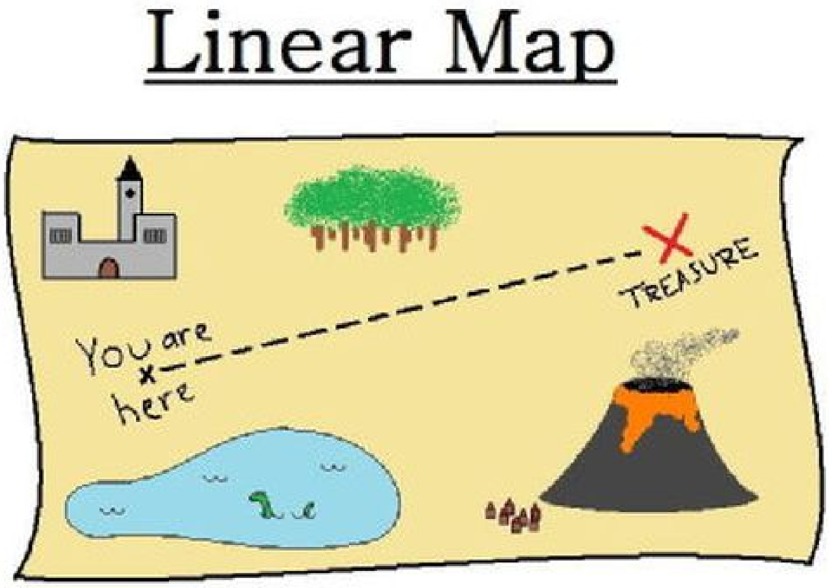
Chapitre 11
Applications Linéaires

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

12 décembre 2023



Maintenant que nous avons établit le nouveau milieu dans lequel nous allons travailler, il faut maintenant continuer dans l'étude de ce nouveau monde et introduire les "bonnes" applications compatibles avec les règles de ce nouveau monde. De façon un peu plus concrète, on va introduire les applications qui sont compatibles avec la structure d'espaces vectoriels. L'étude de ces applications va nous permettre de transporter ce que l'on sait d'un espace vectoriel à un autre. Ces applications, ce sont les applications linéaires. D'où le titre.

Pourquoi les endomorphismes injectifs sont-ils si cruels ?

Parce qu'ils n'ont pas de ker

L'algèbre est généreuse : elle donne souvent plus que ce qu'on lui demande.

D.MacHale

Table des matières

1 Définition et première propriété

1.1 Applications linéaires, Isomorphismes

Définition 1.1 (Application linéaire, $\mathcal{L}(E,F)$ [✓]) :
Soit E et F deux $\mathbb{K}$-ev.

- On appelle *application linéaire de E dans F* toute application $f : E \to F$ telle que

$$\forall x, y \in E,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

- On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Les applications linéaires sont les applications qui sont compatibles avec les structures d'ev.

Remarque :
En particulier, les applications linéaires sont des morphismes de groupes.

Exemple 1.1 :
Montrer que les applications suivantes sont des applications linéaires :

1. $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x-y, 2x+3y) \end{array}$
2. $v : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y+z, -y-z) \end{array}$
3. $w : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ u & \mapsto & v : \forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{n+1} \end{array}$

Théorème 1.1 (Structure $\mathcal{L}(E,F)$) :
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev.
$\mathcal{L}(E,F)$ est un $\mathbb{K}$-ev pour les lois usuelles de sommation et multiplication par des scalaires pour des applications. L'élément neutre pour la somme est l'application constante égale à 0_F.

Démonstration :
Il faut vérifier les 9 points de la définition des $\mathbb{K}$-ev. Laisser en exercice. □

Proposition 1.2 (Composition des applications linéaires) :
Soit E, F, G trois $\mathbb{K}$-ev. On a les opérations suivantes :

1. La composée d'application linéaire est linéaire, *i.e.*

$$\forall f \in \mathcal{L}(E,F),\ \forall g \in \mathcal{L}(F,G),\ g \circ f \in \mathcal{L}(E,G).$$

2. La composition est linéaire à droite et à gauche :
   (a) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\forall f \in \mathcal{L}(E,F)$, $\forall g_1, g_2 \in \mathcal{L}(F,G)$, $(\lambda g_1 + \mu g_2) \circ f = \lambda g_1 \circ f + \mu g_2 \circ f$
   (b) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\forall f_1, f_2 \in \mathcal{L}(E,F)$, $\forall g \in \mathcal{L}(F,G)$, $g \circ (\lambda f_1 + \mu f_2) = \lambda g \circ f_1 + \mu g \circ f_2$.

Les deux derniers points peuvent se condenser en un seul en disant que la composition est une application bilinéaire. Autrement dit

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F) \times \mathcal{L}(F,G) & \to & \mathcal{L}(E,G) \\ (f,g) & \mapsto & g \circ f \end{array}$$

est linéaire par rapport à chacune de ses variables (attention, ici, les variables sont des applications linéaires).

Définition 1.2 (Forme linéaire, Dual) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Une application linéaire $f : E \to \mathbb{K}$ s'appelle une *forme linéaire*.
On note également $E^* := \mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ et E^* est appelé *le dual de* E.

Exemple 1.2 :
L'application $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $f \mapsto f(2)$ est une forme linéaire. Elle s'appelle l'évaluation en 2 et se note parfois ev_2.

!!! ATTENTION !!!

⚠ Ne pas confondre E^* et $E \setminus \{0\}$ pour un espace vectoriel !

Définition 1.3 (Isomorphismes, $\mathrm{GL}(E,F)$ [✓]) :
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

- Une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ bijective est appelé *isomorphisme*.
- On note $\mathrm{GL}(E,F)$ l'ensemble des isomorphismes de E dans F.

Remarque :
On rajoute parfois l'adjectif "vectoriel" (on parle d'isomorphisme vectoriel). C'est pour insister sur le fait que c'est une application linéaire, une application entre espaces vectoriels.

En fait, "isomorphisme" veut dire étymologiquement "de même forme" (sous-entendu, de même structure algébrique). Le terme d'isomorphisme est utilisé pour des applications compatible aussi pour d'autres structures. On parle également d'isomorphismes pour des anneaux, des algèbres ou des groupes. Dans notre cas, seul les ev sont au programme, donc seul les applications linéaires nous intéressent. Donc on ne considérera toujours que des endomorphismes vectoriels et des isomorphismes vectoriels. Donc la précision "vectoriel" sera superflue. Mais elle peut apparaître dans la littérature.

Définition 1.4 (Espaces isomorphes) :
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev.

On dit que E et F sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme de E dans F.

Remarque :
On a bien sûr, si E et F sont isomorphes, $\mathrm{GL}(E,F) \subset \mathcal{L}(E,F)$.

Proposition 1.3 (Inverse d'isomorphisme, inverse d'une composée d'isomorphismes [✓]) :
Soit E, F, G trois $\mathbb{K}$-ev.

1. Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est un isomorphisme, alors f^{-1} (en tant qu'inverse d'application) est un isomorphisme d'ev de F sur E (*i.e.* $f^{-1} \in \mathrm{GL}(F,E)$)
2. Si $f \in \mathrm{GL}(E,F)$ et $g \in \mathrm{GL}(F,G)$, alors $g \circ f \in \mathrm{GL}(E,G)$ et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Démonstration :
Le deuxième point n'est pas dur. C'est d'abord le fait qu'une composé de bijection est une bijection, que la composée d'applications linéaires est encore linéaire et du premier point pour finir.

Soit $f \in \mathrm{GL}(E,F)$. Donc f est un isomorphisme, par définition de $\mathrm{GL}(E,F)$. Donc f est inversible pour la composition (définition de la bijectivité). Soit $x, y \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Donc $\exists a, b \in E$ tel que $f(a) = x$ et $f(b) = y$ par surjectivité de f. Alors

$$f^{-1}(\lambda x + \mu y) = f^{-1}(\lambda f(a) + \mu f(b)) \qquad \text{par def } a \text{ et } b$$

$$
\begin{aligned}
&= f^{-1}(f(\lambda a + \mu b)) && \text{par linéarité de } f \\
&= (f^{-1} \circ f)(\lambda a + \mu b) \\
&= \lambda a + \mu b \\
&= \lambda f^{-1}(x) + \mu f^{-1}(y)
\end{aligned}
$$

donc f^{-1} est linéaire.

Et bien sûr, par des propositions que l'on sait sur les applications bijectives dans le chapitre sur les ensembles et applications, on sait que f^{-1} est bijective. C'est donc une application linéaire bijective, donc un isomorphisme. $\square$

Remarque :
Voila le terme "d'identification" qui vient d'être mis à nu ! Toutes les "identifications" que vous connaissez sont en réalité des isomorphismes. On en verra quelques uns en particulier. Mais par exemple, l'identification d'un polynôme à ses coefficients est en fait l'utilisation de l'isomorphisme $\mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}_n[X]$ qu'on reverra.

!!! ATTENTION !!!

⚠ Donc dorénavant, on évitera d'utiliser le terme vague "d'identification" pour parler d'isomorphisme. Et on explicitera bien sûr l'isomorphisme que l'on utilise ainsi que les espaces vectoriels.

Exemple 1.3 :
On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right) \end{array}$$

Montrer que f est un isomorphisme et déterminer f^{-1}.

1.2 Endomorphismes, Automorphismes

Définition 1.5 (Endomorphismes) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev.

Une application linéaire de E dans E est appelé un *endomorphisme*. L'espace $\mathcal{L}(E, E)$ est noté $\mathcal{L}(E)$.

Définition 1.6 (Automorphismes) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev.

Un isomorphisme de E dans E est appelé un *automorphisme*. C'est un endomorphisme bijectif.

On note $\mathrm{GL}(E)$ l'ensemble $\mathrm{GL}(E, E)$. Il est appelé groupe linéaire de E.

Théorème 1.4 (Structure $\mathcal{L}(E)$ et $\mathrm{GL}(E)$ [✓]) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev.

L'espace $\mathcal{L}(E)$ est un $\mathbb{K}$-ev sur lequel, la composition $\circ$ est une LCI vérifiant :

1. $(\mathcal{L}(E), +, \times)$ est un $\mathbb{K}$-ev.
2. $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau d'élément neutre Id_E pour $\circ$.
3. $(\mathrm{GL}(E), \circ)$ est un groupe.

Remarque :
On dit que $(\mathcal{L}(E), +, \circ, \times)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre non commutative. Il y a donc deux structures qui se superposent sur $\mathcal{L}(E)$. La structure d'ev hérité de celle de E, et la structure d'anneau hérité de la nature des objets considérés, c'est-à-dire la composition et ses propriétés.

$\mathrm{GL}(E)$ est alors le groupe des inversibles de l'anneau $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$. Donc $\mathrm{GL}(E) = \mathcal{L}(E)^\times$ en réutilisant les notations du chapitre sur les anneaux.

Ce théorème contient, en condensé, toutes les propriétés des opérations sur $\mathcal{L}(E)$: l'associativité des trois opérations, la commutativité de $+$, la symétrisabilité de $+$, la distributivité de $\times$ et $\circ$ sur $+$, les éléments neutres, ...

Démonstration :
On sait déjà tout ça. On ne fait que le rappeler avec le vocabulaire savant et efficace des structures algébriques adéquats. Par exemple, on sait déjà que la composition est bilinéaire. En réécrivant la définition et en utilisant seulement la LCI, on a alors la distributivité de $\circ$ sur $+$ à droite et à gauche. D'après le chapitre sur les ensembles et applications, on sait déjà que $\circ$ admet un élément neutre qui est Id_E. On sait également que $\circ$ est associative. On sait aussi déjà, depuis quelques pages, que $\mathcal{L}(E)$ est un ev. En ne conservant que les propriétés sur la LCI et en rajoutant celles de la seconde LCI, on a une structure d'anneau pour $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$. Et par définition de $\mathrm{GL}(E)$ ainsi que du groupe des inversibles d'un anneau et du fait que c'est un groupe pour la seconde LCI, on a le dernier point. □

Remarque :
$\mathrm{GL}(E)$ est le groupe des inversibles pour la composition. Autrement dit, en réutilisant les notations du chapitre sur les groupes et anneaux, $\mathrm{GL}(E) = \mathcal{L}(E)^{\times}$.

!!! ATTENTION !!!

⚠ **La composition n'est pas commutative ! ! ! !**

Donc $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau non commutatif. Et donc $(\mathrm{GL}(E), \circ)$ est un groupe non abélien.

Exemple 1.4 :
On considère sur $\mathbb{R}^2$, les applications f et g définies par $f(x, y) := (0, x)$ et $g(x, y) := (y, 0)$. Montrer que $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Notation (f^n) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathcal{L}(E)$ et $n \in \mathbb{N}$. Comme $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$, on reprend les notations d'un anneau multiplicatif :
On note

$$f^n := \begin{cases} \mathrm{Id}_E & \text{si } n = 0 \\ \underbrace{f \circ f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n} & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque :
Il y a donc des problèmes de notations qui peuvent apparaître dans certains cas. Pour les formes linéaires notamment. Dans les ev, comme le produit n'a pas de sens, la notation de f^n n'a pas d'ambiguïté et est nécessairement la composition. Mais dans le cas de $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), la multiplication a un sens et on pourrait avoir la puissance n-ème des valeurs de f. Qui se note du coup de la même manière. Donc attention.

Pour éviter ces ambiguïté, je ferais une petite distinction de notation : $f^n(x)$ sera la composé et $f(x)^n$ sera la puissance. Donc $f^n(x) = f \circ \cdots \circ f(x)$ alors que $f(x)^n = f(x) \times \cdots \times f(x)$.

> $\sin^2\varphi$ is odious to me, even though Laplace made use of it ; should it be feared that $\sin^2\varphi$ might become ambiguous, which would perhaps never occur, or at most very rarely when speaking of $\sin(\varphi^2)$, well then, let us write $(\sin\varphi)^2$, but not $\sin^2\varphi$, which by analogy should signify $\sin(\sin\varphi)$.
>
> Carl Fridrich Gauss

Proposition 1.5 (Binôme de Newton et factorisation [✓]) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev, et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ **qui commutent**, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, (f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k}$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f^n - g^n = (f-g) \circ \sum_{k=0}^{n-1} f^k \circ g^{n-1-k}$$

Démonstration :
La démonstration est essentiellement la même que pour les complexes. Reprenez là et vous verrez que l'on utilise la commutativité de la multiplication dans les complexes. On en a besoin ici aussi. Il faut donc pouvoir commuter f et g. D'où la nécessité de l'hypothèse en plus. □

Exemple 1.5 :
Sur $\mathbb{R}^2$, on considère les applications $f(x,y) := (x,x)$, $g(x,y) := (x-y, y-x)$. Calculer alors $(f+g)^2$ de deux façons.

Définition 1.7 (Polynôme d'endomorphisme) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathcal{L}(E)$.
On appelle *polynôme en* f toute combinaison linéaire (donc finie) de la famille $(\mathrm{Id}_E, f, f^2, \dots)$. Autrement dit, $g \in \mathcal{L}(E)$ est un polynôme en f si $\exists n \in \mathbb{N}$ et $\exists a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tels que $g = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k \in \mathcal{L}(E)$.

Exemple 1.6 :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 2f + 3\,\mathrm{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Montrer que $f \in \mathrm{GL}(E)$ et déterminer f^{-1} en fonction de f.

!!! ATTENTION !!!

⚠ Attention en factorisant dans les polynômes d'endomorphismes ! ! ! Il reste l'élément neutre de l'opération sur laquelle on factorise, qui, ici, n'est PAS la multiplication. L'élément neutre n'est donc PAS le 1. Mais ici, l'opération étant la composition, il reste l'élément neutre pour la composition, c'est-à-dire Id_E.

2 Image, Noyau

2.1 Premières propriétés

Proposition 2.1 :
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
Alors $u(0_E) = 0_F$.

Remarque :
Cette proposition est en fait surtout utile pour montrer qu'une application n'est pas linéaire.

Démonstration :
On sait que $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall x \in E$, $u(\lambda x) = \lambda u(x)$. En particulier $u(0_E) = u(0_E) = 0 \times u(0_E) = 0_F$. □

Exemple 2.1 :
Montrer que l'application $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définit par $u(x, y) := (x + 1, y)$ n'est pas linéaire.

Théorème 2.2 (Image direct et réciproque d'un sev [✓]) :
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
L'image directe (resp. réciproque) de tout sev de E (resp. F) est un sev de F (resp. E).
Autrement dit :

1. $\forall E' \subset E$ sev de E, $u(E') \subset F$ est un sev de F
2. $\forall F' \subset F$ sev de F, $u^{-1}(F') \subset E$ est un sev de E.

Ce théorème est surtout utile pour montrer qu'un ensemble est un ev. C'est d'ailleurs la méthode la meilleure, la plus jolie. L'idéale pour montrer qu'un ensemble est un ev et de montrer qu'il est l'image directe ou réciproque par une bonne application linéaire d'un sev.

Démonstration :
Soit $E' \subset E$ un sev de E. Alors $u(E') \subset F$, par définition de u. Comme E' est un sev de E, par caractérisation des sev, $0_E \in E'$. Et donc, $0_F = u(0_E) \in u(E')$. Soit maintenant $x, y \in E'$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors, par linéarité de u, $\lambda u(x) + \mu u(y) = u(\lambda x + \mu y)$. Or E' étant un sev, il est stable par combinaison linéaire, et donc $\lambda x + \mu y \in E'$. Donc, par définition de l'image directe d'un ensemble, $\lambda u(x) + \mu u(y) = u(\lambda x + \mu y) \in u(E')$. Donc $u(E')$ est stable par combinaisons linéaires. Donc, par caractérisation des sev, $u(E')$ est un sev de F.

On procède de la même manière pour $u^{-1}(F')$ (à faire. C'est en bon entraînement pour voir si vous avez compris ce qu'un est un ev ou non). □

Exemple 2.2 :
Montrer que $E := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y = z + t = 0\}$ est $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2.2 Noyau et image

Définition 2.1 (Noyau, Image d'un endomorphisme [✓]) :
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

- On appelle *noyau de* u, noté $\ker(u)$ l'ensemble des antécédents de 0_F dans E, *i.e.*

$$\ker(u) := u^{-1}(\{0\}) = \{x \in E, u(x) = 0\}$$

- On appelle *image de* u, noté $\mathrm{Im}(u)$, l'ensemble de toutes ses images dans F, *i.e.*

$$\mathrm{Im}(u) := u(E) = \{u(x), x \in E\}$$

Ces notations doivent vous rappeler de bons souvenirs normalement.

Remarque :
$\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont *toujours* des sev. Ce sont les images et pré-images de sev par u.

Proposition 2.3 (Caractérisation de l'application nulle) :
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

$$u = 0 \iff u(E) = \{0_F\} \iff \ker(u) = E.$$

Démonstration :
Il suffit d'utiliser les définitions : $u = 0 \iff \forall x \in E,\ u(x) = 0 \iff \forall x \in E,\ x \in \ker(u) \iff E \subset \ker(u) \iff \ker(u) = E$ car $\ker(u)$ est un sev de E. Et aussi $u = 0 \iff u(E) = \{0_F\}$. □

Exemple 2.3 :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tel que

$$\mathrm{Im}(f - \lambda \,\mathrm{Id}_E) + \mathrm{Im}(f - \mu \,\mathrm{Id}_E) \neq E.$$

Montrer que $\lambda = \mu$. Que peut-on dire de la réciproque ?

Théorème 2.4 (Caractérisation injectivité pour une application linéaire [✓]) :
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

$$u \text{ injective } \iff \ker(u) = \{0\}.$$

Vous comprenez bien que ce théorème est absolument indispensable. C'est avec lui qu'on va travailler tous le temps. On va bien sûr passer notre temps à manipuler des applications linéaire et se demander si elles sont bijectives ou non. Donc ce sera regarder le noyau.

Démonstration :
Supposons que u soit injective. Soit $x \in \ker u$. Alors $u(x) = 0_F$n par définition du noyau. Or u est linéaire. Donc $u(0_E) = 0_F$. Donc, par transitivité de l'égalité, $u(x) = u(0_E)$. Donc, par injectivité de u, $x = 0_E$. Donc $\ker u \subset \{0\}$. La linéarité de u nous donne également $u(0_E) = 0_F$ et donc, par définition du noyau et par définition de l'inclusion, $\{0_E\} \subset \ker(u)$. Donc $\ker(u) = \{0_E\}$ par définition de l'égalité entre ensembles.

Inversement, supposons que $\ker u = \{0\}$. Soit $x, y \in E$ tel que $u(x) = u(y)$. Alors la linéarité de u nous donne $u(x - y) = 0$. Autrement dit $x - y \in \ker u$. Donc $x - y = 0$ et donc $x = y$. Donc u est injective par caractérisation de l'injectivité. □

Cette démo est un raisonnement d'algèbre linéaire typique. Il faut la connaître et la maîtriser absolument. Si ce n'est pas le cas, la suite va être pénible.

Remarque :
Les applications linéaires étant des applications classiques ayant des propriétés particulières, tout ce qui a été vu dans le chapitre sur les applications s'appliquent ici. On a donc en particulier $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est surjective si et seulement si $u(E) = F$. Comme avant.

On remarquera que la caractérisation au dessus n'est que la caractérisation de l'injectivité habituelle mais reformulé dans le cadre des applications linéaires, ce qui simplifie un peu les choses.

Exemple 2.4 :
Déterminer si les applications linéaires du début de chapitre sont injectives ou surjectives.

Proposition 2.5 (Noyau et image d'une restriction) :
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit E' un sev de E. Alors

$$\ker(u|_{E'}) = \ker(u) \cap E' \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(u|_{E'}) = u(E')$$

Démonstration :
Par définition des restrictions, on a $u|_{E'} : E' \to F$ et $\forall x \in E'$, $(u|_{E'})(x) = u(x)$. Donc

$$x \in \ker(u|_{E'}) \iff u|_{E'}(x) = 0 \iff \begin{cases} x \in E' \\ u(x) = 0 \end{cases} \iff x \in E' \cap \ker(u)$$

Et bien sur $\mathrm{Im}(u|_{E'}) = u|_{E'}(E') = u(E')$. □

2.3 Image d'une famille de vecteurs

Proposition 2.6 (Image d'une partie génératrice [✓]) :
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $A \subset E$. Alors

$$f(\mathrm{Vect}(A)) = \mathrm{Vect}(f(A)).$$

Démonstration :
Cette propriété vient de la linéarité de f. Si $x \in \mathrm{Vect}(A)$, alors $\exists n \in \mathbb{N}$, $\exists a_1, \ldots, a_n \in A$,

$\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, tels que $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k$. Donc $f(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(a_k)$ par linéarité. Donc $f(x) \in \mathrm{Vect}(f(A))$, par définition de $\mathrm{Vect}(f(A))$. Donc $f(\mathrm{Vect}(A)) \subset \mathrm{Vect}(f(A))$.

Inversement, si $x \in \mathrm{Vect}(f(A))$, alors $\exists m \in \mathbb{N}$, $\exists a_1, \ldots, a_m \in A$, $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{K}$, $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(a_k) = f(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k)$ par linéarité. Donc $x \in f(\mathrm{Vect}(A))$ et d'où l'autre inclusion. $\square$

Corollaire 2.7 (Image d'une famille génératrice [✓]) :
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev, E de dimension finie et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs de E génératrice E, $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Alors $f(\mathcal{B}) := (f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}\, f$.

Démonstration :
C'est évident avec la proposition précédente, puisque $E = \mathrm{Vect}(\mathcal{B})$. Donc $\mathrm{Im}(f) = f(E) = f(\mathrm{Vect}(\mathcal{B})) = \mathrm{Vect}(f(\mathcal{B}))$. $\square$

Corollaire 2.8 :
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev, E de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$

Si $\mathcal{B}$ est une famille de vecteurs de E génératrice de E et si f est surjective, alors F est de dimension finie et $f(\mathcal{B})$ est une famille génératrice de F.

Démonstration :
Évident. On reprend la proposition précédente. Par surjectivité de f, on a donc $F = \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(\mathcal{B}))$. Or $\mathcal{B}$ est une famille finie de vecteurs de E. Donc, par définition, F est engendré par une famille finie, et donc F est de dimension finie. Et de plus, $F = \mathrm{Vect}(f(\mathcal{B}))$, donc, par définition, $f(\mathcal{B})$ est une famille génératrice de F. $\square$

Proposition 2.9 (Caractérisation d'injectivité par les images de familles libres) :
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev, $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

f est injective si et seulement si l'image par f de toute famille libre est une famille libre.

Démonstration :
$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons f injective. Soit $e_1, \dots, e_n$ une famille libre de vecteurs de E. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tel que $\sum_{k=1}^n \lambda_k f(e_k) = 0_F$. Par linéarité, on en déduit $\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \in \ker f$. Mais comme f est injective, par caractérisation de l'injectivité par le noyau, on en déduit que la somme est nulle,*i.e.* $\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k = 0_E$. Et la liberté de la famille $(e_1, \dots, e_n)$ nous fournit alors la nullité de chacun des coefficients. Donc la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est libre.

$\boxed{\Leftarrow}$ On va démontrer la contraposée du sens indirect. Supposons donc que f ne soit pas injective. Donc, par caractérisation de l'injectivivté par le noyau, $\ker(f) \neq \{0_E\}$. Donc $\exists x \in \ker f$ tel que $x \neq 0_E$. Alors la famille (x) est libre. Mais l'image de cette famille est le vecteur nul de F qui n'est pas une famille libre (*i.e.* $f((x)) = (0_F)$). Donc il existe une famille libre dont l'image par f n'est pas libre. □

Dit autrement, si f n'est pas injective, son noyau n'est pas réduit à 0. Donc on peut trouver une famille libre de vecteurs dans $\ker(f)$. Et l'image de cette famille n'est clairement pas libre.

Donc dès que f est non injective, elle peut envoyer une famille de vecteurs libre sur une famille liée, dès que cette famille contient un vecteur du noyau.

Mais attention, elle peut envoyer certaines familles libres sur une familles libre quand même !

Remarque :
En particulier, en combinant les deux propositions précédentes, l'image d'une base est une base de l'image. Ce qui sera cruciale dans les ev de dimension fini. Mais on reverra ça.

Exemple 2.5 :
Soit l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) & \mapsto & (2x - y + t, x - y + z, t - z + y) \end{array}$$

Montrer que φ est linéaire. Déterminer une famille génératrice de $\operatorname{Im}\varphi$. La famille $((2, 0, 0, -1), (1, 2, 1, -1), (2, 1, 1, -1))$ est-elle libre dans $\mathbb{R}^4$? Et son image par φ ? Que peut-on en déduire sur φ ?

3 Applications linéaires en dimension finie

3.1 Applications linéaires et dimensions

Proposition 3.1 (Comparaison entre $\dim(f(V))$ et $\dim(V)$ [✓]) :
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev, E de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Si $V \subset E$ est un sev de E, alors $f(V)$ est aussi de dimension finie et $\dim f(V) \leq \dim V$.

Démonstration :
Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de V. Donc $n = \dim(V)$. Alors $f(V) = f(\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$ donc $f(V)$ est engendré par une famille finie. Donc $f(V)$ est bien de dimension finie et $\dim f(V) \leq \dim V$ en extrayant une base de la famille génératrice par le théorème de la base extraite. □

Théorème 3.2 (Lien dimension-inj/surj) :
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Si f est injective, alors $\dim E \leq \dim F$
2. Si f est surjective, alors $\dim E \geq \dim F$.

Démonstration :

1. On sait que l'image d'une famille libre par une application linéaire injective est encore une famille libre. Donc l'image d'une base de E donne une famille libre de F. Comme c'est une famille libre de F, son cardinal est inférieur à la dimension de F. Et d'où le résultat.
2. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Alors $f(\mathcal{B})$ est une famille génératrice de F (mais pas forcément libre). Donc son cardinal est plus grand que la dimension de F. Mais elle est de même cardinal que $\mathcal{B}$, *i.e.* que la dimension de E. Donc $\dim E = \mathrm{Card}\, \mathcal{B} = \mathrm{Card}\, f(\mathcal{B}) \leq \dim F$.

□

!!! ATTENTION !!!

⚠ Ce n'est qu'une implication ! Ce n'est certainement pas une équivalence. Ce n'est pas parce que $\dim E \leq \dim F$ que toutes les applications linéaire de E dans F sont surjectives ! Il suffit de considérer l'application constante égale à 0. Elle est linéaire mais pas surjective.

Et ça ne fonctionne pas non plus pour l'injectivité. La même application linéaire fournit aussi un contre-exemple.

Proposition 3.3 (L'injectivité conserve les dimensions [✓]) :
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev, E de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Si f est injective et V est un sev de E, alors $\dim(f(V)) = \dim V$.

Démonstration :
On sait déjà que $\dim f(V) \leq \dim V$. Mais l'image d'une base de V donne une famille libre dans $f(V)$, car f est injective. Mais une base de V est une famille génératrice de V, donc son image est une famille génératrice de $f(V)$. Donc l'image d'une base de V est une famille libre et génératrice de $f(V)$, donc une base de $f(V)$. D'où l'égalité de dimension. □

!!! ATTENTION !!!

⚠ Ça ne dit pas que E et F sont de même dimension ! Ça dit que E et $f(E)$ sont de même dimension.

Corollaire 3.4 (Les isomorphismes conservent les dimensions) :
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Si f est un isomorphisme, alors $\dim E = \dim F$.

Démonstration :
Il suffit de reprendre le théorème précédent avec $V = E$. □

Théorème 3.5 (Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$ [✓]) :
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.
Alors $\mathcal{L}(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et

$$\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim(E) \times \dim(F)$$

Démonstration (Skecth) *:*
On va admettre ce résultat. La démonstration n'est pas excessivement dur. On peut déterminer une base sans trop grande difficulté de $\mathcal{L}(E,F)$. C'est un peu long. Et pas très pertinent à mettre dans ce cours. C'est plutôt un DM. Le principe est d'utiliser des formes linéaires. Si $(e_1,\ldots,e_n)$ est une base de E et $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_p)$ une base de F, on peut considérer les $(e_i^*\varepsilon_j)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ qui sont des applications linéaires (où $e_i^*:E\to\mathbb{K}$ et $e_i^*(e_k)=\delta_{i,k}$). Il faut donc manipuler tout un tas de notations. Ce qui est formateur techniquement et conceptuellement, mais peu pertinent dans un cours.

Par ailleurs, on pourra le montrer beaucoup plus facilement une fois qu'on aura introduit les matrices. □

3.2 Applications linéaires et bases

Théorème 3.6 (Construction d'une application linéaire à partir de l'image d'une base [✓]) :
Soit E,F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f\in\mathcal{L}(E,F)$.

Si $\mathcal{B}:=(e_1,\ldots,e_n)$ est une base de E et $\mathcal{C}:=(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ une famille de vecteurs de F, alors il existe une unique application linéaire $f\in\mathcal{L}(E,F)$, telle que $f(\mathcal{B})=\mathcal{C}$, *i.e.* telle que

$$\forall i\in\{1,\ldots,n\},\ f(e_i)=\varepsilon_i$$

Démonstration :
Commençons par l'unicité. Supposons donc qu'il existe deux applications f et g comme dans l'énoncé. Alors $f-g$ est encore une application linéaire car $\mathcal{L}(E,F)$ est un $\mathbb{K}$-ev. Et $\forall i\in\{1,\ldots,n\}$, $(f-g)(e_i)=\varepsilon_i-\varepsilon_i=0$. Donc $(f-g)(\mathcal{B})=(0,\ldots,0)$. Comme $\mathcal{B}$ est une base de E et $f-g$ est linéaire, on en déduit donc $f-g=0$ (plus précisément : $\mathrm{Im}(f-g)=(f-g)(E)=(f-g)(\mathrm{Vect}(\mathcal{B}))=\mathrm{Vect}((f-g)(\mathcal{B}))=\mathrm{Vect}(0)=\{0_F\}$). Donc $f=g$.

On définit l'application f de E dans F, par $\forall x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{K}$, $f\left(\sum_{k=1}^n x_ke_k\right):=\sum_{k=1}^n x_k\varepsilon_k$. On va montrer que cela définit une application $\mathbb{K}$-linéaire de E dans F. On va d'abord montrer qu'on a bien une application et ensuite qu'elle est linéaire.

Soit $x\in E$. Alors $\exists!(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{K}^n$ tel que $x=\sum_{k=1}^n x_ke_k$. Donc la somme $\sum_{k=1}^n x_k\varepsilon_k$ est déterminé de manière unique par les x_k. Donc à un vecteur $x\in E$ donné, son image par f est unique. Donc f est bien une application.

Soit $x,y\in E$ et $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$. Comme $\mathcal{B}$ est une base de E, $\exists x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n\in\mathbb{K}$ tel que $x=\sum_{k=1}^n x_ke_k$ et $y=\sum_{k=1}^n y_ke_k$. Donc par sommation et en utilisant la distributivité dans E, on a $\lambda x+\mu y=\sum_{k=1}^n(\lambda x_k+\mu y_k)e_k$. Donc, par définition de f, $f(\lambda x+\mu y)=\sum_{k=1}^n(\lambda x_k+\mu y_k)\varepsilon_k=\lambda\sum_{k=1}^n x_k\varepsilon_k+\mu\sum_{k=1}^n y_k\varepsilon_k=\lambda f(x)+\mu f(y)$. Donc f est linéaire. □

Autrement dit, on peut fabriquer une application linéaire à partir de l'image d'une base en "étendant" par linéarité l'application.

Corollaire 3.7 :
Une application linéaire entre espaces vectoriels de dimension finie est entièrement déterminée par l'image d'une base.

Ce résultat est fondamental (encore) dans l'étude des applications linéaires entre ev de dimension finie. Ce théorème nous dit donc qu'une application linéaire peut être résumé simplement à ce qu'elle fait sur une base. Ce qui est beaucoup plus simple. Et la démonstration fournit la méthode pour retrouver l'application linéaire qui se cache derrière une base et son image. La suite sera d'ailleurs beaucoup basé sur ce théorème. Le lien avec les matrices utilise ce résultat.

Exemple 3.1 :
Montrer que $(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer une expression de l'application $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$ telle que $f(1,1,1)=(1,0)$, $f(0,1,1)=(0,1)$ et $f(0,0,1)=(1,1)$.

Théorème 3.8 (Décomposition d'une application linéaire relativement à une somme directe ([✓])) :
Soit E,F deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Soit E_1,E_2 deux sev supplémentaires de E.

Alors f est entièrement déterminée par $f|_{E_1} \in \mathcal{L}(E_1,F)$ et $f|_{E_2} \in \mathcal{L}(E_2,F)$, autrement dit $\exists!(f_1,f_2) \in \mathcal{L}(E_1,F)\times\mathcal{L}(E_2,F)$ telles que $\forall(x_1,x_2) \in E_1\times E_2$, $f(x_1+x_2)=f_1(x_1)+f_2(x_2)$. Et donc $f_1 = f|_{E_1}$ et $f_2 = f|_{E_2}$.

On notera que comme E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E, $\forall x \in E$, $\exists!(x_1,x_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $x = x_1 + x_2$. Et donc f est parfaitement définie sur E.

Démonstration :
On pose $f_1 = f|_{E_1}$ et $f_2 = f|_{E_2}$. On sait que $\forall x \in E$, $\exists!(x_1,x_2) \in E_1 \times E_2$ tels que $x = x_1 + x_2$. Alors $f(x) = f(x_1) + f(x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$. Donc $f(x)$ est déterminée par $f_1(x_1)$ et $f_2(x_2)$. Et bien sûr, f_1 et f_2 sont uniques puisque ce sont des restrictions de f.

Inversement, si on prend $f_1 \in \mathcal{L}(E_1,F)$ et $f_2 \in \mathcal{L}(E_2,F)$. On définit $f : E \to F$ tel que $f(x) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$ avec $x = x_1 + x_2$ dans la décomposition $E = E_1 \oplus E_2$. On montre facilement que cette application est linéaire. Et par définition de f, $f_1 = f|_{E_1}$ et $f_2 = f|_{E_2}$. $\square$

Ce théorème est très important. Il permet de pouvoir découper les choses. Il prendra vraiment tout son sens surtout l'année prochaine. Mais déjà, il nous dit que l'on peut découper l'étude de f à simplement E_1 et ensuite E_2. Et connaître f sur chacun de ces sev revient à connaître f entièrement. On ne perd aucune information en scindant les choses en petits bouts.

Exemple 3.2 :
Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $F := \mathrm{Vect}((1,1,1),(1,-1,-1))$ et $G := \mathrm{Vect}((1,0,-1))$. On pose $f \in \mathcal{L}(F)$ définie par $f(1,1,1) = (1,-1,-1)$ et $f(1,-1,-1) = (1,1,1)$ et $g \in \mathcal{L}(G)$ définie par $g(1,0,-1) = (-1,0,1)$. Montrer que l'on définit ainsi une application $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ que l'on déterminera dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Théorème 3.9 (Caractérisation de l'inj/surj par l'image d'une base [✓]) :
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{B}$ une base de E.

1. f est injective si et seulement si $f(\mathcal{B})$ est libre.
2. f est surjective si et seulement si $f(\mathcal{B})$ engendre F
3. f est un isomorphisme si et seulement si $f(\mathcal{B})$ est une base de F

Démonstration :
On note $\mathcal{B} := (e_1, \dots, e_n)$.

1. Le sens directe a déjà été fait. Il faut faire seulement le sens indirecte. On suppose donc que $f(\mathcal{B})$ est libre. Soit $x \in \ker f$. Alors $\exists x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ tels que $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$. Donc, par linéarité, $\sum_{k=1}^n x_k f(e_k) = 0$. Mais la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est libre, donc $x_1 = \cdots = x_n = 0$. Donc $x = 0$ et donc f est injective.
2. Le sens directe a déjà été fait aussi. Il faut donc seulement s'occuper du sens indirecte. Soit $y \in F$. La famille $f(\mathcal{B})$ engendre F, donc $\exists y_1, \dots, y_n \in \mathbb{K}$ tels que $y = \sum_{k=1}^n y_k f(e_k)$. Par linéarité de f, on a donc $y = f(\sum_{k=1}^n y_k e_k)$. Et $x = \sum_{k=1}^n y_k e_k \in E$. Donc $y \in \mathrm{Im}\, f$ et donc f est surjective.
3. Ce point est immédiat en utilisant les deux premiers.

□

Théorème 3.10 (Caractérisation pour deux espaces isomorphes [✓]) :
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.
E et F sont isomorphes si et seulement si $\dim E = \dim F$.

Démonstration :
Si les deux espaces sont isomorphes, un isomorphisme transforme une base de l'un en une base de

l'autre et donc E et F ont même dimension (les bases ont le même cardinal).

Inversement, si $\dim E = \dim F$, par détermination d'une application par l'image d'une base, on a une application linéaire qui transforme la base de l'un en une base de l'autre. Cette application sera donc un isomorphisme et donc les espaces sont isomorphes. □

4 Rang d'une application linéaire

Définition 4.1 (Rang d'une application linéaire [✓]) :
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev, E de dimensions finies et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

On appelle *rang de f*, la dimension de l'image de f. Il est noté $\operatorname{rg} f$. Donc $\operatorname{rg} f := \dim(\operatorname{Im} f)$.

Remarque :
$\operatorname{rg} f = 0 \iff f = 0$

Exemple 4.1 :
Soit l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que $f(x, y, z) := (2x - y, y - 2z, x - z)$. Déterminer $\operatorname{rg} f$.

Proposition 4.1 :
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev, E de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{B}$ une base de E, alors

$$\operatorname{rg} f = \operatorname{rg}(f(\mathcal{B}))$$

Démonstration :
On sait que $f(\mathcal{B})$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$. Donc $\operatorname{rg} f = \dim(\operatorname{Im} f) = \dim(\operatorname{Vect} f(\mathcal{B})) = \operatorname{rg} f(\mathcal{B})$. □

Proposition 4.2 (Caractérisation de l'inj/surj par le rang [✓]) :
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

1. $\operatorname{rg} f \leq \dim E$. De plus, $\operatorname{rg}(f) = \dim(E) \iff f$ est injective.
2. $\operatorname{rg} f \leq \dim F$. De plus, $\operatorname{rg}(f) = \dim(F) \iff f$ est surjective.

Démonstration :
Soit $\mathcal{B}$ une base de E.

1. On a $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} f(\mathcal{B})$. Donc $\operatorname{rg} f \leq \operatorname{Card}(f(\mathcal{B})) = \operatorname{Card}(\mathcal{B}) = \dim E$. Et on égalité si et seulement si $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} f(\mathcal{B}) = \operatorname{Card}(f(\mathcal{B}))$ donc si l'image d'une base est une famille libre, par caractérisation de la liberté par le rang. Et par caractérisation de l'injectivité par l'image d'une base, on en déduit $\operatorname{rg}(f) = \dim(E) \iff f$ est injective.
2. On a $f(\mathcal{B})$ est une famille de vecteurs de F, donc $\operatorname{Vect}(f(\mathcal{B}))$ est un sev de F, donc $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} f(\mathcal{B}) = \dim \operatorname{Vect}(f(\mathcal{B})) \leq \dim F$. Et on a égalité si et seulement si $\dim \operatorname{Vect}(f(\mathcal{B})) = \dim F$ si et seulement si $\operatorname{Vect}(f(\mathcal{B})) = F$ si et seulement si $f(\mathcal{B}))$ engendre F si et seulement si l'image d'une base de E engendre F et donc f est surjective.

□

Remarque :
On pourra retenir ça sous la forme

$$\forall f \in \mathcal{L}(E, F),\ \operatorname{rg}(f) \leq \min(\dim E, \dim F)$$

et les cas d'égalités sont à étudier à part.

Théorème 4.3 (Rang d'une composée d'application linéaire) :
Soit E, F, G trois $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors

$$\operatorname{rg}(g \circ f) \leq \min(\operatorname{rg} f, \operatorname{rg} g)$$

Démonstration :
On a

$$\operatorname{rg} g \circ f = \dim g(f(E))$$

D'abord $g(f(E)) \subset g(F)$ donc $\operatorname{rg}(g \circ f) = \dim g(f(E)) \leq \dim g(F) = \operatorname{rg}(g)$. D'autre par $\dim g(f(E)) = \operatorname{rg} g\big|_{f(E)} \leq \dim f(E) = \operatorname{rg} f$. D'où la relation. □

Proposition 4.4 (Rang d'une composée par une injection/surjection) :
Soit E, F, G trois $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

1. Si f est surjective, alors $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} g$
2. Si g est injective, alors $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} f$

Démonstration :

1. Si f est surjective, on a $f(E) = F$, donc $g(f(E)) = g(F)$. Donc $\operatorname{rg} g \circ f = \operatorname{rg} g$.
2. Si g est injective, alors $\operatorname{rg} g \circ f = \operatorname{rg} g\big|_{f(E)} = \dim f(E) = \operatorname{rg} f$.

□

Corollaire 4.5 :
On ne change pas le rang d'une application linéaire en composant pas un isomorphisme.

Démonstration :
C'est les deux points de la proposition précédente fusionnés en un seul point. □

Théorème 4.6 (Supplémentaire de $\ker(f)$ [✓]) :
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Alors tout supplémentaire de $\ker f$ est isomorphe à $\operatorname{Im} f$.

Démonstration :
Soit H un supplémentaire de $\ker f$ dans E. On considère $\widetilde{f} : H \to \operatorname{Im} f$ la restriction de f à H. Par restriction, $\widetilde{f}$ est une application linéaire. Et si $x \in \ker \widetilde{f}$, alors $\widetilde{f}(x) = 0$. Donc $f(x) = 0$ par def de $\widetilde{f}$. Donc $x \in \ker f$. Mais par def de $\widetilde{f}$, $x \in H$. Donc $x \in H \cap \ker f = \{0\}$. Donc $\ker \widetilde{f} = \{0\}$. Donc $\widetilde{f}$ est injective.

D'autre part, si $y \in \operatorname{Im} f$, alors $\exists x \in E$ tel que $f(x) = y$. En utilisant la somme directe, $\exists (x_0, x_1) \in \ker(f) \times H$ tel que $x = x_0 + x_1$. Donc, par linéarité de f, $y = f(x) = f(x_0 + x_1) = f(x_1)$. Donc $\exists x_1 \in H$ tel que $y = f(x_1) = \widetilde{f}(x_1)$. Donc $y \in \operatorname{Im}(\widetilde{f})$. Donc $\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Im}(\widetilde{f}) \subset \operatorname{Im}(f)$. Donc $\widetilde{f}$ surjective.

Finalement, $\widetilde{f}$ est un isomorphisme. □

Ce théorème est fondamental car il est la clef de voûte du prochain théorème qui, lui, est au centre des études d'applications linéaires. En fait, ce théorème est plus un lemme pour le théorème d'après. Mais ce lemme est très important. On le réutilise souvent. On refait la construction de la démonstration très régulièrement. Il faut absolument l'avoir bien en tête.

Théorème 4.7 (Théorème du rang [✓]) :
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On a

$$\dim E = \dim(\ker f) + \operatorname{rg} f$$

Démonstration :
Soit H un supplémentaire de $\ker f$ dans E (H existe car E est de dimension finie). Donc $E = H \oplus \ker f$. On a donc $\dim E = \dim H + \dim \ker f$. Mais on sait que H est isomorphe à $\operatorname{Im} f$, d'après le lemme précédent. Donc $\dim H = \dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg} f$. Donc $\dim E = \dim \ker f + \operatorname{rg} f$. □

Inutile de précisé combien ce théorème est fondamental. Le nombre de fois où vous l'utiliserez s'en chargera.

Exemple 4.2 :
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que $f(x, y, z) := (x + 2y + z, y - x, 2x + y + z)$. Déterminer une base de $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$.

Exemple 4.3 :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ telles que $f \circ g = 0$. Montrer que

$$\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g \leq \dim E$$

Exemple 4.4 :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\ker f = \ker f^2$. Montrer que $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaire dans E.

Théorème 4.8 (Théorème d'isomorphisme [✓]) :
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies tels que $\dim E = \dim F = n \in \mathbb{N}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
On a équivalence entre :

(i) f est un isomorphisme

(ii) f est injective

(iii) f est surjective

(iv) $\operatorname{rg} f = n$

(v) $\exists g \in \mathcal{L}(F, E)$, $g \circ f = \mathrm{Id}_E$.

(vi) $\exists h \in \mathcal{L}(F, E)$, $f \circ h = \mathrm{Id}_F$.

et dans ce cas $g = h = f^{-1}$

Donc il suffit d'inverser une application linéaire à droite ou à gauche pour l'inverser tout court.

Démonstration :
$\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$ RAD. Si f est bijective, alors f est injective (c'est dans la définition de la bijectivité).

$\boxed{(ii) \Rightarrow (iii)}$ Supposons f injective. Par le théorème du rang, $\dim E = \dim \ker f + \operatorname{rg} f$. Mais $\dim \ker f = 0$ par caractérisation de l'injectivité par le noyau. Donc $\dim E = \dim F = \operatorname{rg} f$. Donc $f(E)$ est un sev de F de même dimension que F, donc il sont égaux et donc f est surjective.

$\boxed{(iii) \Rightarrow (iv)}$ Supposons f surjective. Alors $\operatorname{rg} f = \operatorname{Im}(\operatorname{Im}(f)) = \dim F = \operatorname{rg}(n)$. Voilà. On l'avait déjà vu dans la caractérisation de la surjectivité par le rang.

$\boxed{(iv) \Rightarrow (i)}$ Supposons $\operatorname{rg}(f) = n$. Par théorème du rang, $\dim E = \dim \ker f + \operatorname{rg} f = \dim \ker f + \dim E$. Donc $\dim \ker f = 0$ donc $\ker(f) = \{0\}$ et donc f est injective par caractérisation de l'injectivité par le noyau. Or $\operatorname{rg}(f) = \dim(F)$, donc par caractérisation de la surjectivité par le rang, f est surjective. Donc f est bijective. Donc f est un isomorphisme.

$\boxed{(i) \Rightarrow (v)}$ Rien à faire. Si f est bijective, elle est inversible pour la composition (à droite et à gauche). Donc en particulier f est inversible à gauche.

$\boxed{(i) \Rightarrow (vi)}$ Rien à faire non plus. Même chose que précédemment. f est bijective, donc inversible pour la composition, donc inversible à droite pour la composition.

$\boxed{(v) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i)}$ Supposons $\exists g \in \mathcal{L}(F, E)$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$. L'application $g \circ f$ est injective (puisque bijective), donc f est injective.

$\boxed{(vi) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i)}$ Supposons $\exists h \in \mathcal{L}(F, E)$ telle que $f \circ h = \mathrm{Id}_F$. L'application $f \circ h$ est surjective et donc f est surjective.

Si $g \circ f = \mathrm{Id}_E$, alors $f^{-1} = \mathrm{Id}_E \circ f^{-1} = g \circ f \circ f^{-1} = g$, par associativité de $\circ$. De même, si $f \circ h = \mathrm{Id}_F$, on a $f^{-1} = f^{-1} \circ f \circ h = h$. □

Remarque :
Ce théorème est surtout utile pour les endomorphisme. Il permet de caractérisé les automorphismes.

Exemple 4.5 :
soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) := (y + z, z + x, x + y)$. Montrer que $f \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^3)$.

Exemple 4.6 :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, $u, n \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ n = n \circ u$, $u \neq 0$ et n nilpotente. Montrer que

$$\mathrm{rg}(u \circ n) < \mathrm{rg}(u).$$

5 Projecteurs, Symétries, Homothéties

5.1 Homothéties

Définition 5.1 (Homothéties) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev. On définit *une homothéties* h *de rapport* $k \in \mathbb{K}$ par

$$h : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & kx \end{array}$$

Proposition 5.1 (Homothéties) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et h une homothétie vectorielle de rapport $k \in \mathbb{K}$.
Alors $h \in \mathcal{L}(E)$ et

$$h \in \mathrm{GL}(E) \iff k \neq 0$$

Démonstration :
C'est pas dur. □

5.2 Projecteurs et symétries

Définition 5.2 (Symétrie vectorielle et projecteur) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soit F, G deux sev supplémentaire de E. Donc $\forall x \in E$, $\exists!(x_F, x_G) \in F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$.

- On appelle *projecteur de E sur F parallèlement à G*, l'application

$$p_F : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x_F \end{array}$$

- On appelle *symétrie de E par rapport à F parallèlement à G* l'application

$$s : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x_F - x_G \end{array}$$

- Le sev G est appelé *la direction* du projecteur et de la symétrie.

Les sev F et G sont appelés les *éléments caractéristiques* de p et s. Donc déterminer les éléments caractéristiques d'un projecteur ou d'une symétrie est déterminer les sev supplémentaires définis par la projection ou la symétrie.

Remarque :
Les projecteurs et symétries existent aussi en dimension infinie. On a fait ici aucune hypothèse sur la dimension de E. Il suffit d'avoir deux supplémentaires dans E pour pouvoir définir un projecteurs et une symétrie.

Proposition 5.2 (Propriétés des projecteurs) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev, F, G deux sev supplémentaire dans E et p la projection sur F parallèlement à G. Alors :

(i) $p \in \mathcal{L}(E)$

(ii) $p^2 = p$

(iii) $\ker p = G$, $\operatorname{Im} p = \ker(p - \mathrm{Id}_E) = F$

Démonstration :

1. Il faut vérifier la linéarité. Laisser en exercice.
2. Soit $x \in E$ Soit $(x_F, x_G) \in F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$. Alors, par définition de p, $p(x) = x_F = x_F + 0$ et $(x_F, 0) \in F \times G$. On a donc la décomposition de $p(x)$ dans la somme directe $F \oplus G$ (on a bien sa décomposition puisque la décomposition est unique). Donc, par def de p, $p^2(x) = p(p(x)) = x_F = p(x)$.
3. Soit $x \in G$. Alors $x = 0 + x$ est la décomposition de x dans la somme directe $F \oplus G$. Donc

$p(x) = 0$ par def de p. Donc $G \subset \ker(p)$. Inversement, soit $x \in \ker(p)$. Soit $(x_F, x_G) \in F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$. Alors $p(x) = x_F = 0$, on en déduit $x = x_G$ donc $x \in G$. Donc $\ker(p) \subset G$. Et donc $\ker(p) = G$.

Soit $x \in F$. Donc la décomposition de x dans la somme directe $F \oplus G$ est $x = x + 0$. Donc, par définition de p, $p(x) = x$. Et donc $x \in \mathrm{Im}(p)$. Donc $F \subset \mathrm{Im}(p)$. Soit $x \in \mathrm{Im}(p)$. Or, par définition de p, $p(x) \in F$. Donc $\mathrm{Im}(p) \subset F$. Donc $\mathrm{Im}(p) = F$.

Enfin, si $x \in F$, alors $p(x) = x$. Donc $(p - \mathrm{Id}_E)(x) = 0$. Donc $x \in \ker(p - \mathrm{Id}_E)$. Et si $x \in \ker(p - \mathrm{Id}_E)$, alors, par définition du noyau, $p(x) - x = 0$. Donc $x = p(x)$ et donc $x \in \mathrm{Im}(p) = F$. D'où $\mathrm{Im}(p) = F = \ker(p - \mathrm{Id}_E)$.

□

Proposition 5.3 (Caractérisation des projecteurs) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $p \in \mathcal{L}(E)$.

p est un projecteur si et seulement si $p^2 = p$. Et dans ce cas, $E = \ker p \oplus \mathrm{Im}\, p$ et p est le projecteur sur $\mathrm{Im}\, p = \ker(p - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\ker p$.

Démonstration :
Le sens direct a déjà été fait. On suppose donc que $p^2 = p$. Donc $p \circ (p - \mathrm{Id}_E) = 0$.

On a facilement $\ker(p - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Im}\, p$. En effet, si $x \in E$, on a $p(x) = p^2(x) = p(p(x))$. Donc $(p - \mathrm{Id}_E)(p(x)) = 0$ donc $p(x) \in \ker(p - \mathrm{Id}_E)$ donc $\mathrm{Im}\, p \subset \ker(p - \mathrm{Id}_E)$. Inversement, si $x \in \ker(p - \mathrm{Id}_E)$, on a $p(x) = x$ donc $x \in \mathrm{Im}\, p$. D'où l'égalité.

On va montrer que $\ker p \oplus \ker(p - \mathrm{Id}_E) = E$. Soit $x \in \ker p \cap \ker(p - \mathrm{Id}_E)$. Donc $(p - \mathrm{Id}_E)(x) = 0$, *i.e.* $p(x) = x$. Mais d'un autre côté, $p(x) = 0$. Donc $x = 0$. Donc $\ker p \cap \ker(p - \mathrm{Id}_E) = \{0\}$.

Il reste juste à montrer que $E = \ker p + \mathrm{Im}\, p$. Soit $x \in E$. On a (*** ASTUCE ***) : $x = p(x) + (x - p(x))$. Bien sûr, $p(x) \in \mathrm{Im}\, p$. Donc il suffit de montrer que $x - p(x) \in \ker p$. Mais $p(x - p(x)) = p(x) - p^2(x) = 0$ par linéarité et par propriété de p ($p^2 = p$). □

Remarque :
On ne pouvait pas ici utiliser le théorème du rang puisqu'on a aucune information sur la dimension de E. Autrement dit, E pourrait très bien être de dimension infinie. C'est pour ça qu'on a utilisé cette "astuce". Cette astuce fonctionne dans tous les cas (dimension finie ou non) et peut être réutilisée dans d'autres situations. Dans le cas où E est de dimension finie, il est possible de faire autrement en utilisant la rigidité supplémentaire apportée par les dimensions (le th du rang, par exemple).

Exemple 5.1 :
Montrer que

$$p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & \frac{1}{2}(x-z, z-x, z-x) \end{array}$$

est un projecteur dont on déterminera les éléments caractéristiques.

Proposition 5.4 (Propriétés des symétries) :
soit E un $\mathbb{K}$-ev et F, G deux sev supplémentaires de E. Soit s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Alors

1. $s \in \mathcal{L}(E)$
2. $s^2 = \mathrm{Id}_E$
3. $\ker(s - \mathrm{Id}_E) = F$ et $\ker(s + \mathrm{Id}_E) = G$

Démonstration :

1. La linéarité n'est pas dure. Exercice.
2. Soit $x \in E$. x se décompose selon la somme directe en $x = x_F + x_G$. Donc $s(x) = x_F - x_G$. Alors $s^2(x) = s(x_F - x_G) = x_F - (-x_G) = x$. Donc $s^2 = \mathrm{Id}_E$.
3. Soit $x \in F$. Alors $x = x + 0$ dans la décomposition en somme directe de E et donc $s(x) = x$. Donc $x \in \ker(s - \mathrm{Id}_E)$. Inversement, si $x \in \ker(s - \mathrm{Id}_E)$, on a $s(x) = x$. Et d'autre part $x = x_F + x_G$ donc $s(x) = x_F - x_G$. Donc $x_G = 0$ et donc $x = x_F \in F$. D'où l'égalité. On procède de la même manière pour l'autre égalité.

□

Proposition 5.5 (Caractérisation des symétries vectorielles) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $s \in \mathcal{L}(E)$.

s est une symétrie vectorielle ssi $s^2 = \mathrm{Id}_E$. Et dans ce cas, $E = \ker(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(s + \mathrm{Id}_E)$ et s est la symétrie par rapport à $\ker(s - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\ker(s + \mathrm{Id}_E)$.

Démonstration :
Le sens directe a déjà été fait plus haut. On va donc s'occuper du sens indirecte. On va montrer que $E = \ker(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(s + \mathrm{Id}_E)$ et que s est la symétrie vectorielle par rapport à $\ker(s - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\ker(s + \mathrm{Id}_E)$.

Soit $x \in \ker(s - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(s + \mathrm{Id}_E)$. Alors $x = s(x) = -x$. Donc $x = 0$ et donc la somme est directe. Soit $x \in E$. On a (*** ASTUCE ***)

$$x = \frac{1}{2}(s(x) + x) - \frac{1}{2}(s(x) - x)$$

on pose $x_1 = 1/2(s(x) + x)$ et $x_2 = 1/2(s(x) - x)$. Alors $2s(x_1) = s^2(x) + s(x) = x + s(x) = 2x_1$ et $2s(x_2) = s^2(x) - s(x) = x - s(x) = -2x_2$. Donc $x_1 \in \ker(s - \mathrm{Id}_E)$ et $x_2 \in \ker(s + \mathrm{Id}_E)$. On a donc bien $E = \ker(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(s + \mathrm{Id}_E)$. Et $\forall x \in E$, $x = x_1 + x_2$ avec les notations précédentes et $s(x) = x_1 - x_2$. Donc s est bien la symétriqe vectorielle par rapport à $\ker(s - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\ker(p + \mathrm{Id}_E)$. □

Exemple 5.2 :
Soit l'application $s : \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par $s(f) = (x \mapsto f(-x))$. Montrer que cette application est une symétrie vectorielle dont déterminera les éléments caractéristiques.

Proposition 5.6 (Lien symétrie/projecteur) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev, F, G deux sev supplémentaires de E, $p \in \mathcal{L}(E)$ la projection sur F parallèlement à G, et $s \in \mathcal{L}(E)$ la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

Alors $s = 2p - \mathrm{Id}_E$.

Démonstration :
Soit $x \in E$ et $(x_F, x_G) \in F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$. Alors

$$s(x) = x_F - x_G = 2x_F - (x_F + x_G) = 2p(x) - x.$$

□

6 Formes linéaires

On rappelle : $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ l'ensemble des formes linéaires sur E.

On rappelle :

Proposition 6.1 (Supplémentaire d'un hyperplan) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et H un hyperplan de E.

Alors $\forall a \notin H$, $\mathrm{Vect}(a) \oplus H = E$.

Démonstration :
Si $a \notin H$, alors $a \neq 0$ car $0 \in H$. De plus, on a évidemment $\mathrm{Vect}(a) \cap H = \{0\}$ et $\dim(\mathrm{Vect}(a)) + \dim(H) = \dim(E)$. Donc on a bien la supplémentarité par caractérisation des supplémentaire en dimension finie. □

Proposition 6.2 (Caractérisation des formes linéaires proportionnelles) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Soit $f, g \in E^* \setminus \{0\}$ (deux formes linéaires non nulles sur E).

$$(f, g) \text{ liée} \iff \ker(f) = \ker(g).$$

Démonstration :
Si f et g sont liées, c'est évident.

Supposons $\ker(f) = \ker(g)$. Soit $a \notin \ker(f)$. Alors $\mathrm{Vect}(a)$ est un supplémentaire commun de $\ker(f)$ et $\ker(g)$ (car ce sont des hyperplans). Alors $f(a) \neq 0$ et $g(a) \neq 0$ car $f \neq 0$ et $g \neq 0$. Soit $x \in E$. Alors $\exists (\lambda, x_0) \in \mathbb{K} \times \ker(f)$ tel que $x = \lambda a + x_0$. Et donc

$$f(x) = \lambda f(a) = \lambda \frac{g(a)}{g(a)} f(a) = \frac{f(a)}{g(a)} g(\lambda a) = \frac{f(a)}{g(a)} g(x)$$

Donc $f = \frac{f(a)}{g(a)} g$. Et donc (f, g) est liée. □

Définition-Propriété 6.1 (Base duale) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $\mathcal{B} := (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

On appelle *base duale de E associée à la base $\mathcal{B}$* la base $\mathcal{B}^* := (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ de $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ définit par :

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\},\ e_i^*(e_j) := \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration :
On rappelle qu'une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base. Donc, si on fixe $i \in \{1, \ldots, n\}$, poser $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$, $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$ définie bien une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$, donc une forme linéaire.

On a n formes linéaires et $\dim(E^*) = n$. Donc il faut et il suffit de prouver que la famille $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ est libre.

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^* = 0$. Alors $\forall x \in E$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^*(x) = 0$ par définition des opérations dans E^*. En particulier,

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^*(e_j) = \lambda_j = 0$$

Et donc la famille $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ est libre dans E^* et donc c'est bien une base de E^* par caractérisation des bases en dimension finie. □

Remarque :
On peut créer autant de base duale qu'il y a de base dans E. Pour chaque base de E, on peut lui fabriquer sa base duale associée.

Remarque :
La base duale associée à une base $\mathcal{B}$ de E est donc la base des formes linéaires qui donnes les coordonnées des vecteurs dans la base $\mathcal{B}$.

Exemple 6.1 :
Déterminer la base duale de la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Et la base duale de $\mathcal{B} := ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$ de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 6.3 (Lien hyperplan / forme linéaire) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.

Alors tout hyperplan de E est le noyau d'une forme linéaire. *i.e.* si H un hyperplan de E, alors $\exists f \in E^*$ telle que $H = \ker(f)$. De plus $\{f \in E^*,\ H \subset \ker(f)\}$ est une droite vectorielle.

Démonstration :
Soit H un hyperplan de E. Soit $(e_1, \dots, e_{n-1})$ une base de H. On la complète par un vecteur e_n en une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E, par théorème de la base incomplète. Alors, par définition de la base duale, $H = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1}) = \ker(e_n^*)$.

D'après la proposition précédente, si $f, g \in E^*$ telles que $H \subset \ker(f)$ et $H \subset \ker(g)$, alors (f,g) est liée. En effet, si $f = 0$ ou $g = 0$, la famille (f,g) est liée. Sinon, $f \neq 0$ et $g \neq 0$. Donc, par th du rang, $\dim(H) = n-1 = \dim(\ker(f)) = \dim(\ker(g))$. Donc $H = \ker(f) = \ker(g)$. Et donc (f,g) est liée. Par conséquent, $\{f \in E^*,\ H \subset \ker(f)\}$ est une droite vectorielle de E^*. □

!!! ATTENTION !!!

⚠ Il n'y a pas unicité de la forme linéaire définissant H ! En tous cas, pas sous ces hypothèses là. On pourra faire mieux et rajouter une unicité plus tard. Dans un autre chapitre. Avec des conditions supplémentaires pour choisir la forme linéaire.

Mais pour le moment, l'ensemble des formes linéaires qui fonctionnent est une droite.

Remarque :
On savait déjà, par théorème du rang, que le noyau de toute forme linéaire non nulle était un hyperplan. On a ici la réciproque.

Définition 6.2 (Équation d'un hyperplan) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et H un hyperplan de E. Soit $\mathcal{B} := (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit $f \in E^*$ tel que $H = \ker(f)$. On appelle équation de H relativement à la base $\mathcal{B}$ toute équation de la forme : $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ vérifiée par les coordonnées d'un vecteur de H dans la base $\mathcal{B}$. Autrement dit :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_ie_i \in H \iff a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0.$$

Proposition 6.4 (Équation d'un hyperplan et forme linéaire) :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, soit H un hyperplan de E. Soit $\mathcal{B} := (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

$\sum_{i=1}^n a_ix_i = 0$ est une équation de H relativement à la base $\mathcal{B}$, si et seulement si, $\exists f \in E^*$ telle que $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $f(e_i) = a_i$ et $H = \ker(f)$.

Démonstration :
Comme H est un hyperplan, alors $\exists f \in E^*$ telle que $H = \ker(f)$. Et dans ce cas là, par linéarité, $x \in H \iff \sum_{i=1}^n f(e_i)x_i = 0$. Donc $\sum_{i=1}^n f(e_i)x_i = 0$ est une équation de H.

Réciproquement, si $\sum_{i=1}^n a_ix_i$ est une équation de H. On pose $f \in E^*$ telle que $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $f(e_i) = a_i$. On rappelle qu'une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base, donc f est bien définie et c'est bien une forme linéaire. De plus, $x = \sum_{i=1}^n x_ie_i \in H \iff \sum_{i=1}^n a_ix_i = 0 \iff f(\sum_{i=1}^n x_ie_i) = 0 \iff x \in \ker(f)$. Donc $H = \ker(f)$. □

!!! ATTENTION !!!

⚠ On rappelle qu'une base est un dictionnaire pour décrire les vecteurs. Si on change de base, on change de description de H et donc on change d'équation de H. Mais H ne change. C'est la façon de le décrire qui change.

Il est impératif de ne pas oublier la base par rapport à laquelle on écrit l'équation de H. Sinon, $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ ne veut rien dire (ou plus exactement, le lien avec H est rompu).

Exemple 6.2 :
On considère $H := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x - 2y + 3z - 4t = 0\}$. Montrer que H est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$. Montrer que l'on peut choisir une base $\mathcal{B}$ dans laquelle une équation de H est est de la forme $x_1 = 0$.