=0$ .....

c) $(m+3)x^2+2(3m+1)x+(m+3)=0$ .....

Factorisations et signe

Calcul 6.7 — Factorisation à vue.

Déterminer de tête les valeurs des paramètres a et b pour que les égalités suivantes soient vraies pour tout x.

a) $2x^2 + 7x + 6 = (x+2)(ax+b)$ .....

b) $-4x^2 + 4x - 1 = (2x-1)(ax+b)$ .....

c) $-3x^2 + 14x - 15 = (x-3)(ax+b)$ .....

d) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{11}{2}x - 40 = (x-5)(ax+b)$ .....

e) $x^2 + 2\sqrt{7}x - 21 = (x-\sqrt{7})(ax+b)$ .....

Calcul 6.8 — Signe d'un trinôme.

Déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles les expressions suivantes sont positives ou nulles.

a) $x^2 - (\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2}$ .....

b) $-x^2 + 2x + 15$ .....

c) $(x+1)(3x-2)$ .....

d) $\dfrac{x-4}{2x+1}$ .....

Réponses mélangées

$2/3$ $\quad$ m donc ab/m $\quad$ m donc $-(m+a+b)$ $\quad$ $a=-3$ et $b=5$ $\quad$ $-7,-11$

$x^2 - 22x + 117 = 0$ $\quad$ $]-\infty,-1] \cup [2/3,+\infty[$ $\quad$ 0, donc 5 $\quad$ $m=1$ et $x=-1$ ou $m=-1$ et $x=1$

$[-3,5]$ $\quad$ m donc $m(a-b)/(b-c)$ $\quad$ $a=1/2$ et $b=8$ $\quad$ $-3,11$ $\quad$ 1 donc $c(a-b)/(a(b-c))$

a,b $\quad$ $]-\infty,1] \cup [\sqrt{2},+\infty[$ $\quad$ $-1/m$ $\quad$ $a+b$ puis $2ab/(a+b)$. $\quad$ 1 donc -5

$6,7$ $\quad$ 1 donc $(a-b)/(b-c)$ $\quad$ $]-\infty,-1/2[\cup [4,+\infty[$ $\quad$ $2m/(m+3)$

$-2/7$ $\quad$ $a=1$ et $b=3\sqrt{7}$ $\quad$ $m^2x^2 + (m-2m^2)x + (m^2-m-2) = 0$

$a=-2$ et $b=1$ $\quad$ $2,3$ $\quad$ $a-b, a+b$ $\quad$ $3,3$ $\quad$ $a=2$ et $b=3$ $\quad$ 1 donc $8/3$

$\varnothing$ $\quad$ $m=-3/4$ et $x=3/4$ $\quad$ $-3,-5$ $\quad$ $2x^2 - (4m+1)x + (2m^2+m-15) = 0$

-1 donc $-19/5$ $\quad$ $x^2 - 4x + 1 = 0$ $\quad$ $-1/3,-1/3$ $\quad$ $x^2 - 2mx + 3 = 0$

0, donc $-3/2$ $\quad$ $x^2 - 6x - 187 = 0$ $\quad$ $2,-6$ $\quad$ $m=-1$ et $x=-2$, ou $m=7$ et $x=2/3$

Fiche de calcul n° 7

Exponentielle et logarithme

Prérequis
Exponentielle, logarithme.

Logarithmes

Calcul 7.1

Calculer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$, $\ln 3$ et $\ln 5$.

a) $\ln 16$ .....

b) $\ln 512$ .....

c) $\ln 0{,}125$ .....

d) $\frac{1}{8}\ln\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\ln\frac{1}{8}$ .....

e) $\ln 72 - 2\ln 3$ .....

f) $\ln 36$ .....

Calcul 7.2

Calculer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$, $\ln 3$ et $\ln 5$.

a) $\ln\frac{1}{12}$ .....

b) $\ln(2{,}25)$ .....

c) $\ln 21 + 2\ln 14 - 3\ln(0{,}875)$ .....

d) $\ln 500$ .....

e) $\ln\frac{16}{25}$ .....

f) $\ln(6{,}25)$ .....

Calcul 7.3

Calculer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$, $\ln 3$ et $\ln 5$.

$\ln\frac{1}{2} + \ln\frac{2}{3} + \cdots + \ln\frac{98}{99} + \ln\frac{99}{100}$ .....

Calcul 7.4 — Logarithme et radicaux.

a) On pose $\alpha = \frac{7}{16}\ln(3+2\sqrt{2}) - 4\ln(\sqrt{2}+1)$. Calculer $(1+\sqrt{2})^2$ et $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$.

En déduire une écriture simplifiée de α en fonction de $\ln(\sqrt{2}-1)$.....

b) Calculer β sachant que $\ln\beta = \ln(7+5\sqrt{2}) + 8\ln(\sqrt{2}+1) + 7\ln(\sqrt{2}-1)$ .....

c) Simplifier $\gamma = \ln\left((2+\sqrt{3})^{20}\right) + \ln\left((2-\sqrt{3})^{20}\right)$ .....

d) Simplifier $\delta = \ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$. .....

Exponentielles

Calcul 7.5

Écrire les nombres suivants le plus simplement possible.

a) $\mathrm{e}^{3\ln 2}$ .....

b) $\ln(\sqrt{e})$ .....

c) $\ln(\mathrm{e}^{\frac{1}{3}})$ .....

d) $\mathrm{e}^{-2\ln 3}$ .....

e) $\ln(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}})$ .....

f) $\mathrm{e}^{\ln 3-\ln 2}$ .....

Calcul 7.6

Écrire les nombres suivants le plus simplement possible.

a) $-\mathrm{e}^{-\ln\frac{1}{2}}$ .....

b) $\mathrm{e}^{-\ln\ln 2}$ .....

c) $\ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^{17}}\right)$ .....

d) $\ln(\sqrt{\mathrm{e}^4})-\ln(\sqrt{\mathrm{e}^2})$ .....

e) $\ln\left(\sqrt{\exp(-\ln \mathrm{e}^2)}\right)$ .....

f) $\exp\left(-\dfrac{1}{3}\ln(\mathrm{e}^{-3})\right)$ .....

Études de fonctions

Calcul 7.7 — Parité.

Étudier la parité des fonctions suivantes.

a) $f_1 : x \longmapsto \ln\dfrac{2021+x}{2021-x}$ .....

b) $f_2 : x \longmapsto \ln(x+\sqrt{x^2+1})$ .....

c) $f_3 : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}$ .....

d) $f_4 : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}$ .....

Calcul 7.8 — Étude d'une fonction.

Soit $f : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}$.

a) Préciser l'ensemble de définition de cette fonction. .....

b) Montrer que pour tous réels a et b on a $f(a+b)=\dfrac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$. .....

c) Déterminer la limite de f en $+\infty$. .....

d) Déterminer la limite de f en $-\infty$. .....

Calcul 7.9

On considère l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln(1+x). \end{cases}$$

Calculer et simplifier les expressions suivantes pour tout $x \in \mathbb{R}$ pour lequel elles sont définies.

a) $f(2\mathrm{e}^x - 1)$ .....

b) $\mathrm{e}^{x - \frac{1}{2} f(x)}$ .....

c) $\dfrac{1}{2} f(x^2 - 2x)$ .....

d) $xf'(x) - 1$ .....

e) $\mathrm{e}^{\frac{f(x)}{f'(x-1)}}$ .....

Équations, inéquations

Calcul 7.10

Résoudre les équations et inéquations suivantes (d'inconnue x).

a) $\mathrm{e}^{3x-5} \geqslant 12$ .....

b) $1 \leqslant \mathrm{e}^{-x^2+x}$ .....

c) $\mathrm{e}^{1+\ln x} \geqslant 2$ .....

d) $\mathrm{e}^{-6x} \leqslant \sqrt{\mathrm{e}}$ .....

e) $\ln(-x-5) = \ln(x-61) - \ln(x+7)$ .....

f) $\ln(-x-5) = \ln \dfrac{x-61}{x+7}$ .....

Réponses mélangées

$\dfrac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1+x}}$ $\quad \dfrac{1}{2}\ln 2$ $\quad -1$ $\quad -3\ln 2$ $\quad 8$ $\quad 2\ln 5 - 2\ln 2$ $\quad x \geqslant \dfrac{\ln 12 + 5}{3}$

$3\ln 5 + 2\ln 2$ $\quad 2\ln 3 - 2\ln 2$ $\quad$ impaire $\quad x \geqslant \dfrac{2}{e}$ $\quad -2\ln 5 + 4\ln 2$ $\quad \mathbb{R}$ $\quad \dfrac{3}{2}$

$\ln 3 + 11\ln 2$ $\quad 1$ $\quad x + \ln 2$ $\quad \dfrac{-13-\sqrt{273}}{2}$ $\quad$ impaire $\quad$ -1 $\quad 0$ $\quad x \geqslant -\dfrac{1}{12}$

$9\ln 2$ $\quad \dfrac{25}{8}\ln(\sqrt{2}-1)$ $\quad \dfrac{1}{2}$ $\quad -\dfrac{1}{1+x}$ $\quad 3\ln 2$ $\quad -17$ $\quad \mathrm{e}^{x\ln(1+x)}$ $\quad 2\ln 2 + 2\ln 3$

$\dfrac{1}{9}$ $\quad -2$ $\quad -\ln 3 - 2\ln 2$ $\quad 4\ln 2$ $\quad x \in [0,1]$ $\quad$ impaire $\quad$ impaire $\quad e$ $\quad \varnothing$

$\ln|x-1|$ $\quad \dfrac{1}{3}$ $\quad \dfrac{1}{\ln 2}$ $\quad 0$ $\quad$ ok $\quad 17 + 12\sqrt{2}$ $\quad -\dfrac{1}{2}$ $\quad -2\ln 2 - 2\ln 5$ $\quad 1$

Fiche de calcul n° 8

Trigonométrie

Prérequis
Relation $\cos^2 + \sin^2 = 1$. Symétrie et périodicité de sin et cos.
Formules d'addition et de duplication. Fonction tangente.

Dans toute cette fiche, x désigne une quantité réelle.

Valeurs remarquables de cosinus et sinus

Calcul 8.1

Simplifier :

a) $\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{3\pi}{4} + \cos\frac{5\pi}{4} + \cos\frac{7\pi}{4}$.

b) $\sin\frac{5\pi}{6} + \sin\frac{7\pi}{6}$ .....

c) $\tan\frac{2\pi}{3} + \tan\frac{3\pi}{4} + \tan\frac{5\pi}{6} + \tan\frac{7\pi}{6}$

d) $\cos^2\frac{4\pi}{3} - \sin^2\frac{4\pi}{3}$ .....

Propriétés remarquables de cosinus et sinus

Calcul 8.2

Simplifier :

a) $\sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ .....

b) $\sin(-x) + \cos(\pi + x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

c) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ .....

d) $\cos(x - \pi) + \sin\left(-\frac{\pi}{2} - x\right)$ .....

Formules d'addition

Calcul 8.3

Calculer les quantités suivantes.

a) $\cos\frac{5\pi}{12}$ (on a $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$) .....

b) $\cos\frac{\pi}{12}$ .....

c) $\sin\frac{\pi}{12}$ .....

d) $\tan\frac{\pi}{12}$ .....

Calcul 8.4

a) Simplifier : $\sin(4x)\cos(5x) - \sin(5x)\cos(4x)$ .....

b) Simplifier : $\frac{\sin 2x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\cos x}$ (pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$) .....

c) Simplifier : $\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)$ .....

d) Expliciter $\cos(3x)$ en fonction de $\cos x$ .....

Formules de duplication

Calcul 8.5

En remarquant qu'on a $\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$, calculer :

a) $\cos \frac{\pi}{8}$ .....

b) $\sin \frac{\pi}{8}$ .....

Calcul 8.6

a) Simplifier : $\frac{1-\cos(2x)}{\sin(2x)}$ (avec $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$) .....

b) Simplifier : $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x}$ (pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$) .....

c) Expliciter $\cos(4x)$ en fonction de $\cos x$ .....

Équations trigonométriques

Calcul 8.7

Résoudre dans $[0, 2\pi]$, dans $[-\pi, \pi]$, puis dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\cos x = \frac{1}{2}$ .....

b) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .....

c) $\sin x = \cos \frac{2\pi}{3}$ .....

d) $\tan x = -1$ .....

e) $\cos^2 x = \frac{1}{2}$ .....

f) $|\tan x| = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .....

g) $\cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .....

h) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

i) $\cos x = \cos \frac{\pi}{7}$ .....

j) $\sin x = \cos \frac{\pi}{7}$ .....

Inéquations trigonométriques

Calcul 8.8

Résoudre dans $[0, 2\pi]$, puis dans $[-\pi, \pi]$, les inéquations suivantes :

a) $\cos x \geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .....

b) $\cos x \leqslant \cos \frac{\pi}{3}$ .....

c) $\sin x \leqslant \frac{1}{2}$ .....

d) $|\sin x| \leqslant \frac{1}{2}$ .....

e) $\tan x \geqslant 1$ .....

f) $|\tan x| \geqslant 1$ .....

g) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geqslant 0$ .....

h) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \geqslant 0$ .....

Réponses mélangées

$\left[-\pi, -\frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$ $\quad \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ $\quad \left\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$ $\quad \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

$\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \frac{7\pi}{4}\right\}$ $\quad -1-\sqrt{3}$ $\quad 2\cos x$ $\quad \frac{1}{\cos x}$ $\quad \left[-\pi, -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$

$\left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ $\quad \left\{\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$ $\quad \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right]$

$\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ $\quad \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$ $\quad 0$ $\quad \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ $\quad \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

$\left\{\frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{11\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ $\quad \left\{\frac{5\pi}{14} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{9\pi}{14} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

$-\sin x$ $\quad \left[0, \frac{3\pi}{8}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}\right] \cup \left[\frac{15\pi}{8}, 2\pi\right]$ $\quad \left[-\pi, -\frac{5\pi}{8}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{8}, \pi\right]$

$\left\{\frac{\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}\right\}$ $\quad -\sin x$ $\quad \left\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}\right\}$ $\quad \left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ $\quad \left\{\frac{5\pi}{14}, \frac{9\pi}{14}\right\}$

$\left\{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ $\quad \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ $\quad \left\{\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ $\quad \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, 2\pi\right]$

$8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$ $\quad \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right\}$ $\quad \left[0, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$ $\quad 4\cos^3 x - 3\cos x$

$\left\{-\frac{11\pi}{12}, -\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}\right\}$ $\quad \left\{\frac{-2\pi}{3}, \frac{-\pi}{3}\right\}$ $\quad -2\cos x$ $\quad \left\{\frac{5\pi}{14}, \frac{9\pi}{14}\right\}$ $\quad \left\{-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$

$\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$ $\quad \left\{-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right\}$ $\quad \left\{\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{11\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

$\left\{\frac{\pi}{7} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{7} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ $\quad \left[0, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$ $\quad 2$ $\quad \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[$

$\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$ $\quad \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ $\quad 0$ $\quad \left\{\frac{\pi}{7}, \frac{13\pi}{7}\right\}$ $\quad \left\{-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right\}$ $\quad \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ $\quad -\frac{1}{2}$

$\left[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ $\quad \left\{\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$ $\quad \left[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$ $\quad \tan x$

$\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$ $\quad \left[-\pi, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$ $\quad \left\{-\frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{7}\right\}$ $\quad \left\{\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ $\quad 0$ $\quad 0$ $\quad \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ $\quad \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right]$

Dérivation

Prérequis
Dérivées des fonctions usuelles. Formules de dérivation.

Application des formules usuelles

Calcul 9.1 — Avec des produits.

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 + 3x + 2)(2x - 5)$. .....

b) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^3 + 3x + 2)(x^2 - 5)$. .....

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 - 2x + 6)\exp(2x)$. .....

d) $x \in]2, +\infty[$ et $f(x) = (3x^2 - x)\ln(x - 2)$ .....

Calcul 9.2 — Avec des puissances.

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 - 5x)^5$. .....

b) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (2x^3 + 4x - 1)^2$. .....

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (\sin(x) + 2\cos(x))^2$. .....

d) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (3\cos(x) - \sin(x))^3$. .....

Calcul 9.3 — Avec des fonctions composées.

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \ln(x^2 + 1)$. .....

b) $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \ln(\ln(x))$. .....

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (2 - x)\exp(x^2 + x)$. .....

d) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \exp(3\sin(2x))$. .....

Calcul 9.4 — Avec des fonctions composées — *bis.*

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \sin\left(\dfrac{2x^2-1}{x^2+1}\right)$. .....

b) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \cos\left(\dfrac{2x+1}{x^2+4}\right)$. .....

c) $x \in]0, \pi[$ et $f(x) = \sqrt{\sin(x)}$. .....

d) $x \in]0, +\infty[$ et $f(x) = \sin\left(\sqrt{x}\right)$. .....

Calcul 9.5 — Avec des quotients.

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \dfrac{x^2+3x}{2\sin(x)+3}$. .....

b) $x \in]0, +\infty[$ et $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{3x+2}$. .....

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \dfrac{\cos(2x+1)}{x^2+1}$. .....

d) $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \dfrac{2x^2+3x}{\ln(x)}$. .....

Opérations et fonctions composées

Calcul 9.6

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}^*$ et $f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$. .....

b) $x \in]-3, 3[$ et $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{9-x^2}}$. .....

c) $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \ln\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}\right)$ .....

d) $x \in]0, \pi[$ et $f(x) = \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$. .....

Dériver pour étudier une fonction

Calcul 9.7

Calculer $f'(x)$ et écrire le résultat sous forme factorisée.

a) $x \in \mathbb{R} \setminus 3, -2$ et $f(x) = \dfrac{1}{3-x} + \dfrac{1}{2+x}$. .....

b) $x \in]-1, +\infty[$ et $f(x) = x^2 - \ln(x+1)$ .....

c) $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \ln(x^2+x-2) - \dfrac{x+2}{x-1}$. .....

d) $x \in]-1, +\infty[$ et $f(x) = \dfrac{x}{x+1} + x - 2\ln(x+1)$. .....

e) $x \in]0, e[\cup]e, +\infty[$ et $f(x) = \dfrac{1+\ln(x)}{1-\ln(x)}$. .....

Réponses mélangées

$\dfrac{2x^2+2x+5}{(x+2)(x-1)^2}$ $\quad \dfrac{1}{x\ln(x)}$ $\quad \dfrac{2}{x(1-\ln(x))^2}$ $\quad \dfrac{2-3x}{2\sqrt{x}(3x+2)^2}$

$(6x-1)\ln(x-2) + \dfrac{3x^2-x}{x-2}$ $\quad \dfrac{9}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}}$ $\quad \dfrac{2x^2+2x-8}{(x^2+4)^2}\sin\left(\dfrac{2x+1}{x^2+4}\right)$ $\quad \dfrac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}}$

$\dfrac{x\cos(x)-\sin(x)}{x\sin(x)}$ $\quad -3(3\cos(x)-\sin(x))^2(3\sin(x)+\cos(x))$ $\quad 5x^4-6x^2+4x-15$

$6\cos(2x)\exp(3\sin(2x))$ $\quad \dfrac{(2x+3)(2\sin(x)+3)-(x^2+3x)\times 2\cos(x)}{(2\sin(x)+3)^2}$ $\quad 5(x^2-5x)^4(2x-5)$

$-2\dfrac{(x^2+1)\sin(2x+1)+x\cos(2x+1)}{(x^2+1)^2}$ $\quad \dfrac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$ $\quad \dfrac{6x}{(x^2+1)^2}\cos\left(\dfrac{2x^2-1}{x^2+1}\right)$ $\quad \dfrac{x^2}{(x+1)^2}$

$\dfrac{(4x+3)\ln(x)-2x-3}{(\ln(x))^2}$ $\quad \dfrac{2}{x+1}\left(x+\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$ $\quad \dfrac{10x-5}{(3-x)^2(2+x)^2}$

$2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ $\quad 6x^2+2x-11$ $\quad (2x^2-2x+10)\exp(2x)$ $\quad 8\cos^2(x)-6\cos(x)\sin(x)-4$

$4(2x^3+4x-1)(3x^2+2)$ $\quad \dfrac{2x}{x^2+1}$ $\quad (-2x^2+3x+1)\exp(x^2+x)$ $\quad \dfrac{1}{1-x^2}$

Fiche de calcul n° 10

Primitives

Prérequis
Intégration de Terminale. Dérivée d'une fonction composée.
Trigonométrie directe et réciproque. Trigonométrie hyperbolique.

Pour chaque fonction à intégrer on pourra commencer par chercher les domaines où elle admet des primitives.

Calculs directs

Calcul 10.1

Déterminer directement une primitive des expressions suivantes.

a) $\dfrac{1}{t+1}$ .....

b) $\dfrac{3}{(t+2)^2}$ .....

c) $\dfrac{3}{(t+2)^3}$ .....

d) $\sin(4t)$ .....

Calcul 10.2

Même exercice.

a) $\sqrt{1+t} - \sqrt[3]{t}$ .....

b) e^{2t+1} .....

Utilisation des formulaires

Calcul 10.3 — Dérivée d'une fonction composée.

Déterminer une primitive des expressions suivantes en reconnaissant la dérivée d'une fonction composée.

a) $\dfrac{2t^2}{1+t^3}$ .....

b) $t\sqrt{1+2t^2}$ .....

c) $\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ .....

d) $\dfrac{7t}{\sqrt[3]{1+7t^2}}$ .....

e) $\dfrac{t}{1+3t^2}$ .....

f) $\dfrac{12t}{(1+3t^2)^3}$ .....

Calcul 10.4 — Dérivée d'une fonction composée – *bis.*

Même exercice.

a) $\dfrac{\ln^3 t}{t}$ .....

b) $\dfrac{1}{t\sqrt{\ln t}}$ .....

c) $\dfrac{8\mathrm{e}^{2t}}{(3-\mathrm{e}^{2t})^3}$ .....

d) $\dfrac{1}{t^2\sqrt{t}}$ .....

e) $\dfrac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^t}$ .....

f) $\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}}{t^2}$ .....

Calcul 10.5 — Trigonométrie.

Déterminer une primitive des expressions suivantes en reconnaissant la dérivée d'une fonction composée.

a) $\cos^2 t \sin t$ .....

b) $\cos(t)\mathrm{e}^{\sin t}$ .....

c) $\tan t$ .....

d) $\dfrac{\cos t}{1-\sin t}$ .....

e) $\dfrac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$ .....

f) $\dfrac{\cos(\pi \ln t)}{t}$ .....

g) $\tan^2 t$ .....

h) $\tan^3 t$ .....

i) $\dfrac{\tan^3 t}{\cos^2 t}$ .....

j) $\dfrac{1}{\cos^2(t)\sqrt{\tan t}}$ ...

k) $\dfrac{1+\tan^2 t}{\tan^2 t}$ .....

l) $\dfrac{\cos t}{(1-\sin t)^3}$ .....

Calcul 10.6 — Trigonométrie – *bis*.

Déterminer une primitive des expressions suivantes en utilisant d'abord le formulaire de trigonométrie.

a) $\cos^2 t$ .....

b) $\cos(t)\sin(3t)$ ....

c) $\sin^3 t$ .....

d) $\dfrac{\sin(2t)}{1+\sin^2 t}$ .....

e) $\dfrac{1}{\sin t \cos t}$ .....

f) $\dfrac{1}{\sin^2(t)\cos^2(t)}$ ...

g) $\dfrac{1}{\sin(4t)}$ .....

Calcul 10.7 — Fractions rationnelles.

Déterminer une primitive des expressions suivantes après quelques manipulations algébriques simples.

a) $\dfrac{t^2+t+1}{t^2}$ .....

b) $\dfrac{t^2+1}{t^3}$ .....

c) $\dfrac{1-t^6}{1-t^2}$ .....

d) $\dfrac{t^3+1}{t+1}$ .....

e) $\dfrac{t-1}{t+1}$ .....

f) $\dfrac{t^3}{t+1}$ .....

g) $\dfrac{t}{(t+1)^2}$ .....

Dériver puis intégrer, intégrer puis dériver

Calcul 10.8

Pour chacune des expressions suivantes :

- dériver puis factoriser l'expression ;
- intégrer l'expression.

a) t^2-2t+5 .....

b) $\dfrac{1}{t^2}+\dfrac{1}{t}$ .....

c) $\sqrt{t}-\dfrac{1}{t^3}$ .....

d) $\dfrac{1}{t^4}+\dfrac{1}{t\sqrt{t}}$ .....

e) $\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^{-3t}$ .....

f) e^{3t-2} .....

g) $\dfrac{t^2}{t^3-1}$ .....

h) $\sin(t)\cos^2(t)$ ...

i) $\dfrac{1}{t^2}\sin\dfrac{1}{t}$ .....

j) $\dfrac{\mathrm{e}^t}{2+\mathrm{e}^t}$ .....

k) $\dfrac{\sin t}{2+3\cos t}$ .....

l) $\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ .....

m) $\dfrac{\sin 2t}{1+\cos^2 t}$ .....

n) $t\mathrm{e}^{-t^2}$ .....

o) $\dfrac{1-\ln t}{t}$ .....

p) $\dfrac{1}{t\ln t}$ .....

q) $\dfrac{\sin(\ln t)}{t}$ .....

r) $\dfrac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^{2t}}$ .....

Calcul 10.9 — ***Bis repetita.***

Reprendre l'exercice précédent en commençant par intégrer puis en dérivant et factorisant.

Réponses mélangées

$\dfrac{2\mathrm{e}^t}{(2+\mathrm{e}^t)^2}$ puis $\ln(2+\mathrm{e}^t)$ $\quad -\dfrac{\mathrm{e}^t(\mathrm{e}^{2t}-1)}{(1+\mathrm{e}^{2t})^2})$ puis $\mathrm{Arctan}(\mathrm{e}^t)$ $\quad \dfrac{1}{2\sqrt{t}}+\dfrac{3}{t^4}$ puis $\dfrac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+\dfrac{1}{2t^2}$

$-\dfrac{3}{2(t+2)^2}$ $\quad \dfrac{t}{2}+\dfrac{\sin(2t)}{4}$ $\quad \dfrac{1}{2}\tan^2 t+\ln|\cos t|$ $\quad -\dfrac{\cos(4t)}{4}$ $\quad -\ln|1-\sin t|$

$\ln|\tan t|$ $\quad \mathrm{e}^{\sin t}$ $\quad -\dfrac{1}{(1+3t^2)^2}$ $\quad -2\cos\sqrt{t}$ $\quad \dfrac{1}{\pi}\sin(\pi\ln t)$ $\quad \dfrac{2}{3}\ln|1+t^3|$

$-\dfrac{4}{t^5}-\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{t^{5/2}}$ puis $-\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{t^3}-\dfrac{2}{\sqrt{t}}$ $\quad -\dfrac{2}{3t^{\frac{3}{2}}}$ $\quad \dfrac{1}{4}\ln|\tan 2t|$ $\quad \dfrac{1}{(1-t^2)^{3/2}}$ puis $-\sqrt{1-t^2}$

$\dfrac{3}{4}(1+7t^2)^{\frac{2}{3}}$ $\quad -\dfrac{\cos(4t)}{8}-\dfrac{\cos(2t)}{4}$ $\quad \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2t+1}$ $\quad -\dfrac{1}{t^2}\left(\dfrac{2}{t}+1\right)$ puis $-\dfrac{1}{t}+\ln|t|$

$\ln|1-\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^t|$ $\quad \dfrac{\ln t-2}{t^2}$ puis $\ln t-\dfrac{1}{2}\ln^2 t$ $\quad \tan t-t$ $\quad t-\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{t^3}{3}-\ln|t+1|$

$\ln|t+1|+\dfrac{1}{t+1}$ $\quad 2\dfrac{3\cos^2 t-1}{(1+\cos^2 t)^2}$ puis $-\ln(1+\cos^2(t))$ $\quad \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(1-\sin t)^2}$ $\quad -\dfrac{1}{3}\cos^3 t$

$\dfrac{1}{6}(1+2t^2)^{\frac{3}{2}}$ $\quad t+\ln t-\dfrac{1}{t}$ $\quad \ln t-\dfrac{1}{2t^2}$ $\quad \dfrac{2\cos t+3}{(2+3\cos t)^2}$ puis $-\dfrac{1}{3}\ln|2+3\cos t|$

$2\sqrt{\tan t}$ $\quad \dfrac{1}{6}\ln(1+3t^2)$ $\quad \ln|t+1|$ $\quad 2\sqrt{\ln t}$ $\quad \dfrac{1}{4}\ln^4 t$ $\quad 3\mathrm{e}^{3t-2}$ puis $\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3t-2}$

$-\dfrac{1}{\tan t}$ $\quad -\mathrm{cotan}t+\tan t$ $\quad -\dfrac{2t\sin\frac{1}{t}+\cos\frac{1}{t}}{t^4}$ puis $\cos\dfrac{1}{t}$ $\quad \dfrac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}-\dfrac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}$ $\quad -\sqrt{1-t^2}$

$-\dfrac{3}{t+2}$ $\quad t-\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{t^3}{3}$ $\quad -\cos t+\dfrac{1}{3}\cos^3 t$ $\quad \dfrac{2}{(3-\mathrm{e}^{2t})^2}$ $\quad (1-2t^2)\mathrm{e}^{-t^2}$ puis $-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}$

$t-2\ln|t+1|$ $\quad \dfrac{1}{4}\tan^4 t$ $\quad -\dfrac{t(t^3+2)}{(t-1)^2(t^2+t+1)^2}$ puis $\dfrac{1}{3}\ln(|t^3-1|)$ $\quad -\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}$ $\quad t+\dfrac{t^3}{3}+\dfrac{t^5}{5}$

$-\ln|\cos t|$ $\quad 2\mathrm{e}^{2t}-3\mathrm{e}^{-3t}$ puis $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}-\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-3t}$ $\quad \cos t(3\cos^2 t-2)$ puis $-\dfrac{1}{3}\cos^3 t$ $\quad \ln(1+\sin^2 t)$

$-\dfrac{1+\ln t}{t^2\ln^2 t}$ puis $\ln|\ln t|$ $\quad \dfrac{\cos\ln t-\sin\ln t}{t^2}$ puis $-\cos(\ln t))$ $\quad 2(t-1)$ puis $\dfrac{1}{3}t^3-t^2+5t$

Fiche de calcul n° 11

Calcul d'intégrales

Prérequis
Primitives usuelles, composées simples.

Intégrales et aires algébriques

On rappelle que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire algébrique entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses du repère lorsque les bornes sont « dans le bon ordre ».

Calcul 11.1

Sans chercher à calculer les intégrales suivantes, donner leur signe.

a) $\int_{-2}^{3} x^2 + \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

b) $\int_{5}^{-3} |\sin 7x|\,\mathrm{d}x$

c) $\int_{0}^{-1} \sin x\,\mathrm{d}x$ ...

Calcul 11.2

En se ramenant à des aires, calculer de tête les intégrales suivantes.

a) $\int_{1}^{3} 7\,\mathrm{d}x$ .....

b) $\int_{7}^{-3} -5\,\mathrm{d}x$ .....

c) $\int_{0}^{7} 3x\,\mathrm{d}x$ .....

d) $\int_{2}^{8} 1-2x\,\mathrm{d}x$ ..

e) $\int_{-2}^{2} \sin x\,\mathrm{d}x$ ....

f) $\int_{-2}^{1} |x|\,\mathrm{d}x$ .....

Calcul d'intégrales

On rappelle que si F est une primitive de f alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, que l'on note $\Big[F(x)\Big]_a^b$.

Calcul 11.3 — Polynômes.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_{-1}^{3} 2\,\mathrm{d}x$ .....

b) $\int_{1}^{3} 2x-5\,\mathrm{d}x$ .....

c) $\int_{-2}^{0} x^2+x+1\,\mathrm{d}x$ .....

d) $\int_{-1}^{1} 3x^5-5x^3\,\mathrm{d}x$ .....

e) $\int_{0}^{1} x^5-x^4\,\mathrm{d}x$ .....

f) $\int_{1}^{-1} x^{100}\,\mathrm{d}x$ .....

Calcul 11.4 — Fonctions usuelles.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sin x\,\mathrm{d}x$ ...

b) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos x\,\mathrm{d}x$ ...

c) $\int_{1}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ .....

d) $\int_{1}^{100} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ ...

e) $\int_{-3}^{2} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ .....

f) $\int_{-3}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x}$ .....

Calcul 11.5 — De la forme $f(ax+b)$.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} (2x+1)^3 \,\mathrm{d}x$ .....

b) $\displaystyle\int_{-2}^{4} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x+1} \,\mathrm{d}x$ .....

c) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\pi x+2}$ .....

d) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \sin(3x) \,\mathrm{d}x$ .....

e) $\displaystyle\int_{0}^{33} \frac{1}{\sqrt{3x+1}} \,\mathrm{d}x$ .....

f) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right) \mathrm{d}x$ .....

Calcul 11.6 — Fonctions composées.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{x-2}{x^2-4x+5} \,\mathrm{d}x$ .....

b) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x\sin(x^2+1) \,\mathrm{d}x$ .....

c) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \tan x \,\mathrm{d}x$ .....

d) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x(\cos x)^5 \,\mathrm{d}x$ .....

e) $\displaystyle\int_{0}^{1} x\mathrm{e}^{x^2-1} \,\mathrm{d}x$ .....

f) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x}{(x^2+1)^4} \,\mathrm{d}x$ .....

Calcul 11.7 — Divers.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^x+1} \,\mathrm{d}x$ .....

b) $\displaystyle\int_{-2}^{3} |x+1| \,\mathrm{d}x$ .....

c) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \max(1,\mathrm{e}^x) \,\mathrm{d}x$ .....

d) $\displaystyle\int_{1}^{\mathrm{e}} \frac{3x-2\ln x}{x} \,\mathrm{d}x$ .....

e) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\sin(x) \,\mathrm{d}x$ .....

f) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} |\cos x \sin x| \,\mathrm{d}x$ .....

Calcul 11.8 — Avec les nouvelles fonctions de référence.

a) $\displaystyle\int_{0}^{2} 10^x \,\mathrm{d}x$ .....

b) $\displaystyle\int_{0}^{1} \sqrt{x} \,\mathrm{d}x$ .....

Réponses mélangées

$-\frac{2}{101}$ $\quad \mathrm{e}^2-\mathrm{e}^{-3}$ $\quad 8$ $\quad \ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ $\quad 0$ $\quad \frac{1}{384}$ $\quad -\ln 3$ $\quad \frac{\sqrt{2}}{6}$ $\quad \frac{99}{\ln 10}$ $\quad 50$

0 $\quad 1$ $\quad \frac{1}{2}$ $\quad \frac{5}{8}$ $\quad -\frac{1}{30}$ $\quad 14$ $\quad 0$ $\quad -\frac{1}{3}$ $\quad -54$ $\quad \frac{147}{2}$ $\quad$ Positif $\quad \frac{8}{3}$

$2(\mathrm{e}^3-1)$ $\quad 78$ $\quad 3\mathrm{e}-4$ $\quad \frac{17}{2}$ $\quad \frac{1}{\pi}\ln\left(1+\frac{\pi}{2}\right)$ $\quad 0$ $\quad \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \frac{2}{3}$ $\quad \frac{7}{48}$

e^2 $\quad \frac{5}{2}$ $\quad$ Positif $\quad 0$ $\quad \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ $\quad -2$ $\quad \frac{1}{2}-\frac{1}{\mathrm{e}+1}$ $\quad 6$ $\quad 18$ $\quad$ Négatif

Nombres complexes

Prérequis
Forme algébrique et forme exponentielle.

Pour s'échauffer

Calcul 12.1 — Écriture algébrique.

Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique.

a) $(2+6\mathrm{i})(5+\mathrm{i})$ .....

b) $(3-\mathrm{i})(4+\mathrm{i})$ .....

c) $(4-3\mathrm{i})^2$ .....

d) $(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})$ .....

e) $(2-3\mathrm{i})^4$ .....

f) $\dfrac{1}{3-\mathrm{i}}$ .....

g) $\dfrac{2-3\mathrm{i}}{5+2\mathrm{i}}$ .....

h) $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ .....

Calcul 12.2 — Forme exponentielle.

Mettre les nombres complexes suivants sous forme exponentielle.

a) 12 .....

b) -8 .....

c) $\sqrt{3}\mathrm{i}$ .....

d) $-2\mathrm{i}$ .....

e) $-2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{5}}$ .....

f) $5-5\mathrm{i}$ .....

g) $-5+5\mathrm{i}\sqrt{3}$ .....

h) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ .....

Un calcul plus dur

Calcul 12.3 — Une simplification.

On pose $z=\dfrac{1+\sqrt{2}+\mathrm{i}}{1+\sqrt{2}-\mathrm{i}}$.

a) Calculer $|z|$ .....

b) Mettre z sous forme algébrique .....

c) Calculer z^{2021} .....

Réponses mélangées

$\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ $\quad 4+32\mathrm{i}$ $\quad 12$ $\quad 13-\mathrm{i}$ $\quad 8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ $\quad 5$ $\quad 7-24\mathrm{i}$ $\quad 5\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

$10\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$ $\quad \dfrac{3}{10}+\dfrac{1}{10}\mathrm{i}$ $\quad 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ $\quad \dfrac{4}{29}-\dfrac{19}{29}\mathrm{i}$ $\quad \dfrac{1}{\sqrt{2}}+\mathrm{i}\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad \dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

$2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ $\quad 2e^{\mathrm{i}\frac{8\pi}{5}}$ $\quad 1$ $\quad -119+120\mathrm{i}$ $\quad -\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\mathrm{i}\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Fiche de calcul n° 13

Trigonométrie et nombres complexes

Prérequis
Nombres complexes, trigonométrie.

Dans toute cette fiche, x désigne une quantité réelle.

Linéarisations

Calcul 13.1

Linéariser :

a) $\cos^3(x)$ .....

b) $\cos(2x)\sin^2(x)$ ....

c) $\cos^2(2x)\sin^2(x)$ ...

d) $\cos(3x)\sin^3(2x)$ ...

e) $\cos^3(2x)\cos(3x)$ ..

f) $\sin^2(4x)\sin(3x)$ ...

Arc-moitié, arc-moyen

Calcul 13.2

Écrire sous forme trigonométrique (c'est-à-dire sous la forme $re^{i\theta}$, avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$) :

a) $1 + e^{i\frac{\pi}{6}}$ .....

b) $1 + e^{i\frac{7\pi}{6}}$ .....

c) $e^{-i\frac{\pi}{6}} - 1$ .....

d) $1 + ie^{i\frac{\pi}{3}}$ .....

e) $-1 - e^{i\frac{\pi}{6}}$ .....

f) $1 - e^{i\frac{\pi}{12}}$ .....

g) $\dfrac{1 + e^{i\frac{\pi}{6}}}{1 - e^{i\frac{\pi}{12}}}$ .....

h) $\left(1 + e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{27}$ .....

Calcul 13.3

Écrire sous forme trigonométrique (c'est-à-dire sous la forme $re^{i\theta}$, avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$) :

a) $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{2}}$ .....

b) $e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{2}}$ .....

Délinéarisations

Calcul 13.4

Exprimer en fonction des puissances de $\cos(x)$ et de $\sin(x)$:

a) $\cos(3x)$ .....

b) $\sin(4x)$ .....

Factorisations

Calcul 13.5

Factoriser :

a) $\cos(x) + \cos(3x)$ .....

b) $\sin(5x) - \sin(3x)$ .....

c) $\cos(x) - \cos(3x)$ .....

d) $\sin(3x) + \sin(5x)$ .....

Calcul 13.6

Factoriser :

a) $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x)$ .....

b) $\cos(x) + \cos(3x) + \cos(5x) + \cos(7x)$ .....

c) $\cos(x) + \cos\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \dfrac{4\pi}{3}\right)$ .....

Calculs d'intégrales

Calcul 13.7

Calculer :

a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \sin(x)\,\mathrm{d}x$ .....

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{2x} \cos(x)\,\mathrm{d}x$ .....

Réponses mélangées

$2\cos(2x)\cos(x)$ $\quad \left(-2\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}$ $\quad 2\sin(4x)\cos(x)$ $\quad 2\sin(x)\sin(2x)$

$2\sin\left(\dfrac{\pi}{24}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{11\pi}{24}}$ $\quad 2\cos(4x)\sin(x)$ $\quad -\dfrac{\sin(9x)}{8} + \dfrac{3\sin(5x)}{8} - \dfrac{\sin(3x)}{8} - \dfrac{3\sin(x)}{8}$

$\dfrac{\mathrm{e}^{\pi}+1}{2}$ $\quad 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$ $\quad \dfrac{\sin(8x)}{2\sin(x)}$ $\quad -\dfrac{1}{8}\cos(6x) + \dfrac{1}{4}\cos(4x) - \dfrac{3}{8}\cos(2x) + \dfrac{1}{4}$

$\dfrac{\cos(9x)}{8} + \dfrac{3\cos(5x)}{8} + \dfrac{\cos(3x)}{8} + \dfrac{3\cos(x)}{8}$ $\quad 2^{27}\cos^{27}\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ $\quad 2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{12}}$

$2\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{12}}$ $\quad \dfrac{1}{4}\cos(3x) + \dfrac{3}{4}\cos(x)$ $\quad 4\cos^3(x)\sin(x) - 4\cos(x)\sin^3(x)$ $\quad \dfrac{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\sin(2x)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$

$2\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{12}}$ $\quad 2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}$ $\quad -\dfrac{1}{4}\cos(4x) + \dfrac{1}{2}\cos(2x) - \dfrac{1}{4}$ $\quad 2\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\frac{-7\mathrm{i}\pi}{12}}$

$\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)}\mathrm{e}^{\frac{13\mathrm{i}\pi}{24}}$ $\quad -\dfrac{1}{4}\sin(11x) + \dfrac{1}{4}\sin(5x) + \dfrac{1}{2}\sin(3x)$ $\quad 2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$ $\quad \dfrac{1}{5}(\mathrm{e}^{\pi} - 2)$ $\quad 0$

Fiche de calcul n° 14

Coefficients binomiaux

Prérequis
Factorielle. Coefficients binomiaux. Formule du binôme de Newton.

La lettre n désigne un entier naturel non nul.

Manipulations de factorielles et de coefficients binomiaux

Calcul 14.1 — Pour s'échauffer.

Donner la valeur des expressions suivantes :

a) $\dfrac{101!}{99!}$ .....

b) $\dfrac{10!}{7!}$ .....

c) $\dfrac{1}{4!} - \dfrac{1}{5!}$ .....

d) $\dbinom{6}{2}$ .....

e) $\dbinom{8}{3}$ .....

f) $4 \times \dbinom{7}{4}$ .....

Calcul 14.2 — Pour s'échauffer – *bis*.

Écrire les expressions suivantes à l'aide de factorielles, de coefficients binomiaux et, le cas échéant, à l'aide de puissances.

a) $6 \times 7 \times 8 \times 9$ .....

b) $\dfrac{6 \times 7 \times 8 \times 9}{2 \times 3 \times 4}$ .....

c) $2 \times 4 \times \cdots \times (2n)$ .....

d) $3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)$ ...

Calcul 14.3 — Avec des paramètres.

Simplifier les expressions ci-dessous. La lettre k désigne un entier naturel tel que $k < n$.

a) $\dbinom{n}{2}$ (pour $n \geqslant 2$) .....

b) $\dbinom{n}{3}$ (pour $n \geqslant 3$) .....

c) $\dfrac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}}$ .....

d) $\dfrac{(n+2)!}{n!}$ .....

e) $\dfrac{1}{n!} - \dfrac{n}{(n+1)!}$ .....

f) $\dfrac{(n+1)!}{2^{2(n+1)}} - \dfrac{n!}{2^{2n}}$ .....

Calcul 14.4 — Avec des paramètres – *bis*.

Simplifier les expressions ci-dessous. La lettre a désigne un nombre non nul.

a) $\dfrac{1}{n!} + \dfrac{1}{2n \times (n+1)!} + \dfrac{1}{2 \times (n+2)!}$ .....

b) $\dfrac{(3(n+1))!}{a^{3(n+1)} \times ((n+1)!)^3} \div \dfrac{(3n)!}{a^{3n} \times (n!)^3}$ .....

Autour du binôme de Newton

Calcul 14.5

Calculer les sommes ci-dessous à l'aide de la formule du binôme de Newton.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k}$ .....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k}$ .....

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{2n-k} \binom{n}{k}$ .....

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{k+2} \binom{n}{k} \times 3^{2n-k+1}$

Calcul 14.6

En utilisant la fonction $x \longmapsto (1+x)^n$, ses dérivées d'ordre 1 et 2 et sa primitive s'annulant en 0, calculer

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ .....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k$ .....

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k^2$ .....

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \frac{1}{k+1}$ .....

Calcul 14.7

a) Donner le coefficient de x^n dans le développement de $(1+x)^{2n}$ .....

b) En donner une autre expression en développant le produit $(1+x)^n(1+x)^n$ .....

c) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ .....

Réponses mélangées

720 $\quad 140$ $\quad 2^n \times n!$ $\quad 0$ $\quad n2^{n-1}$ $\quad \binom{2n}{n}$ $\quad \dfrac{3(3n+2)(3n+1)}{a^3(n+1)^2}$

$\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$ $\quad \dfrac{(2n+1)!}{2^n \times n!}$ $\quad \dfrac{k+1}{n-k}$ $\quad \dfrac{(n+1)^3}{n \times (n+2)!}$ $\quad \dfrac{9!}{5!}$ $\quad 12 \times 15^n$ $\quad 2^n$

56 $\quad \dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$ $\quad \dfrac{1}{(n+1)!}$ $\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ $\quad (n+2)(n+1)$ $\quad \dfrac{n! \times (n-3)}{2^{2n+2}}$ $\quad 6^n$

$\binom{9}{4}$ $\quad n(n+1)2^{n-2}$ $\quad \binom{2n}{n}$ $\quad \dfrac{1}{30}$ $\quad 3^n$ $\quad 10\ 100$ $\quad 15$ $\quad \dfrac{n(n-1)}{2}$

Fiche de calcul n° 15

Suites numériques

Prérequis
Suites récurrentes. Suites arithmétiques. Suites géométriques.

Calcul de termes

Calcul 15.1 — Suite explicite.

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{2n+3}{5} \times 2^{n+2}$. Calculer :

a) u_0 .....

b) u_1 .....

c) u_{n+1} .....

d) u_{3n} .....

Calcul 15.2 — Suite récurrente.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 3$. Calculer :

a) son troisième terme .....

b) u_3 .....

Calcul 15.3 — Suite récurrente.

On définit la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ par $v_1 = \sqrt{2}$ et $\forall n \geqslant 1,\ v_{n+1} = \sqrt{v_n}$. Calculer :

a) v_3 .....

b) son sixième terme .....

Calcul 15.4 — Suite récurrente.

On définit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $w_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = \dfrac{1}{2}w_n^2$. Calculer :

a) w_2 .....

b) son centième terme .....

Calcul 15.5 — Suite explicite.

Soit la suite $(t_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ t_n = \ln\left(\dfrac{n^n}{2^n}\right)$. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

a) t_{2n} .....

b) t_{4n} .....

Suites arithmétiques et géométriques

Calcul 15.6 — Suite arithmétique.

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 2. Calculer :

a) a_{10} .....

b) $s_{100} = a_0 + a_1 + \ldots + a_{99}$ .....

c) $a_{1\ 000}$ .....

d) $s_{101} = a_0 + a_1 + \ldots + a_{100}$ .....

Calcul 15.7 — Suite arithmétique.

La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r vérifiant que $b_{101} = \dfrac{2}{3}$ et $b_{103} = \dfrac{3}{4}$. Calculer :

a) b_{102} .....

b) r .....

Calcul 15.8 — Suite géométrique.

La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de premier terme $g_0 = 3$ et de raison $\dfrac{1}{2}$. Calculer :

a) Son dixième terme est : .....

b) $\sigma_{10} = g_0 + g_1 + \ldots + g_9$ .....

c) g_{10} .....

d) $\sigma_{11} = g_0 + g_1 + \ldots + g_{10}$ .....

Calcul 15.9 — Suite géométrique.

La suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q > 0$ vérifiant que $h_{11} = \dfrac{5\pi}{11}$ et $h_{13} = \dfrac{11\pi}{25}$. Calculer :

a) h_{12} .....

b) q .....

Réponses mélangées

$\dfrac{17}{24}$ $\quad 2\ 001 \quad \dfrac{3(2n+1)\cdot 2^{3n+2}}{5} \quad 2n\ln(n) \quad 2^{\frac{1}{64}} \quad 2^{\frac{1}{8}} \quad 13$

$10\ 000 \quad \dfrac{\pi\sqrt{5}}{5} \quad 2 \quad \dfrac{3}{512} \quad \dfrac{6141}{1024} \quad \dfrac{(2n+5)\cdot 2^{n+3}}{5} \quad \dfrac{12}{5} \quad \dfrac{1}{24}$

$\dfrac{3069}{512} \quad 21 \quad 29 \quad \dfrac{3}{1\ 024} \quad 2 \quad 4n\ln(2n) \quad 8 \quad 10\ 201 \quad \dfrac{11\sqrt{5}}{25}$