DM 5
Algèbre Linéaire pour le Père Noël
Correction

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Pour le Mardi 09 Janvier 2024

Problème 1 (Sev de $\mathbb{R}^4$) :

1. On pose
$$v_1 = (1, 3, -1, 0), \qquad v_2 = (5, 4, -2, 1), \qquad v_3 = (-13, 5, 1, -4).$$
et $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$.

(a) Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda v_1 + \mu v_2 = 0_{\mathbb{R}^4}$. Donc, par définition des opérations de $\mathbb{R}^4$, $(\lambda + 5\mu, 3\lambda + 4\mu, -\lambda - 2\mu, \mu) = 0$. La définition de l'égalité dans $\mathbb{R}^4$ et la dernière coordonnée nous donne $\mu = 0$. En prenant n'importe quel autre coordonnée, on aboutit immédiatement à $\lambda = 0$.

Donc v_1 et v_2 sont linéairement indépendants. Autrement dit, (v_1, v_2) est libre.

(b) On peut observer que $7v_1 - 4v_2 = (-13, 5, 1, -4) = v_3$. Donc $v_3 \in \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ et donc v_3 est bien combinaison linéaire de v_1 et v_2.

Si on ne voit pas ces coefficients (que l'on peut trouver facilement en observant la dernière coordonnée qui donne le coefficient de v_2, puis n'importe quel autre coordonnée permet d'avoir le coefficient de v_1), on peut aussi étudier la liberté de la famille (v_1, v_2, v_3). Soit $\lambda, \mu, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda v_1 + \mu v_2 + \gamma v_3 = 0$.

$$\begin{aligned}
& \lambda v_1 + \mu v_2 + \gamma v_3 = 0 & \\
\iff & (\lambda + 5\mu - 13\gamma, 3\lambda + 4\mu + 5\gamma, -\lambda - 2\mu + \gamma, \mu - 4\gamma) = 0 & \text{def opérations de } \mathbb{R}^4 \\
\iff & \begin{cases} \lambda + 5\mu - 13\gamma = 0 \\ 3\lambda + 4\mu + 5\gamma = 0 \\ -\lambda - 2\mu + \gamma = 0 \\ \mu - 4\gamma = 0 \end{cases} & \text{def égalité dans } \mathbb{R}^4 \\
\iff & \begin{cases} \lambda + 7\gamma = 0 \\ 3\lambda + 27\gamma = 0 \\ -\lambda - 7\gamma = 0 \\ \mu - 4\gamma = 0 \end{cases} & \begin{array}{r} L_1 \leftarrow L_1 - 5L_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 4L_4 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_4 \end{array} \\
\iff & \begin{cases} \lambda = -7\gamma \\ \mu = 4\gamma \end{cases} &
\end{aligned}$$

En prenant $\gamma = 1$, on obtient donc $-7v_1 + 4v_2 + v_3 = 0$, autrement dit $v_3 = 7v_1 - 4v_2$.

(c) Par définition, on a $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$. Or $v_3 \in \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$. Donc, par principe d'élimination dans une famille génératrice, $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$. Donc (v_1, v_2) est une famille génératrice de F.

Par ailleurs, d'après la question 1a, (v_1, v_2) est une famille libre. Donc (v_1, v_2) est une famille libre et génératrice de F, donc, par définition, (v_1, v_2) est une base de F.

2. On considère $G = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$ avec $u_1 = (1, 3, 0, 0)$ et $u_2 = (6, 7, -3, 2)$.

   (a) Soit $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 = 0$.

$$\begin{aligned}
& \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 = 0 \\
\iff & (\lambda_1 + 5\lambda_2 + \mu_1 + 6\mu_2,\ 3\lambda_1 + 4\lambda_2 + 3\mu_1 + 7\mu_2,\ -\lambda_1 - 2\lambda_2 - 3\mu_2,\ \lambda_2 + 2\mu_2) = 0 \\
\iff & \begin{cases} \lambda_1 + 5\lambda_2 + \mu_1 + 6\mu_2 = 0 \\ 3\lambda_1 + 4\lambda_2 + 3\mu_1 + 7\mu_2 = 0 \\ -\lambda_1 - 2\lambda_2 - 3\mu_2 = 0 \\ \lambda_2 + 2\mu_2 = 0 \end{cases} && \text{def égalité } \mathbb{R}^4 \\
\iff & \begin{cases} \lambda_1 + \mu_1 - 4\mu_2 = 0 \\ 3\lambda_1 + 3\mu_1 - \mu_2 = 0 \\ \lambda_1 + \mu_2 = 0 \\ \lambda_2 + 2\mu_2 = 0 \end{cases} && \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 - 5L_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 4L_4 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_4 \end{array} \\
\iff & \begin{cases} \mu_1 - 5\mu_2 = 0 \\ 3\mu_1 - 4\mu_2 = 0 \\ \lambda_1 + \mu_2 = 0 \\ \lambda_2 + 2\mu_2 = 0 \end{cases} && \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \end{array} \\
\iff & \begin{cases} \mu_1 - 5\mu_2 = 0 \\ 11\mu_2 = 0 \\ \lambda_1 + \mu_2 = 0 \\ \lambda_2 + 2\mu_2 = 0 \end{cases} && L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\
\iff & \lambda_1 = \lambda_2 = \mu_1 = \mu_2 = 0.
\end{aligned}$$

   Donc la famille (v_1, v_2, u_1, u_2) est une famille libre de $\mathbb{R}^4$.

   C'est une famille libre de 4 vecteurs dans $\mathbb{R}^4$ qui est de dimension 4, donc, par caractérisation des bases en dimension finie, (v_1, v_2, u_1, u_2) est une base de $\mathbb{R}^4$.

   On peut aussi finir le raisonnement sans utiliser la caractérisation des bases en dimension finie, soit en montrant que $\mathbb{R}^4 \subset \mathrm{Vect}(v_1, v_2, u_1, u_2)$; soit en montrant que la base canonique est contenue dans $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, u_1, u_2)$; soit, à l'aide d'un petit argument dimensionnel, que $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, u_1, u_2)$ est un sev de $\mathbb{R}^4$ de dimension 4 ; etc. Tous ces raisonnements étant équivalents.

   (b) D'après la question précédente, on a $\mathbb{R}^4 = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, u_1, u_2)$. Donc

$$\mathbb{R}^4 = \mathrm{Vect}(v_1, v_2) + \mathrm{Vect}(u_1, u_2) = F + G.$$

   Mais la famille (v_1, v_2, u_1, u_2) est libre, donc la somme est directe, *i.e.*

$$\mathrm{Vect}(v_1, v_2, u_1, u_2) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2) \oplus \mathrm{Vect}(u_1, u_2).$$

   Autrement dit $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$.

   Donc F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

   (c) Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$. On a

$$\begin{aligned}
x \in G \iff & \exists \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R},\ x = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 && \text{def } G \\
\iff & \exists \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x_1 = \mu_1 + 6\mu_2 \\ x_2 = 3\mu_1 + 7\mu_2 \\ x_3 = -3\mu_2 \\ x_4 = 2\mu_2 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\iff \exists \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}, \begin{cases} x_1 = \mu_1 + 6\mu_2 \\ x_2 - 3x_1 = -11\mu_2 \\ 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_4 = 2\mu_2 \end{cases}$$

$$\iff \exists \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}, \begin{cases} x_1 = \mu_1 + +6\mu_2 \\ 2(x_2 - 3x_1) + 11x_4 = 0 \\ 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_4 = 2\mu_2 \end{cases}$$

Donc $G \subset \{x \in \mathbb{R}^4,\ 2x_3 + 3x_4 = 2x_2 - 6x_1 + 11x_4 = 0\}$.

Réciproquement :

$$\begin{aligned} &\{x \in \mathbb{R}^4,\ 2x_3 + 3x_4 = 0,\ 2x_2 - 6x_1 + 11x_4 = 0\} \\ =&\{x \in \mathbb{R}^4,\ 2x_3 = -3x_4,\ 2x_2 = 6x_1 - 11x_4\} \\ =&\{(x_1, 3x_1 - 11x_4, 3x_4, 2x_4),\ x_1, x_4 \in \mathbb{R}\} \\ =&\mathrm{Vect}((1,3,0,0),(0,-11,-3,2)) \\ =&\mathrm{Vect}((1,3,0,0),(0,-11,-3,2) + 6(1,3,0,0)) && \text{principe substitution} \\ =&\mathrm{Vect}((1,3,0,0),(6,7,-3,2)) \\ =&G \end{aligned}$$

On a donc $G = \{x \in \mathbb{R}^4,\ 2x_3 + 3x_4 = 2x_2 - 6x_1 + 11x_4 = 0\}$ et donc

$$\forall (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4,\ \left((x_1, x_2, x_3, x_4) \in G \iff 2x_3 + 3x_4 = 0 = 2x_2 - 6x_1 + 11x_4\right).$$

3. Soit

$$H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4,\ 3x_1 - x_2 + 7x_4 = x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0\}$$

(a) On a donc

$$\begin{aligned} H &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4,\ 3x_1 - x_2 + 7x_4 = x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4,\ 3x_1 - x_2 + 7x_4 = 0,\ 4x_1 + 4x_3 + 5x_4 = 0\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4,\ x_2 = 3x_1 + 7x_4,\ 4x_3 = -4x_1 - 5x_4\} \\ &= \left\{(x_1, 3x_1 + 7x_4, -x_1 - \frac{5}{4}x_4, x_4),\ x_1, x_4 \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{x_1(1,3,-1,0) + \frac{x_4}{4}(0,28,-5,4),\ x_1, x_4 \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \mathrm{Vect}((1,3,-1,0),(0,28,-5,4)) \end{aligned}$$

Donc H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

(b) On vient de trouver une famille génératrice de H. Montrons que cette famille est libre.

Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda(1,3,-1,0) + \mu(0,28,-5,4) = 0 \iff \begin{cases} \lambda = 0 \\ 3\lambda + 28\mu = 0 \\ -\lambda - 5\mu = 0 \\ 4\mu = 0 \end{cases} \iff \lambda = \mu = 0.$$

Donc la famille $((1,3,-1,0),(0,28,-5,4))$ est une famille libre et génératrice de H, donc, par définition, $((1,3,-1,0),(0,28,-5,4))$ est une base de H.

(c) On rappelle : $v_1 = (1, 3, -1, 0)$ et $v_2 = (5, 4, -2, 1)$. On a $3\times 1 - 3 + 7\times 0 = 0$ et $1 + 3 + 4(-1) - 2\times 0 = 0$. Donc, par définition, $v_1 \in H$. Et $3\times 5 - 4 + 7(-2) = -13 \neq 0$, donc $v_2 \notin H$.

On a donc $\mathrm{Vect}(v_1) \subset F\cap H$ par stabilité par combinaison linéaire (et def de $\mathrm{Vect}(v_1)$) de F et H.

Supposons que $\mathrm{Vect}(v_1) \neq F\cap H$. Donc $\exists x \in F\cap H$ tel que $x \notin \mathrm{Vect}(v_1)$. En particulier, $x \in F$. Donc $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda v_1 + \mu v_2$, car $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$.

De plus, comme $x \notin \mathrm{Vect}(v_1)$, on a donc $\mu \neq 0$. Mais alors $v_2 = \frac{1}{\mu}(x - \lambda_1) \in \mathrm{Vect}(x, v_1) \subset F\cap H$ car $F\cap H$ est un sev de $\mathbb{R}^4$ (donc stable par combinaisons linéaires). D'où ☠.

Donc $\mathrm{Vect}(v_1) = F\cap H$. Comme $v_1 \neq 0$, la famille (v_1) est libre et génératrice de $F\cap H$, donc (v_1) est une base de $F\cap H$.

Problème 2 (Itérées d'une application linéaire $2f^2 = f + \mathrm{Id}_E$) :

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f = \alpha\,\mathrm{Id}_E$. Alors $f^2 = f\circ f = (\alpha\,\mathrm{Id}_E)\circ(\alpha\,\mathrm{Id}_E) = \alpha^2\,\mathrm{Id}_E\circ\mathrm{Id}_E = \alpha^2\,\mathrm{Id}_E$ et $f + \mathrm{Id}_E = (\alpha+1)\,\mathrm{Id}_E$. Donc $\alpha^2\,\mathrm{Id}_E = \frac{\alpha+1}{2}\,\mathrm{Id}_E$. Ce qui implique bien sûr $2\alpha^2 = \alpha + 1$ (puisque $\mathcal{L}(E)$ est un ev, par exemple, ou en calculant sur un vecteur non nul si on préfère). On aboutit alors à $\alpha \in \{1, -1/2\}$.

   Il est facile de vérifier que Id_E et $-\frac{1}{2}\,\mathrm{Id}_E$ sont bien des homothéties qui vérifient la relation.

2. Retour au cas général.

   (a) On a $2f^2 = f + \mathrm{Id}_E$, donc $f\circ(2f - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Id}_E$. Or E est de dimension finie, donc, par théorème d'isomorphisme, f est un automorphisme de E et $f^{-1} = 2f - \mathrm{Id}_E \in \mathcal{L}(E)$ puisque $\mathcal{L}(E)$ est un $\mathbb{R}$-ev (ou alors par que c'est l'inverse d'une application linéaire, ça fonctionne aussi).

   (b) Comme $\mathcal{L}(E)$ est $\mathbb{R}$-ev, on sait que $f - \mathrm{Id}_E, f + \frac{1}{2}\,\mathrm{Id}_E \in \mathcal{L}(E)$. Et les noyaux d'applications linéaire sont des sous-espaces vectoriels de l'espaces de départs (ce sont des pré-images du sev trivial de l'espace d'arrivée). Autrement dit, $\ker(f - \mathrm{Id}_E) = (f - \mathrm{Id}_E)^{-1}(\{0\})$ et $\{0\}$ est un sev de E, donc $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ est sev de E. De même pour $\ker(f + 1/2\,\mathrm{Id}_E)$.

   (c) Soit $x \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)\cap\ker(f + 1/2\,\mathrm{Id}_E)$. Alors $f(x) = x$ et $f(x) = -x/2$. On a donc $x = -x/2$, ce qui entraîne immédiatement $x = 0$. Donc $\ker(f - \mathrm{Id}_E)\cap\ker(f + 1/2\,\mathrm{Id}_E) \subset \{0\}$. Or les noyaux sont des sev de E, donc $\ker(f - \mathrm{Id}_E)\cap\ker(f + 1/2\,\mathrm{Id}_E) = \{0\}$.

   Soit $x \in E$. Alors $x = \frac{2}{3}\left(f(x) + \frac{1}{2}x\right) - \frac{2}{3}(f(x) - x)$. Et

$$\begin{aligned} f\left(f(x) + \frac{1}{2}x\right) &= f^2(x) + \frac{1}{2}f(x) \\ &= \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}f(x) \\ &= f(x) + \frac{1}{2}x \end{aligned}$$

   Donc $f(x) + 1/2x \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$. Et

$$\begin{aligned} f(f(x) - x) &= f^2(x) - f(x) \\ &= \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}x - f(x) \\ &= -\frac{1}{2}(f(x) - x) \end{aligned}$$

Donc $f(x)-x \in \ker(f+1/2\,\mathrm{Id}_E)$. On a donc

$$x=\frac{2}{3}\underbrace{\left(f(x)+\frac{1}{2}x\right)}_{\in\ker(f-\mathrm{Id}_E)}-\frac{2}{3}\underbrace{(f(x)-x)}_{\in\ker(f+\frac{1}{2}\mathrm{Id}_E)}$$

Donc $E=\ker(f-\mathrm{Id}_E)+\ker(f+1/2\,\mathrm{Id}_E)$ puisque ce sont des sev de E, et donc $E=\ker(f-\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f+1/2\,\mathrm{Id}_E)$.

(d) On a

$$\left(f+\frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)\circ(f-\mathrm{Id}_E)=f^2-\frac{1}{2}f-\frac{1}{2}\mathrm{Id}_E=0$$

On a donc

$$\begin{aligned}\{0\}=\left(f+\frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)\circ(f-\mathrm{Id}_E)(E)&=\left(f+\frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)((f-\mathrm{Id}_E)(E))\\&=\left(f+\frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)(\mathrm{Im}(f-\mathrm{Id}_E))\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Im}(f-\mathrm{Id}_E)\subset\ker(f+1/2\,\mathrm{Id}_E)$.

Mais par ailleurs, par théorème du rang, on sait que

$$\mathrm{rg}(f-\mathrm{Id}_E)=n-\dim(\ker(f-\mathrm{Id}_E))=\dim(\ker(f+1/2\,\mathrm{Id}_E))$$

puisque $\ker(f-\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f+1/2\,\mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires dans E.

Donc $\mathrm{Im}(f-\mathrm{Id}_E)$ est un sev de $\ker(f+1/2\,\mathrm{Id}_E)$ de même dimension que $\ker(f+1/2\,\mathrm{Id}_E)$ et donc $\mathrm{Im}(f-\mathrm{Id}_E)=\ker(f+1/2\,\mathrm{Id}_E)$.

(e) On a toujours $(f+\frac{1}{2}\mathrm{Id}_E)\circ(f-\mathrm{Id}_E)=0=(f-\mathrm{Id}_E)\circ(f+\frac{1}{2}\mathrm{Id}_E)$. Donc $\mathrm{Im}(f+\frac{1}{2}\mathrm{Id}_E)\subset\ker(f-\mathrm{Id}_E)$. D'autre part, par la question précédente, $\mathrm{rg}(f+\frac{1}{2}\mathrm{Id}_E)=\dim(E)-\dim(\ker(f+\frac{1}{2}\mathrm{Id}_E))=\dim(E)-\mathrm{rg}(f-\mathrm{Id}_E)=\dim(\ker(f-\mathrm{Id}_E))$ par théorème du rang. Et donc $\mathrm{Im}(f+\frac{1}{2}\mathrm{Id}_E)=\ker(f-\mathrm{Id}_E)$.

3. On suppose f et Id_E linéairement indépendants.

(a) On sait $f^2=\frac{1}{2}f+\frac{1}{2}\mathrm{Id}_E$. Donc

$$\begin{aligned}f^3&=f\circ f^2\\&=f\circ\left(\frac{1}{2}f+\frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)\\&=\frac{1}{2}f^2+\frac{1}{2}f\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}f+\frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)+\frac{1}{2}f\\&=\frac{3}{4}f+\frac{1}{4}\mathrm{Id}_E\end{aligned}$$

Et en rcomposant par f, on obient

$$\begin{aligned}f^4&=f\circ f^3\\&=f\circ\left(\frac{3}{4}f+\frac{1}{4}\mathrm{Id}_E\right)\\&=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}f+\frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)+\frac{1}{4}f\\&=\frac{5}{8}f+\frac{3}{8}\mathrm{Id}_E\end{aligned}$$

(b) On vient de montrer que $\forall p \in \{0,1,2,3,4\}$, $\exists (a_p, b_p) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f^p = a_p f + b_p \operatorname{Id}_E$. Supposons que $\exists p \in \mathbb{N}$ tel que $\exists a_p, b_p \in \mathbb{R}$ tel que $f^p = a_p f + b_p \operatorname{Id}_E$. Alors

$$\begin{aligned} f^{p+1} &= f \circ f^p \\ &= f \circ (a_p f + b_p \operatorname{Id}_E) \\ &= a_p \left(\frac{1}{2} f + \frac{1}{2} \operatorname{Id}_E \right) + b_p f \\ &= \frac{a_p + 2b_p}{2} f + \frac{a_p}{2} \operatorname{Id}_E \end{aligned}$$

On pose alors $a_{p+1} = \frac{a_p + 2b_p}{2} \in \mathbb{R}$ et $b_{p+1} = \frac{a_p}{2} \in \mathbb{R}$. Et donc $f^{p+1} = a_{p+1} f + b_{p+1} \operatorname{Id}_E$.

Donc, par principe de récurrence, $\forall p \in \mathbb{N}$, $\exists a_p, b_p \in \mathbb{R}$ tels que $f^p = a_p f + b_p \operatorname{Id}_E$.

(c) On a $f^0 = \operatorname{Id}_E = 0 \times f + 1 \times \operatorname{Id}_E$ et $f = 1 \times f + 0 \times \operatorname{Id}_E$. Donc $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $b_0 = 1$ et $b_1 = 0$. Et on a

$$\forall p \in \mathbb{N},\ a_{p+1} = \frac{a_p + 2b_p}{2} \qquad \text{et} \qquad b_{p+1} = \frac{a_p}{2}$$

d'après la question précédente.

(d) Soit $p \in \mathbb{N}$. On a

$$a_{p+2} = \frac{a_{p+1} + 2b_{p+1}}{2} = \frac{a_{p+1} + a_p}{2}$$

Donc la suite $(a_p)_{p \in \mathbb{N}}$ vérifier une relation de récurrence d'ordre 2 à coefficients constants d'équation caractéristique $r^2 - r/2 - 1/2 = 0$, de discriminant $\Delta = 1/4 + 2 = 9/4 > 0$, de racines réelles distinctes $r_1 = -1/2$ et $r_2 = 1$. On en déduit donc $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\forall p \in \mathbb{N}$, $a_p = \mu + \lambda \frac{(-1)^p}{2^p}$. Or $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$, donc

$$\begin{cases} \mu + \lambda = 0 \\ \mu - \frac{\lambda}{2} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = -\frac{2}{3} \\ \mu = \frac{2}{3} \end{cases}$$

On a donc

$$\forall p \in \mathbb{N},\ a_p = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{(-1)^p}{2^p} \right)$$

Et la relation $\forall p \in \mathbb{N}$, $b_{p+1} = a_p/2$ avec $b_0 = 1$ nous fournit alors

$$\forall p \in \mathbb{N},\ b_p = \begin{cases} \frac{1}{3} \left(1 + \frac{(-1)^p}{2^{p-1}} \right) & p \geq 1 \\ 1 & p = 0 \end{cases}$$

(On remarquera que les formules nous donne bien le bons coefficients qu'on a obtenu par le calul pour f^2, f^3 et f^4. Il est bon de vérifier rapidement : une erreur de calcul peut vite arriver).

La suite $((-1)^p/2^p)$ est une suite géométrique de raison $-1/2 \in]-1,1[$ donc convergente de limite nulle. Puis, comme l'espace des suites convergentes est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que les suites constantes sont convergentes, on en déduit que (a_p) et (b_p) sont convergentes. Par ailleurs, la limite est une forme linéaire sur l'espace des suites convergentes, donc elle est linéaire et donc

$$a_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} \frac{2}{3}(1 - 0) = \frac{2}{3} \qquad \text{et} \qquad b_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} \frac{1}{3}(1 + 0) = \frac{1}{3}$$

(e) On pose $q = \frac{2}{3} f + \frac{1}{3} \operatorname{Id}_E$. Alors

$$\begin{aligned} q^2 &= \left(\frac{2}{3} f + \frac{1}{3} \operatorname{Id}_E \right) \circ \left(\frac{2}{3} f + \frac{1}{3} \operatorname{Id}_E \right) \\ &= \frac{4}{9} f^2 + \frac{4}{9} f + \frac{1}{9} \operatorname{Id}_E \\ &= \frac{4}{9} \left(\frac{1}{2} f + \frac{1}{2} \operatorname{Id}_E \right) + \frac{4}{9} f + \frac{1}{9} \operatorname{Id}_E \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{3}f + \frac{1}{3}\,\mathrm{Id}_E$$
$$= q$$

Et comme $\mathcal{L}(E)$ est un $\mathbb{R}$-ev, $q \in \mathcal{L}(E)$. C'est donc un projecteur de E. C'est même le projecteur de E sur $\mathrm{Im}(q) = \ker(q - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\ker(q)$.

Mais

$$\begin{aligned} x \in \ker(q) &\iff q(x) = 0 \\ &\iff \frac{2}{3}f(x) + \frac{1}{3}x = 0 \\ &\iff f(x) + \frac{1}{2}x = 0 \\ &\iff x \in \ker(f + \frac{1}{2}\,\mathrm{Id}_E) \end{aligned}$$

et donc $\ker(q) = \ker(f + 1/2\,\mathrm{Id}_E)$.

De même,

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Im}(q) &\iff x \in \ker(q - \mathrm{Id}_E) \\ &\iff q(x) = x \\ &\iff \frac{2}{3}f(x) + \frac{1}{3}x = x \\ &\iff f(x) + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}x = 0 \\ &\iff f(x) - x = 0 \\ &\iff x \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \end{aligned}$$

et donc $\mathrm{Im}(q) = \ker(f - \mathrm{Id}_E)$.

Finalement, q est la projection de E sur $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\ker(f + 1/2\,\mathrm{Id}_E)$.

4. On pose $\mathcal{M} = \{\lambda f + \mu\,\mathrm{Id}_E, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

   (a) On a donc $\mathcal{M} = \mathrm{Vect}(f, \mathrm{Id}_E) \subset \mathcal{L}(E)$. C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

   Soit $g, h \in \mathcal{M}$. Donc $\exists a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $g = af + b\,\mathrm{Id}_E$ et $h = cf + d\,\mathrm{Id}_E$. Alors

$$\begin{aligned} g \circ h &= (af + b\,\mathrm{Id}_E) \circ (cf + d\,\mathrm{Id}_E) \\ &= acf^2 + (ad + bc)f + bd\,\mathrm{Id}_E \\ &= (ad + bc + ac/2)f + (bd + ac/2)\,\mathrm{Id}_E \in \mathcal{M} \end{aligned}$$

   Et aussi

$$\begin{aligned} h \circ g &= (cf + d\,\mathrm{Id}_E) \circ (af + b\,\mathrm{Id}_E) \\ &= caf^2 + (da + cb)f + db\,\mathrm{Id}_E \\ &= (ca/2 + da + cb)f + (db + ca/2)\,\mathrm{Id}_E \\ &= g \circ h \end{aligned}$$

   puisque le produit est commutatif dans $\mathbb{R}$ et l'addition aussi.

   (b) On a vu $\mathcal{M} = \mathrm{Vect}(f, \mathrm{Id}_E)$. Donc $\dim(\mathcal{M}) \leq 2$. Par ailleurs, $\mathrm{Id}_E \neq 0$, donc $\dim(\mathcal{M}) \geq 1$.

   Mais par hypothèse, on a supposé que f et Id_E sont linéairement indépendants, donc la famille (f, Id_E) est une famille libre. Elle est donc libre et génératrice de $\mathcal{M}$, c'est donc une base de $\mathcal{M}$ et donc $\mathcal{M}$ est de dimension 2.

   Dans le cas de la première question où f est une homothétie, f est donc proportionnelle à Id_E et donc la famille (f, Id_E) est liée. Ce qui entraîne que $\dim \mathcal{M} = 1$ (et donc $\mathcal{M} = \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E)$.

Problème 3 (Suite implicite) :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'équation

$$x - \ln(x) = n. \tag{E_n}$$

et la fonction $f_n(x) = x - \ln(x) - n$ définie pour tout $x > 0$.

Partie I : Étude de f_n

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme d'applications dérivables et $\forall x > 0$, $f_n'(x) = 1 - 1/x = \frac{x-1}{x}$. D'où le tableau de variations :

x	0		x_n		1		y_n		$+\infty$
$f_n'(x)$	$\Vert$			$-$	0	$+$			
f_n	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$1-n$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2. Avec $n = 0$, on a donc, d'après le tableau de variation, $\forall x > 0$, $f_0(x) \geq 1 > 0$. Donc (E_0) n'a pas de solutions.

   Avec $n = 1$, on a alors une seule solution à (E_1) qui est le minimum de f_1 qui est atteint en 1. Donc la seule solution de (E_1) est $x = 1$.

Partie II : Une première suite

3. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. f_n est continue sur $]0, 1]$ et décroissante, donc, par théorème de la limite monotone et corollaire du TVI, $f_n(]0, 1]) = [f_n(1), \lim_0 f_n[= [1 - n, +\infty[$. Or $1 - n < 0$, donc $0 \inf_n(]0, 1])$. Donc, par définition, $\exists x_n \in]0, 1]$ tel que $f_n(x_n) = 0$. Or $f_n(1) = 1 - n \neq 0$, donc $x_n \neq 1$ donc $x_n \in]0, 1[$.

   De plus, f_n est strictement monotone sur $]0, 1]$, donc injective et donc x_n est unique.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On a, par définition, $f_n(x_n) = x_n - \ln(x_n) - n = 0$. Donc $f_{n+1}(x_n) = x_n - \ln(x_n) - n - 1 = -1 < 0$.

   Or $\exists! x_{n+1} \in]0, 1[$, $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$ et f_{n+1} est décroissante sur $]0, 1]$ et $f_{n+1}(x_n) < f_{n+1}(x_{n+1})$. Donc $x_{n+1} < x_n$.

   Donc $(x_n)_{n \geq 2}$ est décroissante.

5. $(x_n)_{n \geq 2}$ est donc décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente par théorème de la limite monotone. On pose ℓ sa limite.

   Par passage à la limite dans les inégalités et comme $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $x_n \in]0, 1[$, on en déduit $\ell \in [0, 1]$.

6. On a $\forall n \geq 2$, $\ln(x_n) = x_n - n$. Donc $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $x_n = e^{x_n - n}$. Or $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$, donc $x_n - n \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$. Et donc, par caractérisation séquentielle des limites, $x_n = e^{x_n - n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Donc, par unicité de la limite, $\ell = 0$.

7. Comme $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, on a $e^{x_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ par caractérisation séquentielle de la continuité de l'exponentielle en 0. Et $1 \neq 0$, donc $e^{x_n} \underset{n \to +\infty}{\sim} 1$.

   D'où $x_n = e^{x_n - n} = e^{x_n} e^{-n} \underset{n \to +\infty}{\sim} e^{-n}$.

8. On a ensuite,

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\},\ x_n - e^{-n} &= e^{x_n - n} - e^{-n} \\
&= e^{-n}(e^{x_n} - 1) \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-n} x_n && \text{car } x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ et équivalent de référence} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-n} e^{-n} && \text{cf 7} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-2n} \\
&\underset{n\to+\infty}{=} e^{-2n} + o(e^{-2n}) && \text{caractérisation } \sim \text{ par } o
\end{aligned}$$

D'où

$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} e^{-n} + e^{-2n} + o(e^{-2n}).$$

9. Pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, on pose $S_n = \sum_{k=2}^{n} x_k$.

(a) On a

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\},\ S_{n+1} - S_n = \sum_{k=2}^{n+1} x_k - \sum_{k=2}^{n} x_k = x_{n+1} \in]0,1[$$

Donc $(S_n)_{n\geq 2}$ est croissante.

(b) D'après 7, $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-n}$. Donc par définition, $x_n e^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Donc, par définition des limites, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n$, $|x_n e^n - 1| \leq \varepsilon$.

Avec $\varepsilon = 1/2$, on a donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \geq n_0$, $|x_n e^n - 1| \leq 1/2$. Et

$$\begin{aligned}
\forall n \geq n_0,\ |x_n e^n - 1| \leq \frac{1}{2} &\iff \forall n \geq n_0,\ 1 - \frac{1}{2} \leq x_n e^n \leq \frac{1}{2} + 1 \\
&\iff \forall n \geq n_0,\ \frac{1}{2} e^{-n} \leq x_n \leq \frac{3}{2} e^{-n} \\
&\implies \forall n \geq n_0,\ x_n \leq \frac{3}{2} e^{-n}.
\end{aligned}$$

(c) On a alors,

$$\begin{aligned}
\forall n \geq n_0,\ S_n &= \sum_{k=2}^{n} x_k \\
&= \sum_{k=2}^{n_0-1} x_k + \sum_{k=n_0}^{n} x_k \\
&\leq \sum_{k=2}^{n_0-1} x_k + \sum_{k=n_0}^{n} \frac{3}{2} e^{-k} && \text{cf 9b} \\
&= \sum_{k=2}^{n_0-1} x_k + \frac{3}{2} \sum_{k=n_0}^{n} e^{-k} && \text{linéarité de la somme} \\
&= \sum_{k=2}^{n_0-1} x_k + \frac{3}{2} \frac{e^{-n_0} - e^{-n-1}}{1 - 1/e} && \text{car } e \neq 1 \\
&\leq \sum_{k=2}^{n_0-1} x_k + \frac{3e^{1-n_0}}{2(e-1)}
\end{aligned}$$

Donc la suite $(S_n)_{n\geq 2}$ est majorée. Or elle est croissante, d'après 9a, donc $(S_n)_{n\geq 2}$ est convergente par théorème de la limite monotone.

Problème 4 (Suites implicites (version moche)) :

Partie I : Étude de f_n

$f_n'(x) = 1 - 1/x$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$1-n$	$\nearrow$	$+\infty$

$f_0(x) = x - \ln(x)$ $\quad\quad \ln(x) \neq x \quad\quad$ donc $f_0(x) = 0$ n'a pas de solutions.

$f_1(x) = x - \ln(x) - 1$. Donc $f_1(1) = 0$.

Partie II : Une première suite

3. $f_n(0) = +\infty$ et $f_n(1) = 1 - n < 0$. $f_n(x)$ a une solution x_n dans $]0, 1[$.
4. Soit $\forall n \geq 2$,
$$f_{n+1}(x_n) = x_n - \ln(x_n) - n - 1 = f_n(x_n) - 1 = -1$$
Donc $f_{n+1}(x_n) < f_{n+1}(x_{n+1})$. Donc $x_n < x_{n+1}$. Donc x_n est croissante.

   x_n est décroissante et minorée par 0. Donc x_n tend vers 0. On note $\ell = \lim_{n\to+\infty} x_n$. Or $0 < x_n < 1$. Donc $0 < \ell < 1$.

   $\ell = \lim_{n\to+\infty} x_n$. Or x_n tend vers 0. Donc $\ell = 0$.
7. $x_n - \ln(x_n) - n = 0$. Donc $x_n - \ln(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} n$. Donc $e^{x_n - \ln(x_n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^n$. Donc $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{x_n - n}$. Or $x_n \to 0$. Donc $x_n \sim e^{-n}$.
8. $e^{-2n} = o(e^{-n})$ donc $x_n \sim e^{-n} + e^{-2n} + o(e^{-2n})$.
9. (a) $S_{n+1} - S_n = x_{n+1} > 0$ donc (S_n) est croissante.

   (b) On a $x_n = e^{-n} + e^{-2n} + o(e^{-2n})$. Or $e^{-2n} \to 0$. Donc, APCR, $x_n = e^{-n} + e^{-2n}$. Mais l'exponentielle avec une puissance négative étant décroissante sur $]0, 1[$ qui est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et x_n étant définie sur $]0, 1[$, alors $e^{-2n} \leq 3/2$ avec n un entier assez grand. Alors, la suite x_n sera majoré par e^{-n} et par $3/2$, qui sont tous les deux plus petits que 1. Donc en étant assez loin, x_n sera inférieur à $\frac{3}{2}e^{-n}$, qui pourra donc être considéré comme un majorant de x_n sur $]1, +\infty[$.

   (c) $x_n \geq 0$. Donc $0 \leq S_n \leq \frac{3}{2n} n e^{-n}$. $ne^{-n} \to 0$. Donc, APRC $0 \leq S_n \leq 0$. Donc, par théorème des gendarmes, $S_n \to 0$.

Problème 5 (Dimension $\mathcal{L}(E,F)$) :
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, $n = \dim(E)$, $p = \dim(F)$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ une base de F.

1. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k^* = 0$. Donc :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \lambda e_k^* = 0 \\ \iff & \forall j \in \{1, \dots, n\},\ \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k^*(e_j) = 0 \\ \iff & \forall j \in \{1, \dots, n\},\ \sum_{k=1}^n \lambda_k \delta_{k,j} = 0 \\ \iff & \forall j \in \{1, \dots, n\},\ \lambda_j = 0. \end{aligned}$$

   Donc, par définition, la famille $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ est libre.

   On ne peut pas utiliser la dimension de E^* pour conclure. Ça reviendrais à utiliser la dimension de $\mathcal{L}(E,F)$, qui est précisément ce qu'on veut trouver. On est donc contrait de montrer que $\mathcal{B}^*$ est aussi une famille génératrice de E^*.

   Soit $f \in E^*$. On pose $g = \sum_{k=1}^n f(e_k) e_k^* \in E^*$. Alors

$$\forall j \in \{1, \dots, n\},\ g(e_j) = \sum_{k=1}^n f(e_k) e_k^*(e_j) = f(e_j).$$

   Donc $f(\mathcal{B}) = g(\mathcal{B})$. Or, en dimension finie, une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base. Donc $f = g$. Et donc $f \in \mathrm{Vect}(\mathcal{B}^*)$. Donc E^*
   $subset\, \mathrm{Vect}(\mathcal{B}^*)$. Or $\mathrm{Vect}(\mathcal{B}^*) \subset E^*$, donc $E^* = \mathrm{Vect}(\mathcal{B}^*)$.

   Finalement, $\mathcal{B}^*$ est une famille libre et génératrice de E^*. Donc $\mathcal{B}^*$ est une base de E^* (et donc aussi $\dim(E^*) = n$).

2. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, p\}$. Alors $\forall x \in E$, $e_i^*(x) \in \mathbb{K}$. Donc $\forall x \in E$, $e_i^*(x)\varepsilon_j$ est bien définie. On peut donc définir une application

$$e_i^*\varepsilon_j : \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & e_i^*(x)\varepsilon_j \end{array}$$

   De plus, comme e_i^* est linéaire et que le LCE de E est bilinéaire, on en déduit que $e_i^*\varepsilon_j$ est linéaire. Donc $e_i^*\varepsilon_j \in \mathcal{L}(E,F)$.

3. Soit $(a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ des scalaires tels que $\sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}} a_{i,j} e_i^* \varepsilon_j = 0$. En particulier, on en déduit

$$\begin{aligned} & \forall k \in \{1, \dots, n\},\ \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}} a_{i,j} e_i^*(e_k)\varepsilon_j = 0 \\ \iff & \forall k \in \{1, \dots, n\},\ \sum_{j=1}^p a_{k,j}\varepsilon_j = 0 \\ \iff & \forall k \in \{1, \dots, n\},\ a_{k,1} = \cdots = a_{k,p} = 0 && \text{car } \mathcal{C} \text{ libre} \\ \iff & \forall k \in \{1, \dots, n\},\ \forall j \in \{1, \dots, p\},\ a_{k,j} = 0 \end{aligned}$$

   Donc $(e_1^*\varepsilon_j)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ est libre.

4. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $f(e_i) \in F$. Or $\mathcal{C}$ est une base de F. Donc $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\exists a_{i,1}, \dots, a_{i,p} \in \mathbb{K}$ tels que $f(e_i) = \sum_{j=1}^p a_{i,j}\varepsilon_j$. On pose alors $g = \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}} a_{i,j} e_i^* \varepsilon_j$.

   Alors

$$\forall k \in \{1, \dots, n\},\ g(e_k) = \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}} a_{i,j} e_i^*(e_k)\varepsilon_j$$

$$= \sum_{j=1}^{p} a_{k,j}\varepsilon_j$$
$$= f(e_k).$$

Donc $g(\mathcal{B}) = f(\mathcal{B})$. Or une application linéaire, en dimension finie, est entièrement déterminée par l'image d'une base. Donc $f = g$. Et donc $(e_i^*\varepsilon_j)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ engendre $\mathcal{L}(E,F)$.

5. D'après les deux dernières questions, on vient donc de montrer que $(e_i^*\varepsilon_j)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ est une base de $\mathcal{L}(E,F)$. D'où, par définition de la dimension,
$$\dim(\mathcal{L}(E,F)) = np = \dim(E)\dim(F).$$