

# TP N°0 :

## ETUDE DE LA SUITE DE SYRACUSE

### OBJECTIFS DU TP

Dans ce TP, (comme dans les suivants) veiller à ce que toutes les fonctions écrites contiennent :

- Une spécification précise, annotations et commentaires, jeux de tests ;
- Une signature : spécification des données attendues en entrée, et fournies en sortie.

### SPECIFICATION ET SIGNATURE

La **signature** de la fonction permet de préciser à l'utilisateur le type du (ou des) arguments et paramètre(s) d'entrée et le type du résultat retourné (si la fonction retourne un résultat).

La **documentation** (« *docstring* » en Anglais) associée à un programme ou à une fonction est l'ensemble des informations permettant de comprendre ce que fait le programme et de l'utiliser correctement. Ce sont les informations qui apparaissent lorsque l'on utilise `help()` en python.

#### Rappel : notations types

<code>bool</code>	: booléens
<code>int</code>	: entiers
<code>float</code>	: flottants
<code>str</code>	: chaînes de caractères
<code>(type1, type2)</code>	: tuples
<code>[type]</code>	: listes
<code>{type1:type2}</code>	: dictionnaires
<code>Callable</code>	: fonctions

Une **documentation** (ou **spécification**) correctement construite doit, à minima, comporter les éléments suivants :

- une description de la tâche effectuée par la fonction ;
- une description des entrées (arguments et paramètres) de la fonction précisant en particulier le type de ces entrées et les plages de valeurs auxquelles celle-ci sont limitées ;
- une description de la sortie de la fonction, précisant le type et le contenu de celle-ci ;
- un jeu de test (voir ci-après).

```
def nom_fonction(x:int)->str :
    """
    La fonction permet de ...

    entrée : sens et type des variables d'entrée

    sortie : sens et type des variables de sortie

    =====
    jeux de tests :

    >>> fonction(3)
    ('résultat attendu pour x=3') # c'est à vous de déterminer le résultat attendu

    """

    #corps de la fonction

    return("résultat attendu pour x donné")
```

Pour ce TP, vous aurez besoin des fonctions du module `matplotlib.pyplot` pour le tracé de graphes (notamment : `plot` et `show`).

## I. PRESENTATION DU PROBLEME

### Document 1 : Enoncé du problème de Syracuse

Dans les années 1920, L. Collatz, un mathématicien Allemand introduit une suite définie de la manière suivante :

*Soit  $N$  un entier naturel (non-nul). La suite de Syracuse de  $N$  est définie par récurrence comme :*

$$\begin{cases} u_0 = N \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \begin{cases} \frac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ est pair} \\ 3 \times u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ est impair} \end{cases} \end{cases}$$

Cette suite conduit à la conjecture suivante :

*Quel que soit l'entier naturel (non-nul)  $N$  de départ, il existe un rang  $n$  tel que  $u_n = 1$ .*

Pour tenter de démontrer cette conjecture, le problème a été confié à l'Université de Syracuse, puis aux meilleurs mathématiciens de l'époque. A ce jour, la conjecture n'a jamais été mise en défaut mais n'a pas non plus été démontrée.

- Q1.** Vérifier que la conjecture de Syracuse est valable pour  $N = 5$ .
- Q2.** Montrer que si la conjecture de Syracuse est vraie, toute suite de Syracuse est périodique au-delà d'un certain rang.

## II. VOL DE LA SUITE DE SYRACUSE

### Document 2 : définition « vol » de la suite

La succession des termes de la suite de Syracuse de  $N$  allant de  $u_0 = N$  à  $u_n = 1$  est appelée « **vol** » de la suite.

*Exemple : Le vol de la suite de Syracuse de 21 est :*

$$\text{vol}(21) = (21, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1)$$

- Q3.** Ecrire une fonction `syracuse` prenant comme argument un entier  $N$ , et retournant une liste contenant le vol de la suite de Syracuse de  $N$ .
- Q4.** Proposer une suite d'instruction permettant de déterminer le vol de 42.
- Q5.** Ecrire une fonction `graphevol` prenant comme argument un entier  $N$ , et affichant le vol de la suite de Syracuse de  $N$  sous la forme d'un graphique  $u_n = f(n)$ . La fonction `graphevol` ne retourne rien. On utilisera la fonction `syracuse`.

### III. QUELQUES CARACTERISTIQUES DE LA SUITE DE SYRACUSE

#### Document 3 : Caractéristiques de la suite de Syracuse

Le **temps de vol** est le rang  $n$  minimal tel que  $u_n = 1$ .

*Exemple : Le temps de vol de la suite de Syracuse de 21 est 7.*

Le **temps de vol en altitude** est le plus petit indice tel que  $u_{n+1} < u_0$ .

*Exemple : Le temps de vol en altitude de la suite de Syracuse de 21 est 2.*

L'**altitude maximale** est la valeur maximale atteinte durant le vol.

*Exemple : l'altitude maximale de la suite de Syracuse de 21 est 64.*

- Q6.** Déterminer le vol pour  $N = 5$ , puis le temps de vol, le temps de vol en altitude et l'altitude maximale pour cette suite.
- Q7.** Ecrire une fonction **tempsvol** prenant comme argument un entier  $N$ , et retournant le temps de vol de la suite de Syracuse de  $N$ . On utilisera la fonction **syracuse**.
- Q8.** Ecrire une fonction **tempsvolalt** prenant comme argument un entier  $N$ , et retournant le temps de vol en altitude de la suite de Syracuse de  $N$ . On utilisera la fonction **syracuse**.
- Q9.** Ecrire une fonction **altmax** prenant comme argument un entier  $N$ , et retournant l'altitude maximale de la suite de Syracuse de  $N$ . On utilisera la fonction **syracuse**.

### IV. ETUDE DE LA SUITE DE SYRACUSE POUR $N \in \llbracket 1, 10\,000 \rrbracket$

- Q10.** Ecrire une fonction **volmax** prenant comme arguments deux entiers  $A$  et  $B$ , et retournant l'entier  $N$  pour lequel la suite de Syracuse possède un temps de vol supérieur à celui de tous les entiers compris entre  $A$  et  $B$ . On utilisera la fonction **tempsvol**.
- Q11.** Proposer une suite d'instructions permettant de déterminer quel est l'entier possédant le temps de vol le plus grand sur l'intervalle  $\llbracket 1, 10\,000 \rrbracket$ .
- Q12.** Ecrire une fonction **graphe\_tempsvol** prenant comme arguments deux entiers  $A$  et  $B$ , et affichant le temps de vol pour chacune des suites de Syracuse de  $N$ , pour  $N$  compris entre  $A$  et  $B$ . La fonction **graphe\_tempsvol** ne retourne rien. On utilisera la fonction **tempsvol**.
- Q13.** Proposer une suite d'instructions permettant d'afficher le graphe représentant le temps de vol  $N$  en fonction de  $N$ , pour  $N$  compris entre 1 et 10 000.
- Q14.** Ecrire une fonction **graphe\_altmax** prenant comme arguments deux entiers  $A$  et  $B$ , et affichant l'altitude maximale pour chacune des suites de Syracuse de  $N$ , pour  $N$  compris entre  $A$  et  $B$ . La fonction **graphe\_altmax** ne retourne rien. On utilisera la fonction **altmax**.
- Q15.** Proposer une suite d'instructions permettant d'afficher le graphe représentant l'altitude maximale de  $N$  en fonction de  $N$ , pour  $N$  compris entre 1 et 10 000.