



## Chapitre 4 - TD : Fonctions usuelles

Simon Dauguet  
simon.dauguet@gmail.com

3 octobre 2023

### 1 Puissances et logarithmes

#### Exercice 1 :

Montrer que :

$$\begin{cases} \forall x > -1, \ln(1+x) \leq x \\ \forall x \geq 0, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \end{cases}$$

En déduire que  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, (1 + 1/n)^n \leq e \leq (1 - 1/n)^{-n}$

#### Exercice 2 :

Soit  $0 < a \leq b$  et  $f : x \mapsto \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Étudier la monotonie de  $f$  et en déduire

$$\ln(1 + a/b) \ln(1 + b/a) \leq \ln(2)^2$$

#### Exercice 3 (Lemme de Gibbs (\*)) :

Justifier la relation

$$\forall x > 0, \ln(x) \leq x - 1$$

et étudier les cas d'égalité.

Soit  $(p_1, \dots, p_n), (q_1, \dots, q_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$  tels que  $\sum_{k=1}^n p_k = \sum_{k=1}^n q_k = 1$ . Montrer que

$$\sum_{i=1}^n p_i \ln(q_i) \leq \sum_{i=1}^n p_i \ln(p_i)$$

et étudier les cas d'égalité.

#### Exercice 4 :

Soit  $x > 0$  et  $a = e^{x^2}$  et  $b = \frac{\ln(x^{1/x})}{x}$ . Simplifier  $a^b$ .

#### Exercice 5 :

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

1.  $e^x + e^{1-x} = e + 1$

2.  $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$

3.  $2^{2x} - 3^{x-1/2} = 3^{x+1/2} - 2^{2x-1}$

**Exercice 6 :**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  le système

$$\begin{cases} 8^x = 10y \\ 2^x = 5y \end{cases}$$

**2 Fonctions trigonométriques****Exercice 7 :**

Soit  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tels que  $a + b + c \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$ . Développer  $\cos(3a)$  et  $\tan(a + b + c)$ .

**Exercice 8 :**

Soit  $p, q \in \mathbb{R}$  tels que  $\sin(p) + \sin(q) \neq 0$ . Simplifier

$$\frac{\cos(q) - \cos(p)}{\sin(p) + \sin(q)}$$

et en déduire la valeur de  $\tan(\pi/24)$ .

**Exercice 9 :**

Mettre les expressions suivantes sous la forme  $A \cos(x - \varphi)$ .

$$\cos(x) + \sin(x) \quad \text{et} \quad \cos(x) - \sqrt{3} \sin(x)$$

**Exercice 10 :**

Pour  $a, b \in \mathbb{R}$ , calculer

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(a + kb) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(a + kb)$$

**Exercice 11 :**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes

$$\begin{array}{ll} a) \cos(2x - \pi/3) = \sin(x + 3\pi/4) & b) \cos(x)^4 + \sin(x)^4 = 1 \\ c) \sin(x) + \sin(3x) = 0 & d) \sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = 0 \\ e) 3 \cos(x) - \sqrt{3} \sin(x) = \sqrt{6} & f) 2 \sin(x) \cos(x) + \sqrt{3} \cos(2x) = 0 \\ g) \tan(x) \tan(2x) = 1 & \end{array}$$

**3 Fonctions trigonométriques réciproques****Exercice 12 :**

Simplifier les expressions suivantes (en mettant les bons quantificateurs) :

$$\begin{array}{lll} a) \cos(2 \arccos(x)) & b) \cos(2 \arcsin(x)) & c) \sin(2 \arccos(x)) \\ d) \cos(2 \arctan(x)) & e) \sin(2 \arctan(x)) & f) \tan(2 \arcsin(x)) \end{array}$$

**Exercice 13 :**

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Simplifier de deux manières différentes, l'expression :  $\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

**Exercice 14 :**

Étudier les fonctions suivantes afin de pouvoir les dessiner facilement

- a)  $f_1 : x \mapsto \arcsin(\sin(x)) + \arccos(\cos(x))$       b)  $f_2 : x \mapsto \arccos \sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}$   
 c)  $f_3 : x \mapsto \arcsin(\sin(x)) + \frac{1}{2} \arccos(\cos(2x))$       d)  $f_4 : x \mapsto \arccos(\cos(x)) + \frac{1}{2} \arcsin(\sin(2x))$

**Exercice 15 :**

On se propose de calculer, de deux façons différentes  $\arctan(1) + \arctan(2) + \arctan(3)$ .

- (a) Calculer  $(1+i)(1+2i)(1+3i)$ .  
 (b) Exprimer un argument de  $1+i$ ,  $1+2i$  et  $1+3i$  à l'aide de  $\arctan$ , puis en déduire la valeur de  $\arctan(1) + \arctan(2) + \arctan(3)$ .
- (a) Exprimer  $\tan(a+b+c)$  en fonction de  $\tan(a)$ ,  $\tan(b)$ ,  $\tan(c)$ , pour  $a, b, c \in ]0, \pi/2[$  tels que  $a+b+c \in ]0, \pi/2[$ .  
 (b) Calculer directement la valeur de  $\arctan(1) + \arctan(2) + \arctan(3)$  à l'aide de l'application directe du cours sur l'arctangente.
- [Bonus \*\*\*] Essayer de trouver une méthode similaire pour montrer la formule de Machin :

$$\pi = 16 \arctan(1/5) - 4 \arctan(1/239).$$

**Exercice 16 :**

Simplifier :

- $\arctan(1/2) + \arctan(1/5) + \arctan(1/8)$
- $\arctan(2) + \arctan(3) + \arctan(2 + \sqrt{3})$
- $\arcsin(4/5) + \arcsin(5/13) + \arcsin(16/65)$

**Exercice 17 :**

Résoudre les équations suivantes d'inconnues  $x \in \mathbb{R}$  :

- |  |  |
|--|--|
| 1) $\arcsin(x) = \arcsin(4/5) + \arcsin(5/13)$         | 2) $\arcsin(\tan(x)) = x$                      |
| 3) $\arccos(x) = \arcsin(2x)$                          | 4) $\arctan(x) + \arctan(x\sqrt{3}) = 7\pi/12$ |
| 5) $\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \arctan(x)$ | 6) $\arcsin\left(\frac{\tan(x)}{2}\right) = x$ |

**Exercice 18 (Choix d'un argument en physique et en SI) :**

Soit  $z = a + ib \in \mathbb{C}^*$  avec  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $\theta \in ]-\pi, \pi]$  un argument de  $z$ .

- Montrer que

$$\theta = \begin{cases} \arctan(b/a) & \text{si } a > 0 \\ \pi/2 & \text{si } a = 0, b > 0 \\ \arctan(b/a) + \pi & \text{si } a < 0, b \geq 0 \\ -\pi/2 & \text{si } a = 0, b < 0 \\ \arctan(b/a) - \pi & \text{si } a < 0, b < 0 \end{cases}$$

- Montrer que

$$\theta = \text{sign}(b) \arccos(a/|z|)$$

**Exercice 19 :**

On va calculer  $\arctan(a) + \arctan(b)$  pour  $ab \neq 1$ .

1. Soit  $a, b > 0$ .
  - (a) Montrer que  $\arctan(a) - \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a-b}{1+ab}\right)$ .
  - (b) Calculer  $\arctan(2) - \arctan(3)$ .
2. Soit  $a \in \mathbb{R}$  et  $f : x \mapsto \arctan(x) + \arctan(a) - \arctan\left(\frac{a+x}{1-ax}\right)$ .
  - (a) Justifier que  $f$  est dérivable sur son ensemble de définition et calculer  $f'$ .
  - (b) Soit  $b \in \mathbb{R}$  tel que  $ab \neq 1$ . Montrer que  $f(b)$  est un multiple entier de  $\pi$ , en discutant le signe de  $a$  et  $ab - 1$ .
  - (c) En déduire une expression simplifiée de  $\arctan(a) + \arctan(b)$ .
3. Calculer :
  - (a)  $\arctan(1/2) + \arctan(1/5) + \arctan(1/8)$
  - (b)  $\arctan(2) + \arctan(5) + \arctan(8)$

**Remarque :**

On pourrait aussi retrouver la formule de Machin rappelé dans l'exercice 15

## 4 Fonctions hyperboliques

**Exercice 20 :**

Établir que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ , on a  $\operatorname{sh}(x) \geq x$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\operatorname{ch}(x) \geq 1 + \frac{x^2}{2}$

**Exercice 21 :**

Soit  $y \in ]-\pi/2, \pi/2[$ . On pose  $x = \ln\left(\tan\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$ . Montrer que

$$\operatorname{th}(x/2) = \tan(y/2), \quad \operatorname{th}(x) = \sin(y), \quad \operatorname{ch}(x) = \frac{1}{\cos(y)}$$

**Exercice 22 :**

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $a, b \in \mathbb{R}$ . Calculer

$$\sum_{k=0}^n \operatorname{ch}(a + kb) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n \operatorname{sh}(a + kb)$$

puis exprimer  $\operatorname{ch}(a)^n$  et  $\operatorname{sh}(a)^n$  en fonction des  $\operatorname{ch}(ka)$  et  $\operatorname{sh}(ka)$  (selon la parité de  $n$ ) et enfin  $\operatorname{ch}(na)$  et  $\operatorname{sh}(na)$  en fonction de  $\operatorname{ch}(a)^k$  et  $\operatorname{sh}(a)^k$ .

**Exercice 23 :**

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R}$ , simplifier

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^n \operatorname{ch}(x/2^k)$$

en calculant  $P_n(x) \operatorname{sh}(x/2^n)$  et en déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x)$ .

**Exercice 24 :**

Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $x > 0$ , montrer que

$$\operatorname{th}((n+1)x) - \operatorname{th}(nx) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(nx) \operatorname{ch}((n+1)x)}$$

Calculer alors

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\operatorname{ch}(kx) \operatorname{ch}((k+1)x)}$$