Trouver l'erreur dans le raisonnement par récurrence suivant :

Proposition 0.1 :
Toute suite finie de nombres réels contenant au moins un 1 ne contient que des 1.

Autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ si $\exists k \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $x_k = 1$, alors $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $x_i = 1$.

Démonstration : C'est évident pour une suite d'un seul terme (si $x_1 = 1$, alors $x_1 = 1$).

Supposons qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que toute suite de n nombres réels contenant au moins un 1 ne contient que des 1. Autrement dit, $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, si $\exists i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $x_i = 1$, alors $(x_1, \ldots, x_n) = (1, \ldots, 1)$.

On considère une suite de $n + 1$ nombres réels contenant au moins un 1. Autrement dit, on considère $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel qu'il existe $k \in \{1, \ldots, n\}$, $x_k = 1$. Alors le 1 est soit dans les n-premiers nombres, soit dans les n derniers nombres de la suite. Autrement dit, on a soit $(x_1, (x_2, \ldots, x_{n+1}))$ avec $1 \in \{x_2, \ldots, x_{n+1}\}$, soit $((x_1, \ldots, x_n), x_{n+1})$ avec $1 \in \{x_1, \ldots, x_n\}$.

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a donc $(x_1, \ldots, x_n) = (1, \ldots, 1)$ ou $(x_2, \ldots, x_{n+1}) = (1, \ldots, 1)$ selon si le 1 initial est au début ou à la fin. On a donc $(x_1, 1, \ldots, 1)$ ou $(1, \ldots, 1, x_{n+1})$. En considérant alors les n premiers ou les n derniers, c'est-à-dire

$$((x_1, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-1}), 1) \qquad \text{ou} \qquad (1, (\underbrace{1, \ldots, 1}_{n-1}, x_{n+1})),$$

et en réappliquant l'hypothèse de récurrence, on a alors $(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (1, \ldots, 1)$.

D'où par principe de récurrence, toute suite finie de nombres réels contenant au moins un 1, ne contient que des 1. $\square$

Il est évident que cette proposition est fausse. En effet, une conséquence immédiate de ce "résultat" est : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x = 1$. Pour cela, il suffit de considéré la suite $(1, x)$ par exemple. D'après ce qu'on vient de montrer, on aurait $x = 1$. Et donc en particulier, $1 = 2$. Inutile de préciser que c'est faux.

Par conséquent : **Où est l'erreur ?**