NOM :
Prénom :

Mardi 03 Octobre 2023

Interrogation 3

Complexes

Correction

Exercice 1 :
Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Expression de racines n-èmes de l'unité.
Soit $n \geq 1$. Les racines n-ème de l'unité sont les $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in \{0, \dots, n-1\}$.

2. Inégalité triangulaire complète.
Soit $z, z' \in \mathbb{C}$. Alors
$$||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$$
et $|z + z'| = |z| + |z'|$ si, et seulement si, $\exists \lambda \geq 0$ tel que $z = \lambda z'$ ou $z' = \lambda z$.

3. Définition de l'exponentielle complexe.
Soit $z \in \mathbb{C}$. On définit l'exponentielle complexe, noté e^z, par $e^z = e^{\mathfrak{Re}(z)} e^{i\, \mathfrak{Im}(z)}$.

4. Formules d'Euler.
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors
$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

5. Relations coefficients/racines.
Soit $a, b, c, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Alors
$$z_1, z_2 \text{ solutions de } az^2 + bz + c = 0 \iff \begin{cases} z_1 + z_2 = -b/a \\ z_1 z_2 = c/a \end{cases}$$

6. Formule de Moivre.
$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

7. Expression du module par le conjugué.
Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors $|z|^2 = z\overline{z}$. Et si $z \neq 0$, alors $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.

8. Caractérisation des complexes par la forme trigonométrique.
Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$. Alors
$$z_1 = z_2 \iff \begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ \arg(z_1) \equiv \arg(z_2)\ [2\pi] \end{cases}$$

Exercice 2 :
Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 + (3-2i)z + \frac{1}{2} - 4i = 0$.

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^2 + (3-2i)z + \frac{1}{2} - 4i = 0$. On pose $\Delta = (3-2i)^2 - 4(1/2 - 4i) = 3 + 4i$. On cherche maintenant $\delta = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\delta^2 = \Delta$. Par caractérisation des complexes par la forme algébrique et par la forme trigonométrique, on a donc

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = \sqrt{9+16} = 5 & \text{module} \\ a^2 - b^2 = 3 & \text{partie réelle} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 1 \end{cases}$$

De plus, $2ab = \mathfrak{Im}(\delta^2) = \mathfrak{Im}(\Delta) = 4 > 0$. Donc a et b sont de même signes. On choisit alors $\delta = 2 + i$.

On en déduit donc que
$$\begin{cases} z = \frac{-3+2i+2+i}{2} = \frac{-1+3i}{2} \\ \text{ou} \\ z = \frac{-3+2i-2-i}{2} = \frac{-5+i}{2} \end{cases}$$