NOM :
Prénom :

Mardi 26 Septembre 2023

Interrogation 2

Cacluls Algébrique

Correction

Exercice 1 :
Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Binome de Newton.

Soit $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

2. Définition des coefficients binomiaux.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, \dots, n\}$. Alors

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

3. Formule de Pascal.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \{0, \dots, n-1\}$, alors

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

4. Somme géométrique.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{C}$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{Si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{Si } q = 1 \end{cases}$$

5. Propriété arithmétique des coefficients binomiaux.

On a :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall k \in \{0, \dots, n\}$, $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall k \in \{0, \dots, n\}$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ [*Symétrie*]
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ [*Formule du pion*]

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner les résultats :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

7. 3ème identité remarquable (forume de Bernoulli).

$\forall a, b \in \mathbb{C}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1}$$

8. Calcul d'une somme télescopique.

Soit $n, m \in \mathbb{N}$ avec $n \leq m$, $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes, alors

$$\sum_{k=n}^{m} (a_{k+1} - a_k) = a_{m+1} - a_n.$$

Exercice 2 :
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{j=0}^{n} \sum_{i=j}^{n} 2^j$.

Il suffit d'inverser les deux signes sommes :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=j}^{n} 2^j &= \sum_{0 \leq j \leq i \leq n} 2^j \\ &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} 2^j \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{1-2^{i+1}}{1-2} && \text{somme géométrique de raison } 2 \neq 1 \\
&= \sum_{i=0}^{n} (2^{i+1}-1) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} 2^k - \sum_{i=0}^{n} 1 \\
&= \frac{2-2^{n+2}}{1-2} - (n+1) && \text{somme géométrique de raison } 2 \neq 1 \\
&= 2^{n+2} - 2 - n - 1 \\
&= 2^{n+2} - n - 3.
\end{aligned}
$$