



DS 2

Calculs - Complexes

Correction

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Mercredi 4 Octobre 2022

Problème 1 (Homographies sur les complexes de module 1) :

Partie I : Une équation dans $\mathbb{U}$

Soit $n \geq 2$ et $\beta = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^n + 1 = 0$. Alors $z^n = -1 = e^{i\pi}$. Donc z est une racine n -ème de -1 . Les racines n -èmes de l'unité étant les $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in \{0, \dots, n-1\}$, on a

$$\{z \in \mathbb{C}, z^n + 1 = 0\} = \{e^{i\pi/n} e^{2ik\pi/n}, 0 \leq k \leq n-1\} = \left\{e^{\frac{(2k+1)i\pi}{n}}, 0 \leq k \leq n-1\right\}.$$

2. Comme $n \geq 2$, on a $\beta^2 = e^{2i\pi/n} \neq 1$. Alors

$$\begin{aligned} R_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \beta^{2k+1} \\ &= e^{i\pi/n} \sum_{k=0}^{n-1} \beta^{2k} && \text{linéarité de la somme} \\ &= e^{i\pi/n} \frac{1 - \beta^n}{1 - \beta} && \text{somme géo de raison } \beta^2 \neq 1 \\ &= e^{i\pi/n} \frac{1 - e^{2i\pi}}{1 - e^{2i\pi/n}} && \text{def } \beta \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $R_n = 0$.

3. On a $n \geq 2$. Alors

$$\begin{aligned} P_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \beta^{2k+1} \\ &= e^{i\pi/n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} e^{2ik\pi/n} && \text{def } \beta \\ &= e^{i\pi/n} \left((1 + e^{2i\pi/n})^n - 1 \right) && \text{Newton} \\ &= e^{i\pi/n} \left(\left(e^{i\pi/n} (e^{-i\pi/n} + e^{i\pi/n}) \right)^n - 1 \right) \\ &= e^{i\pi/n} \left(e^{i\pi} (2 \cos(\pi/n))^n - 1 \right) && \text{Euler} \end{aligned}$$

$$= -e^{i\pi/n} (1 + 2^n \cos(\pi/n)^n).$$

D'où $|P_n| = |1 + 2^n \cos(\pi/n)^n|$. Mais comme $\pi/n \in]0, \pi/2[$, on a $\cos(\pi/n) > 0$ et donc $|P_n| = 1 + 2^n \cos(\pi/n)^n$.

4. On pose $T_n = \sum_{k=0}^{n-1} k\beta^{2k+1}$. Alors

$$\begin{aligned} (1 - \beta^2)T_n &= \beta(1 - \beta^2) \sum_{k=0}^{n-1} k\beta^{2k} && \text{linéarité de la somme} \\ &= \beta \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\beta^{2k} - \sum_{k=0}^{n-1} k\beta^{2(k+1)} \right) \\ &= \beta \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\beta^{2k} - \sum_{j=1}^n (j-1)\beta^{2j} \right) && \text{avec le changement de variable } j = k+1 \\ &= \beta \left(\sum_{k=0}^{n-1} k\beta^{2k} - \sum_{j=1}^n j\beta^{2j} + \sum_{j=1}^n \beta^{2j} \right) \\ &= -n\beta^{2n+1} + \sum_{j=1}^n \beta^{2j+1} \\ &= -n\beta^{2n}\beta + \sum_{j=1}^{n-1} \beta^{2j+1} + \beta^{2n+1} \\ &= -n\beta + \sum_{j=1}^{n-1} \beta^{2j+1} + \beta \\ &= -n\beta + R_n \\ &= -n\beta \end{aligned}$$

cf 2

On en déduit

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{n\beta}{\beta^2 - 1} \\ &= \frac{ne^{i\pi/n}}{e^{2i\pi/n} - 1} \\ &= \frac{ne^{i\pi/n}}{e^{i\pi/n}(e^{i\pi/n} - e^{-i\pi/n})} \\ &= \frac{n}{2i \sin(\pi/n)} && \text{Euler} \\ &= -\frac{ni}{2 \sin(\pi/n)}. \end{aligned}$$

Et donc $T_n \in i\mathbb{R}$.

5. Soit $x \in]0, 2\pi[$, $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a donc $e^{ix} \neq 1$. Alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \cos(a + kx) + i \sum_{k=0}^n \sin(a + kx) &= \sum_{k=0}^n e^{i(a+kx)} \\ &= e^{ia} \sum_{k=0}^n e^{ikx} \\ &= e^{ia} \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} \\ &= e^{ia} \frac{e^{i(n+1)x/2}(e^{-i(n+1)x/2} - e^{i(n+1)x/2})}{e^{ix/2}(e^{-ix/2} - e^{ix/2})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{i(a+nx/2)} \frac{-2i \sin((n+1)x/2)}{-2i \sin(x/2)} \\
&= e^{i(a+nx/2)} \frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}
\end{aligned}$$

Euler

On en déduit donc, par caractérisation d'un complexe par sa partie réelle et partie imaginaire

$$\sum_{k=0}^n \cos(a+kx) = \cos(a+nx/2) \frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}$$

et

$$\sum_{k=0}^n \sin(a+kx) = \sin(a+nx/2) \frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}.$$

6. Soit $n \geq 2$.

(a) On a $e^{\frac{2i\pi}{n}} \neq 1$ et donc

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \Im(e^{ik\pi/n}) \\
&= \Im\left(\sum_{k=1}^{n-1} e^{ik\pi/n}\right) \\
&= \Im\left(\frac{e^{i\pi/n} - e^{i\pi}}{1 - e^{i\pi/n}}\right) \\
&= \Im\left(\frac{e^{i\pi/n} + 1}{1 - e^{i\pi/n}}\right) \\
&= \Im\left(\frac{e^{i\pi/(2n)}(e^{i\pi/(2n)} + e^{-i\pi/(2n)})}{e^{i\pi/(2n)}(e^{-i\pi/(2n)} - e^{i\pi/(2n)})}\right) \\
&= \Im\left(\frac{\cos(\pi/(2n))}{-i \sin(\pi/(2n))}\right) \\
&= \frac{\cos(\pi/(2n))}{\sin(\pi/(2n))} \\
&= \frac{1}{\tan(\pi/(2n))}
\end{aligned}$$

On pouvait aussi le démontrer (mais c'est moins joli) en calculant $S_n \tan(\pi/(2n))$ et montrer que ça vaut 1 (il faut utiliser la formule donnant $\sin a \sin b$ en fonction du cosinus).

(b) On en déduit que $\tan(\pi/8)^{-1} = S_4 = \sum_{k=1}^3 \sin(k\pi/4) = \sqrt{2}/2 + 1 + \sqrt{2}/2 = 1 + \sqrt{2}$, d'où $\tan(\pi/8) = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$.

(c) On a, pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\frac{S_n}{n} &= \frac{1}{n \tan(\pi/(2n))} \\
&= \frac{2/\pi}{(2n/\pi) \tan(\pi/(2n))} \\
&= \frac{2/\pi}{\frac{\tan(\pi/(2n))}{\pi/(2n)}}
\end{aligned}$$

Or $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \pi/(2n) = 0$, donc, par composition des limites, $(S_n/n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n} = \frac{2}{\pi}$$

Partie II : Cosinus

7. Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors

$$z^5 + 1 = 0 \iff z^5 = -1 \iff \exists k \in \{0, \dots, 4\}, z = e^{\frac{i\pi}{5}} e^{\frac{2ik\pi}{5}} = e^{\frac{i(2k+1)\pi}{5}}.$$

8. On a

$$\forall z \in \mathbb{C}, z^5 + 1 = z^5 - (-1)^5 = (z - (-1)) \sum_{k=0}^4 z^k (-1)^{4-k} = (z + 1)(z^4 - z^3 + z^2 - z + 1).$$

On pose donc

$$\forall z \in \mathbb{C}, Q(z) = z^4 - z^3 + z^2 - z + 1.$$

9. Tout d'abord $Q(0) = 1 \neq 0$. Donc $z = 0$ n'est pas solution de l'équation $Q(z) = 0$. Soit $z \in \mathbb{C}$ une solution de $Q(z) = 0$. Donc $z \neq 0$. On pose alors $Z = z + \frac{1}{z}$. Et

$$\begin{aligned} Q(z) = 0 &\iff z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0 \\ &\iff z^2 - z + 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0 && \text{car } z \neq 0 \\ &\iff \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2 - \left(z + \frac{1}{z}\right) + 1 = 0 \\ &\iff Z^2 - Z - 1 = 0 \end{aligned}$$

On se ramène donc à trouver les racines d'un polynôme du second degré à coefficient réel de discriminant $\Delta = 1 + 4 = 5 > 0$. Les racines sont donc

$$Z = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad Z = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

(la seconde étant largement connus comme étant le nombre d'or).

On est donc ramené à résoudre les équations

$$z + \frac{1}{z} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad z + \frac{1}{z} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Comme $z \neq 0$, on est donc ramener à résoudre

$$z^2 - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}z + 1 = 0 \tag{1}$$

et

$$z^2 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}z + 1 = 0. \tag{2}$$

La première est de discriminant $\Delta_1 = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^2 - 4 = \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4} - 4 = -\frac{5 + \sqrt{5}}{2} < 0$ et dont les racines sont donc les complexes non réels conjugués :

$$z_1 = \frac{\frac{1 - \sqrt{5}}{2} - i\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}}{2} = \frac{1 - \sqrt{5}}{4} - i\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{4} + i\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}$$

L'équation (2) a pour discriminant $\Delta_2 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 - 4 = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4} - 4 = -\frac{5 - \sqrt{5}}{2} < 0$ dont les racines sont donc les complexes non réels conjugués :

$$z_3 = \frac{\frac{1 + \sqrt{5}}{2} - i\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} - i\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}} \quad \text{et} \quad z_4 = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} + i\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}}$$

10. On a vu que $e^{i\frac{\pi}{5}}$ est une solution de l'équation $z^5 + 1 = 0$. C'est donc également une solution de l'équation $(z+1)Q(z) = 0$. Mais comme $1 + e^{i\pi/5} \neq 0$, c'est une solution de $Q(z) = 0$. En réutilisant la question précédente où l'on a trouvé les solutions de cette équation, on en déduit donc

$$\exists k \in \{1, 2, 3, 4\}, e^{i\pi/5} = z_k.$$

Mais comme $\pi/5 \in]0, \pi/2[$, on en déduit que $\cos(\pi/5) > 0$ et $\sin(\pi/5) > 0$, ce qui conduit à $e^{i\pi/5} = z_4$ et par suite

$$\cos(\pi/5) = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}.$$

Partie III : Homographie conservant $\mathbb{U}$

11. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{U}$. Alors

$$|h(z)| = \left| \frac{e^{i\theta}}{z} \right| = \frac{|e^{i\theta}|}{|z|} = \frac{1}{1} = 1$$

donc $h(z) \in \mathbb{U}$.

12. Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

(a) Alors

$$e^{i\theta} \times 1 - e^{i\theta} \alpha \times \bar{\alpha} = e^{i\theta}(1 - |\alpha|^2) \neq 0$$

car $e^{i\theta} \neq 0$ et $\alpha \notin \mathbb{U}$. Donc h est bien une homographie.

De plus, $\forall z \in \mathbb{U}$, $|\bar{\alpha}z| = |\alpha| \neq 1$. Donc en particulier, $\forall z \in \mathbb{U}$, $\bar{\alpha}z \neq -1$. Et donc h est bien définie sur $\mathbb{U}$

(b) Soit $z \in \mathbb{U}$. Alors

$$\begin{aligned} |h(z)|^2 &= e^{i\theta} \frac{z + \alpha}{\bar{\alpha}z + 1} \times e^{-i\theta} \frac{\bar{z} + \bar{\alpha}}{\alpha\bar{z} + 1} \\ &= \frac{(z + \alpha)(\bar{z} + \bar{\alpha})}{(\bar{\alpha}z + 1)(\alpha\bar{z} + 1)} \\ &= \frac{|z|^2 + \alpha\bar{z} + \bar{\alpha}z + |\alpha|^2}{|\alpha|^2|z|^2 + \alpha\bar{z} + \bar{\alpha}z + 1} \\ &= \frac{1 + \alpha\bar{z} + \bar{\alpha}z + |\alpha|^2}{|\alpha|^2 + \alpha\bar{z} + \bar{\alpha}z + 1} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Donc $h(z) \in \mathbb{U}$ et donc $h(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.

13. (a) Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Alors

$$|\alpha + \beta|^2 = (\alpha + \beta)(\bar{\alpha} + \bar{\beta}) = |\alpha|^2 + \bar{\alpha}\beta + \alpha\bar{\beta} + |\beta|^2 = |\alpha|^2 + 2\Re(\bar{\alpha}\beta) + |\beta|^2.$$

(b) Soit $a, b \in \mathbb{C}$. Supposons que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $a + 2\Re(be^{-i\theta}) = 0$.

Il est facile de voir que si $b = 0$, alors $a = 0$ également.

Raisonnons par l'absurde et supposons que $b \neq 0$. Alors $\exists \varphi \in \mathbb{R}$ tel que $b = |b|e^{i\varphi}$. Alors, pour $\theta = \varphi$, on a donc

$$a + 2\Re(be^{-i\varphi}) = a + 2\Re(|b|) = a + 2|b| = 0$$

En utilisant la caractérisation des complexes par leurs formes algébrique, on en déduit que $\Im(a) = 0$. Donc $a \in \mathbb{R}$. Par conséquent, on a $a + 2|b| = 0$ dans $\mathbb{R}$. On a donc en fait

$$\begin{aligned} &\forall \theta \in \mathbb{R}, -2|b| + 2\Re(be^{-i\theta}) = 0 \\ \iff &\forall \theta \in \mathbb{R}, \Re(be^{-i\theta} - |b|) = 0 \\ \iff &\forall \theta \in \mathbb{R}, \Re(b) \cos(\theta) + \Im(b) \sin(\theta) - |b| = 0 \\ \implies &\forall \theta \in \mathbb{R}, \Re(b)^2 + \Im(b)^2 = \Re(b)^2 \cos^2(\theta) + 2\Re(b)\Im(b) \cos(\theta) \sin(\theta) + \Im(b)^2 \sin^2(\theta) \\ \iff &\forall \theta \in \mathbb{R}, \Re(b)^2(1 - \cos^2(\theta)) + \Im(b)^2(1 - \sin^2(\theta)) - 2\Re(b)\Im(b) \cos(\theta) \sin(\theta) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\iff \forall \theta \in \mathbb{R}, \Re(b)^2 \sin(\theta)^2 + \Im(b)^2 \cos(\theta)^2 - 2\Re(b)\Im(b) \cos(\theta) \sin(\theta) = 0 \\
&\iff \forall \theta \in \mathbb{R}, (\Re(b) \sin(\theta) - \Im(b) \cos(\theta))^2 = 0 \\
&\iff \forall \theta \in \mathbb{R}, \Re(b) \sin(\theta) = \Im(b) \cos(\theta)
\end{aligned}$$

En particulier, pour $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$, on obtient

$$\begin{cases} \Im(b) = 0 \\ \Re(b) = 0 \end{cases}$$

autrement dit, $b = 0$. On aboutit donc à ❌ .

On vient donc de montrer que b ne peut pas ne pas être nul. Donc $b = 0$ et par suite $a = 0$. D'où l'implication désirée.

Autre méthode. Si $\forall \theta \in \mathbb{R}, a + 2\Re(b e^{-i\theta}) = 0$, en prenant $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, on aboutit à $a = -2\Re(b) = 2\Re(b)$. Donc $\Re(b) = 0$. Et en prenant $\theta = \pi/2$ et $\theta = -\pi/2$, on trouve $a = 2\Im(b) = -2\Im(b)$. Donc $\Im(b) = 0$. Et donc $a = 0$.

14. (a) Comme $h(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$, on a donc

$$\begin{aligned}
\forall \theta \in \mathbb{R}, |h(e^{i\theta})|^2 = 1 &\iff \forall \theta \in \mathbb{R}, \frac{(ae^{i\theta} + b)(\bar{a}e^{-i\theta} + \bar{b})}{(ce^{i\theta} + d)(\bar{c}e^{-i\theta} + \bar{d})} = 1 \\
&\iff \forall \theta \in \mathbb{R}, \frac{|a|^2 + a\bar{b}e^{i\theta} + \bar{a}be^{-i\theta} + |b|^2}{|c|^2 + c\bar{d}e^{i\theta} + \bar{c}de^{-i\theta} + |d|^2} = 1 \\
&\iff \forall \theta \in \mathbb{R}, |a|^2 + |b|^2 + 2\Re(\bar{a}be^{-i\theta}) = |c|^2 + |d|^2 + 2\Re(\bar{c}de^{-i\theta}).
\end{aligned}$$

(b) On en déduit également

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, (|a|^2 + |b|^2 - |c|^2 - |d|^2) + 2\Re((\bar{a}b - \bar{c}d)e^{-i\theta}) = 0.$$

La question 13b nous permet alors de conclure

$$\begin{cases} |a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2 \\ \bar{a}b = \bar{c}d \end{cases} \quad (3)$$

(c) Puisque $a = 0$, on a donc $\bar{c}d = 0$. Mais d'autre part, on doit avoir $ad - bc = bc \neq 0$. Donc $c \neq 0$ et $d = 0$. Finalement, on a aussi $|b| = |c|$. Donc $\exists \theta \in \mathbb{R}$ tel que $b = ce^{i\theta}$. Et par conséquent

$$h(z) = \frac{b}{cz} = \frac{ce^{i\theta}}{cz} = \frac{e^{i\theta}}{z}$$

donc h est bien de la forme indiquée.

(d) On suppose $a \neq 0$. On a donc $b = \frac{\bar{c}d}{a}$ en utilisant (14b). On a donc

$$|a|^2(|c|^2 + |d|^2) = |a|^2(|a|^2 + |b|^2) = |a|^4 + |a|^2|b|^2 = |a|^4 + |c|^2|d|^2$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned}
|a|^4 + |c|^2|d|^2 - |a|^2|c|^2 - |a|^2|d|^2 = 0 &\iff |a|^2(|a|^2 - |c|^2) + |d|^2(|c|^2 - |a|^2) = 0 \\
&\iff (|a|^2 - |c|^2)(|a|^2 - |d|^2) = 0
\end{aligned}$$

(e) Supposons que $|a| = |c|$. Alors $\exists \theta \in \mathbb{R}$ tel que $c = ae^{i\theta}$. Par suite de (14b), on a $\bar{a}b = \bar{a}e^{-i\theta}d$ c'est à dire $b = de^{-i\theta}$. Puis $ad - bc = ad - de^{-i\theta}ae^{i\theta} = ad - ad = 0$ et donc ❌ . Par conséquent, $|a| \neq |c|$.

(f) On a donc $|a| = |d|$. Donc $\exists \theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = de^{i\theta}$ (et $d \neq 0$). Et donc $b = \frac{\bar{c}d}{a} = \frac{\bar{c}d}{d}e^{i\theta}$ toujours grâce à (14b). Finalement,

$$\begin{aligned} h(z) &= \frac{az + b}{cz + d} \\ &= \frac{dze^{i\theta} + \frac{\bar{c}d}{d}e^{i\theta}}{cz + d} \\ &= \frac{ze^{i\theta} + \frac{\bar{c}}{d}e^{i\theta}}{\frac{c}{d}z + 1} \\ &= e^{i\theta} \frac{z + \alpha}{\bar{\alpha}z + 1} \end{aligned}$$

avec $\alpha = \frac{\bar{c}}{b}$. Donc h est bien de la forme annoncé.

(g) Si h est une homographie conservant $\mathbb{U}$. Alors $\exists a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tel que $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Comme h doit être définie sur $\mathbb{U}$, on doit avoir $cz + d \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{U}$. Or $(\forall z \in \mathbb{U}, cz + d \neq 0) \iff |c| \neq |d|$. En effet, on a $|c| = |d| \in \mathbb{R}$, $ce^{i\theta} = -d \iff \exists z \in \mathbb{U}, cz = -d \iff \exists z \in \mathbb{U}, cz + d = 0$. Et par contraposition, on a $\forall z \in \mathbb{U}, cz + d \neq 0 \iff |c| \neq |d|$. On a donc $|c| \neq |d|$ puisque h définie sur $\mathbb{U}$ par hypothèse.

Si $a = 0$, alors h est de la forme $h(z) = \frac{e^{i\theta}}{z}$, d'après la question 14c. Et si $a \neq 0$, 14f montre que h est de la forme la question 12.

Donc si h est une homographie stabilisant $\mathbb{U}$, alors elle est de l'une des formes annoncées. Et on a déjà montré (question 11 et 12) que les homographies de ces formes conservent $\mathbb{U}$.

Donc h est une homographie conservant $\mathbb{U}$ si, et seulement si, elle est de la forme des questions 11 et 12.

Problème 2 (Sommes de puissances d'entiers consécutifs) :

1. Soit $d \in \mathbb{N}$. Alors

$$S_0(d) = \sum_{k=0}^0 k^d = \begin{cases} 0^0 & \text{si } d = 0 \\ 0^d & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } d = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$S_n(0) = \sum_{k=0}^n k^0 = \sum_{k=0}^n 1 = n + 1$$

et

$$S_n(1) = \sum_{k=0}^n k = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

3. On a $S_0(2) = 0 = \frac{0 \times 1 \times 1}{6}$ d'après la question 1.

Supposons qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$S_n(2) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Alors

$$S_{n+1}(2) = \sum_{k=1}^{n+1} k^2$$

$$\begin{aligned}
&= S_n(2) + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 && \text{Hyp Rec} \\
&= (n+1) \left(\frac{n(2n+1)}{6} + n+1 \right) \\
&= (n+1) \frac{2n^2 + n + 6n + 6}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n+3)(n+2)}{6}.
\end{aligned}$$

On vient donc de démontrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n(2) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

4. (a) Soit $n, p \in \mathbb{N}$. En utilisant le binôme de Newton, on a

$$\begin{aligned}
A_n(p) &= \sum_{k=0}^n (k+1)^{p+1} = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^{p+1} \binom{p+1}{i} k^i \\
&= \sum_{i=0}^{p+1} \sum_{k=0}^n \binom{p+1}{i} k^i \\
&= \sum_{i=0}^{p+1} \binom{p+1}{i} S_n(i)
\end{aligned}$$

(b) Mais par ailleurs, si $n, p \in \mathbb{N}$, on a également, par un petit changement d'indice,

$$A_n(p) = \sum_{k=0}^n (k+1)^{p+1} = \sum_{k=1}^{n+1} k^{p+1} = S_{n+1}(p+1).$$

(c) D'après la question 4a, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^n (k+1)^{p+1} = S_n(p+1) + (p+1)S_n(p) + \sum_{i=0}^{p-1} \binom{p+1}{i} S_n(i).$$

On en déduit donc que, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
(p+1)S_n(p) &= \sum_{k=0}^n (k+1)^{p+1} - S_n(p+1) - \sum_{i=0}^{p-1} \binom{p+1}{i} S_n(i) \\
&= S_{n+1}(p+1) - S_n(p+1) - \sum_{i=0}^{p-1} \binom{p+1}{i} S_n(i) && \text{cf. 4b} \\
&= (n+1)^{p+1} - \sum_{i=0}^{p-1} \binom{p+1}{i} S_n(i)
\end{aligned}$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}^*, S_n(p) = \frac{1}{p+1} \left((n+1)^{p+1} - \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p+1}{k} S_n(k) \right).$$

(d) En particulier, pour $p = 3$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n(3) = \frac{1}{4} \left((n+1)^4 - \sum_{k=0}^2 \binom{4}{k} S_n(k) \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \left((n+1)^4 - n - 1 - 4 \frac{n(n+1)}{2} - 6 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) \\
&= \frac{1}{4} \left((n+1)^4 - n - 1 - n(n+1)(2+2n+1) \right) \\
&= \frac{1}{4} (n+1)((n+1)^3 - 1 - n(2n+3)) \\
&= \frac{(n+1)(n^3 + n^2)}{4} \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\
&= \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2
\end{aligned}$$

(e) En particulier, pour $p = 4$, on a

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}, S_n(4) &= \frac{1}{5} \left((n+1)^5 - \sum_{k=0}^3 \binom{5}{k} S_n(k) \right) \\
&= \frac{1}{5} \left((n+1)^5 - n - 1 - 5 \frac{n(n+1)}{2} - 10 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 10 \frac{n^2(n+1)^2}{4} \right) \\
&= \frac{1}{5} \left((n+1)^5 - n - 1 - \frac{5}{2} n(n+1) - \frac{5}{2} n(n+1)(2n+1) - \frac{5}{2} n^2(n+1)^2 \right) \\
&= \frac{1}{5} \left(n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 4n - \frac{10}{3} n^3 - \frac{15}{2} n^2 - \frac{25}{6} n - \frac{5}{2} n^4 - 5n^3 - \frac{5}{2} n^2 \right) \\
&= \frac{1}{5} \left(n^5 + \frac{5}{2} n^4 + \frac{5}{3} n^3 - \frac{n}{6} \right) \\
&= \frac{n}{30} (6n^4 + 15n^3 + 10n^2 - 1).
\end{aligned}$$

Et d'autres part, en développant, on trouve

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1) = (2n^2+3n+1)(3n^2+3n-1) = 6n^4 + 15n^3 + 10n^2 - 1,$$

d'où l'on déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n(4) = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

Exercice 3 (BONUX) :

On calcul sans trop réfléchir :

$$(|m-1| + |m+1|)^2 = |m-1|^2 + |m+1|^2 + 2|m^2-1| = 2|m|^2 + 2 + 2|m^2-1| = 2(1 + |m|^2 + |m^2-1|).$$

et

$$(|a| + |b|)^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2|ab| = |a|^2 + |b|^2 + 2$$

car $ab = 1$ par relation coeff/racines.

D'autre part, on a $|a+m|^2 = |m^2-1|$ et $|b+m|^2 = |m^2-1|$ puisque ce sont des racines du polynôme. Donc

$$\begin{aligned}
2|m^2-1| &= |a+m|^2 + |b+m|^2 \\
&= |a|^2 + |m|^2 + 2\Re(a\overline{m}) + |b|^2 + |m|^2 + 2\Re(b\overline{m})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= |a|^2 + |b|^2 + 2|m|^2 + 2\Re((a+b)\overline{m}) \\
&= |a|^2 + |b|^2 + 2|m|^2 + 2\Re(-2m\overline{m}) \\
&= |a|^2 + |b|^2 - 2|m|^2.
\end{aligned}$$

$\mathbb{R}$ -Linéarité
rel coeff/racines

D'où

$$(|a| + |b|)^2 = 2 + 2|m^2 - 1| + 2|m|^2 = 2(1 + |m|^2 + |m^2 - 1|) = (|m + 1| + |m - 1|)^2$$

et d'où le résultat car tous est positif.