NOM :
Prénom :

Mardi 8 Janvier 2024

Interrogation 13

Applications Linéaires

Correction

Exercice 1 :
Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Définition d'une application linéaire.
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev et $f : E \to F$. On dit que f est linéaire, si $\forall x, y \in E$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

2. Définition du rang d'une application.
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. On définit le rang de f, noté $\mathrm{rg}(f)$, par $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f))$.

3. Théorème d'isomorphisme.
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie telle que $\dim(E) = \dim(F) = n$, $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $f \in \mathrm{GL}(E, F) \iff f$ injective $\iff f$ surjective $\iff \mathrm{rg}(f) = n \iff \exists g \in \mathcal{L}(F, E),\ g \circ f = \mathrm{Id}_E \iff \exists h \in \mathcal{L}(F, E),\ f \circ h = \mathrm{Id}_F$. Et de plus, $g = h = f^{-1}$.

5. Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$.
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Alors $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie et $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E)\dim(F)$.

6. Caractérisation des projecteurs.
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathcal{L}(E)$. f est un projecteur ssi $f^2 = f$. Et dans ce cas $E = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Im}(f) = \ker(f - \mathrm{Id}_E)$.

7. Théorème du rang.
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev, E de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \mathrm{rg}(f)$.

8. Caractérisation de l'inj/surj par le rang.
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $\mathrm{rg}(f) \leq \min(\dim(E), \dim(F))$ et $\mathrm{rg}(f) = \dim(E) \iff f$ injective et $\mathrm{rg}(f) = \dim(F) \iff f$ surjective.

Exercice 2 :
Soit $f : (x, y, z) \mapsto (x + 2y + z, 2x + y - z)$. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$. Déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Soit $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
& f(\lambda(x, y, z) + \mu(x', y', z')) \\
=& f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z') && \text{def opé } \mathbb{R}^3 \\
=& ((\lambda x + \mu x') + 2(\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z'), 2(\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y') - (\lambda z + \mu z')) && \text{def } f \\
=& (\lambda(x + 2y + z) + \mu(x' + 2y' + z'), \lambda(2x + y - z) + \mu(2x' + y' - z')) && \text{distri, comm, asso } \mathbb{R} \\
=& \lambda(x + 2y + z, 2x + y - z) + \mu(x' + 2y' + z', 2x' + y' - z') && \text{def opé } \mathbb{R}^2 \\
=& \lambda f(x, y, z) + \mu f(x', y', z') && \text{def } f
\end{aligned}$$

Donc $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$.
De plus,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(f) &= \{(x + 2y + z, 2x + y - z),\ x, y, z \in \mathbb{R}\} \\
&= \mathrm{Vect}((1, 2), (2, 1), (1 - 1)) \\
&= \mathrm{Vect}((0, 3), (3, 0), (1, -1)) && \begin{cases} (0, 3) = (1, 2) - (1, -1) \\ (3, 0) = (2, 1) + (1, -1) \end{cases} \\
&= \mathrm{Vect}((0, 1), (1, 0)) && (1, -1) = \frac{1}{3}((3, 0) - (3, 0)) \\
&= \mathbb{R}^2
\end{aligned}$$

Donc f est surjective. Et par théorème du rang, $\dim(\ker(f)) = 3 - 2 = 1$.

Or on voit facilement $f(1, -1, 1) = 0$ donc $(1, -1, 1) \in \ker(f)$. Comme $\dim(\ker(f)) = 1$, on en déduit $\ker(f) = \mathrm{Vect}(1, -1, 1)$.