NOM :
Prénom :

Mardi 17 Octobre 2023

Lycée Loges

Interrogation 5

Fonctions Usuelles

Correction

Exercice 1 :
Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Propriétés analytiques de $\arccos$.
$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ est la bijection réciproque de $\cos|_{[0,\pi]}$. $\arccos$ est continue sur $[-1, 1]$, strictement décroissante et infiniment dérivable sur $]-1, 1[$ et $\forall x \in]-1, 1[$, $\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.
2. Propriétés analytiques de $\arcsin$.
$\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ est la bijection réciproque de $\sin|_{[-\pi/2,\pi/2]}$. $\arcsin$ est continue sur $[-1, 1]$, strictement croissante, impaire, infiniment dérivable sur $[-1, 1]$ et $\forall x \in]-1, 1[$, $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
3. Équation fonctionnelle de $\arctan$.
$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \arctan(x) + \arctan(1/x) = \begin{cases} \pi/2 & x > 0 \\ -\pi/2 & x < 0 \end{cases}$$
4. Définition de ch et sh.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ et $\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$.
5. Relations fonctionnelles de $\arcsin$.
$\forall x \in [-1, 1]$, $\sin(\arcsin(x)) = x$, $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$ et $\forall x \in]1, 1[$, $\tan(\arcsin(x)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. Et $\forall x \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\arcsin(\sin(x)) = x$.
6. Relation entre $\arccos$ et $\arcsin$.
$\forall x \in [-1, 1]$, $\arccos(x) + \arcsin(x) = \pi/2$.
7. Formule de trigonométrie hyperbolique.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2 = 1$.
8. Relations fonctionnelles de $\arctan$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan(x)) = x$, $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Et $\forall x \in]-\pi/2, \pi/2[$, $\arctan(\tan(x)) = x$.

Exercice 2 :
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\arctan(x) = \arcsin(2x)$.

$\arctan$ est définie sur $\mathbb{R}$ et $\arcsin$ est définie sur $[-1, 1]$. Donc pour que l'équation ait un sens, il faut que $x \in [-1/2, 1/2]$.

Soit $x \in [-1/2, 1/2]$ telle que $\arcsin(2x) = \arctan(x)$.

$$\begin{aligned}
& \arcsin(2x) = \arctan(x) \\
\Longrightarrow\ & \sin(\arcsin(2x)) = \sin(\arctan(x)) \\
\Longrightarrow\ & 2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\
\Longrightarrow\ & 4x^2(1+x^2) = x^2 \\
\Longleftrightarrow\ & x^2(3+4x^2) = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & x = 0 && \text{car } 3+4x^2 > 0
\end{aligned}$$

Et il est assez facile de voir que 0 est solution : $\arctan(0) = 0 = \arcsin(0)$. Donc $\arcsin(2x) = \arctan(x) \iff x = 0$.