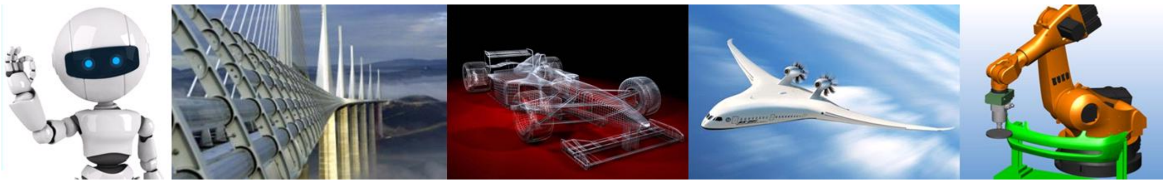
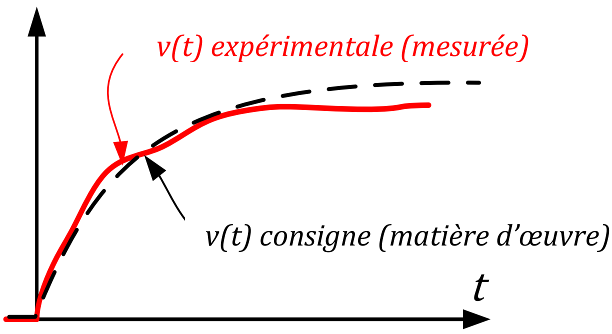


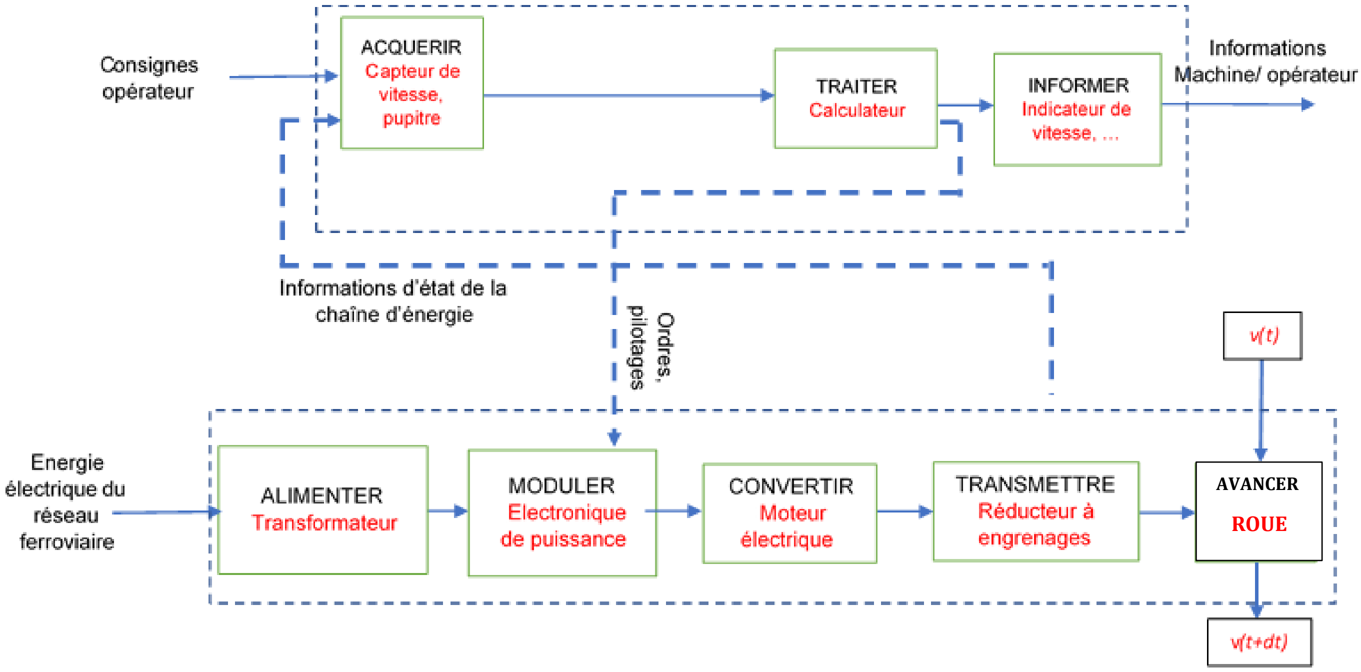
C2 - Grandeurs physiques, unités et homogénéité

Mise en contexte :



Performance requirement 1.1 : Atteindre une vitesse de 50 km/h minimum.

Performance requirement 1.2 : Atteindre une vitesse de 45 km/h en moins de 8 $secondes$.



Dans une démarche d'ingénierie, nous allons devoir passer par des étapes de modélisations de systèmes multi physiques donc liés à des technologies issues de divers domaines : hydraulique, pneumatique, électronique, mécanique, thermodynamique, …

Pour modéliser ces systèmes, afin de simuler leur comportement et prévoir leurs performances, nous serons amenés à manipuler des **grandeurs physiques** de différentes natures : pressions, efforts, débits, intensités, tensions, vitesses… Pour parvenir à modéliser les systèmes, un point crucial est de se baser sur les grandeurs physiques et les unités correspondantes.

Compétences attendues :

- Savoir effectuer un calcul intégral et dérivé élémentaire dans le cadre des équations du mouvement ;
- Savoir manipuler ces équations (lois horaires ; durée ; distances ; …) ;
- Savoir effectuer un calcul numérique en tenant compte des unités ;
- Savoir calculer une force ou un moment ;
- Savoir appliquer le PFD pour les mouvements de translation et de rotation et calculer une accélération ;
- Savoir identifier les puissances sortante et entrante d'un système et leurs natures et calculer un rendement.

1. GRANDEURS PHYSIQUES (VALEURS ET UNITÉS)

> Nota : toutes les grandeurs physiques mécaniques sont ici abordées en une dimension. Les formes généralisées dans le plan et l'espace seront abordées ultérieurement (Cycles d'approfondissements : moitié du programme de SII sur les 2 années...)

1.1. Domaine de la mécanique : mouvement (souvent matière d'œuvre)

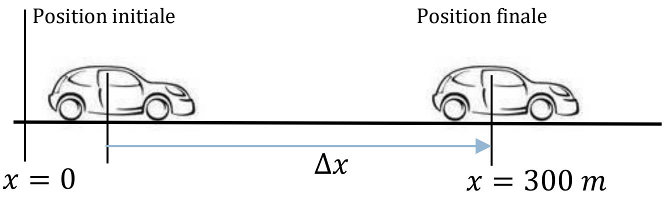
Position

Mouvement de translation rectiligne

Lors d'un mouvement de translation, chaque point du solide subit le même déplacement que l'on peut noter Δx.

A l'aide d'un axe $(O, \vec{x})$ définissant le mouvement, on choisit une position de référence O (pour laquelle $x = 0$), on pourra définir la **position $\boldsymbol{x(t)}$**.

Son unité SI est le **mètre (m).**



Mouvement de rotation autour d'un axe fixe

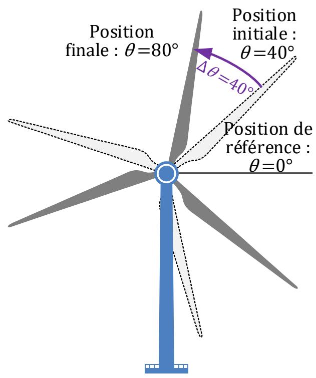
Lors d'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe, l'ensemble du solide subit une variation de position angulaire $\Delta\theta$.

Si on décide d'une position angulaire de référence (pour laquelle $\theta = 0$), on peut définir la position angulaire $\theta(t)$.

Son unité SI est le **radian (rad).**

On utilise aussi le **tour (tr)** et le **degré (°)**.

$\boxed{360° = 2\pi\ rad = 1\ tr}$



> $x(t)$ et $\theta(t)$ sont des fonctions renvoyant une grandeur algébriques (positive ou négative).

Remarquons que pour définir correctement un déplacement d'un solide *i*, il faut toujours un repère de référence *j*. **On notera $\boldsymbol{x_{i/j}}$ et $\boldsymbol{\theta_{i/j}}$ (de même pour les vitesses et les accélérations)**

Position, vitesse et accélération (équation du mouvement selon une direction)

La bonne démarche

Mouvement de translation rectiligne		**Mouvement de rotation autour d'un axe fixe**	
On peut associer à un corps en translation rectiligne une vitesse $v(t)$ et une accélération $\Gamma(t)$.		On peut associer à un corps en rotation autour d'un axe fixe une vitesse et une accélération qui portent le nom de vitesse angulaire $\omega(t)$ ou $\dot{\theta}(t)$ et accélération angulaire $\dot{\omega}(t)$ ou $\ddot{\theta}(t)$.	
Position (m)	$x(t)$	Position angulaire (rad)	$\theta(t)$
Vitesse $m.s^{-1}$	Relation de dérivation ($x(t)$ étant connue) : $\dot{x}(t) = v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ Relation d'intégration ($v(t)$ étant connue) : $\frac{dx(t)}{dt}.dt = v(t).dt$ **Soit** $\int_{t_1}^{t_2} dx(t) = \int_{t_1}^{t_2} v(t).dt$ $x(t_2) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t).dt$	Vitesse angulaire $rad.s^{-1}$	Relation de dérivation ($\theta(t)$ étant connue) : $\dot{\theta}(t) = \omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$ Relation d'intégration ($\omega(t)$ étant connue) : $\frac{d\theta(t)}{dt}.dt = \omega(t).dt$ **Soit** $\int_{t_1}^{t_2} d\theta(t) = \int_{t_1}^{t_2} \omega(t).dt$ $\theta(t_2) - \theta(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \omega(t).dt$
Accélération $m.s^{-2}$	Relation de dérivation ($v(t)$ étant connue) : $\Gamma(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \ddot{x}(t)$ Relation d'intégration ($\ddot{x}(t)$ étant connue) : $\frac{dv(t)}{dt}.dt = \ddot{x}(t).dt$ **Soit** $\int_{t_1}^{t_2} dv(t) = \int_{t_1}^{t_2} \ddot{x}(t).dt$ $v(t_2) - v(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \ddot{x}(t).dt$	Accélération angulaire $rad.s^{-2}$	Relation de dérivation ($\omega(t)$ étant connue) : $\frac{d\omega(t)}{dt} = \ddot{\theta}(t)$ Relation d'intégration ($\ddot{\theta}(t)$ étant connue) : $\frac{d\omega(t)}{dt}.dt = \ddot{\theta}(t).dt$ **Soit** $\int_{t_1}^{t_2} d\omega(t) = \int_{t_1}^{t_2} \ddot{\theta}(t).dt$ $\omega(t_2) - \omega(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \ddot{\theta}(t).dt$

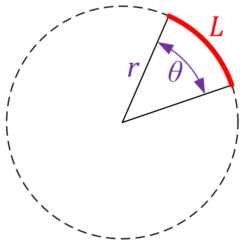
$v(t)$ et $\omega(t)$ sont des grandeurs algébriques. Le signe permet de connaître le sens de parcours. De même, le signe de l'accélération permet de savoir si la vitesse augmente ou diminue *algébriquement.*

Les vitesses et vitesses angulaires sont souvent données en km/h et en tr/min. Pour les applications numériques, nous devrons toujours manipuler les valeurs dans les unités du Système International (SI). Conversions :

$$90\,km/h = 90\,\frac{km}{h} \equiv 90\,\frac{1000\,m}{3600\,s} = 25\,m/s \quad \text{et} \quad \underbrace{1500\,tr/min}_{souvent\ notée\ \boldsymbol{N}} = 1500\,\frac{tr}{min} \equiv 1500\,\frac{2.\pi}{60\,s} = \underbrace{157{,}1\,rad/s}_{souvent\ notée\ \boldsymbol{\omega}}$$

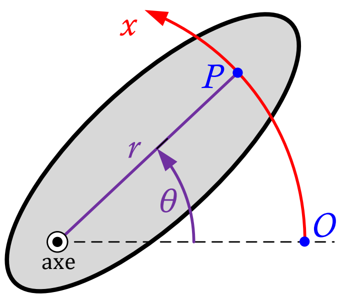
Déplacement et vitesse d'un point lors d'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe

Lors d'un mouvement de rotation, tous les points décrivent un arc de cercle. La longueur curviligne d'un arc de cercle L se calcule en fonction du rayon r et de l'angle d'ouverture θ de la façon suivante :



$$\boxed{L = r.\theta}$$

Nota : on retrouve bien l'expression du périmètre d'un cercle : $2.\pi.r$.



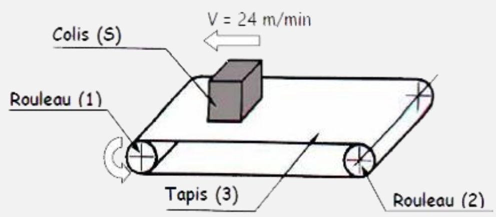
Ainsi, si on note $x(t)$ l'abscisse curviligne d'un point P et en imposant $x(t) = 0$ pour $\theta(t) = 0$, on trouve :

$$\boxed{x(t) = r.\theta(t)}$$

En dérivant par rapport au temps la relation précédente, on trouve la vitesse $v(t)$ du point P :

$$\frac{dx(t)}{dt} = r.\frac{d\theta(t)}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{v(t) = r.\omega(t)}$$

Application : convoyeur de cartons



Le dispositif étudié est un convoyeur permettant de déplacer des colis entre 2 postes. Le repère fixe est noté (**0**).

Les colis sont posés sur un tapis horizontal (**3**) entraîné par 2 rouleaux (**1**) et (**2**) de rayon $r = 10\ cm$. La vitesse de translation rectiligne du colis (ou du tapis) par rapport à (**0**), est notée $V_{3/0} = V = 24\ m/min$. Il n'y a pas de glissement entre les rouleaux et tapis.

Déplacement à vitesse constante

1. Déterminer la vitesse angulaire **constante** $\overline{\omega}_{1/0}$ du rouleau (**1**) par rapport à (**0**).
2. De quel angle $\Delta\theta$ aura tourné le rouleau (1) à $t_2 = 2$ secondes. De quelle longueur Δx se sera déplacé le colis ?

A priori, $\omega_{1/0}$ est une fonction du temps mais dans cette phase,

$$\omega_{1/0}(t) = \overline{\omega}_{1/0} = \frac{V}{r} \quad \text{AN :}\ \overline{\omega}_{1/0} = \frac{24/60}{0{,}1} \quad \boxed{\overline{\omega}_{1/0} = 4\,rad/s}$$

$$Par\ ailleurs, \Delta\theta = \theta(t_2) - \theta(0) = \int_0^{t_2} \frac{d\theta(t)}{dt}.dt = \int_0^{t_2} \omega_{1/0}(t).dt$$

$$\Leftrightarrow \Delta\theta = \theta(2) - \theta(0) = \int_0^2 \omega_{1/0}(t).dt = \int_0^2 \overline{\omega}_{1/0}\,.dt \qquad \boxed{\Delta\theta = 8\,rad\ (=\ 458°)}$$

Et $\Delta x = r.\Delta\theta = 0{,}1.8 = 0{,}8\,m$ $\quad$ *ou encore*, $\Delta x = V.\Delta t = V.(t_2 - 0) = \frac{24}{60}.2 = 0{,}8\,m$

Mouvement uniformément décéléré

Ce rouleau initialement à vitesse angulaire $\overline{\omega}_{1/0}$ s'arrête de tourner selon un mouvement uniformément freiné au bout de $t_f = 30\,s$.

3. Calculer la « décélération » angulaire $\overline{\ddot{\theta}_{1/0}}$ **constante** du rouleau (1) avec $\ddot{\theta}_{1/0} < 0$. Quelle est le placement Δx_f du tapis pendant le freinage ?

Dans cette phase, $\omega_{1/0}(t)$ n'est plus constante mais $\ddot{\theta}_{1/0}$ l'est.

$$\frac{d\omega_{1/0}(t)}{dt} = \ddot{\theta}_{1/0}(t) = \overline{\ddot{\theta}_{1/0}} \Leftrightarrow \int_{t_2}^{t} d\omega_{1/0}(t) = \int_{t_2}^{t} \overline{\ddot{\theta}_{1/0}}.dt \Leftrightarrow \omega_{1/0}(t) - \omega_{1/0}(t_2) = \overline{\ddot{\theta}_{1/0}}.(t - t_2)$$

On en déduit que $\omega_{1/0}(t) = \overline{\omega}_{1/0} + \overline{\ddot{\theta}_{1/0}}.(t - t_2)\ \ car\ \ \omega_{1/0}(t_2) = \overline{\omega}_{1/0}$

Pour $t = t_f$, le rouleau est à l'arrêt donc : $\omega_{1/0}(t_f) = 0$. Ainsi : $0 - \overline{\omega}_{1/0} = \overline{\ddot{\theta}_{1/0}}.(t_f - 2)$ soit :

$$\overline{\ddot{\theta}_{1/0}} = -\frac{\overline{\omega}_{1/0}}{t_f - t_2} \qquad A.N.:\ \overline{\ddot{\theta}_{1/0}} = -\frac{4}{28} \qquad \boxed{\overline{\ddot{\theta}_{1/0}} = -0{,}143\,rad.s^{-2}}$$

On sait que $\Delta x_f = r.\Delta\theta = r.(\theta(t_f) - \theta(2))$. On intègre de nouveau pour obtenir l'angle parcouru :

$$\int_{t_2}^{t} d\theta(t) = \int_{t_2}^{t} \omega_{1/0}(t).dt = \int_{t_2}^{t} (\overline{\omega}_{1/0} + \overline{\ddot{\theta}_{1/0}}.(t - t_2)).dt$$

$$\theta(t) - \theta(t_2) = \frac{1}{2}.\overline{\ddot{\theta}_{1/0}}.(t-2)^2 + \overline{\omega}_{1/0}.(t - t_2)$$

Ainsi :

$$\Delta x_f = r.\left(\frac{1}{2}.\overline{\ddot{\theta}_{1/0}}.(t_f - 2)^2 + \overline{\omega}_{1/0}.(t_f - 2)\right)\ \text{A. N.:}\ \Delta x_f = 0{,}1.\left(-\frac{1}{2}\ 0{,}143.28^2 + 4.28\right) \quad \boxed{\Delta x_f = 5{,}59\,m}$$

1.2. Domaine de la mécanique : actions mécaniques (actionneurs, …)

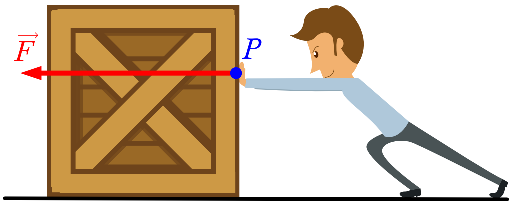
Définition : une action mécanique est une cause capable :

- de créer ou modifier le mouvement d'un corps ;
- de déformer un corps.

Plusieurs possibilités s'offrent au mécanicien pour les modéliser, ce sera l'objet du cours « Modélisation des Actions Mécaniques ». Dans ce cours, on parlera de deux types d'actions mécaniques : les forces et les moments de forces.

- ## Force (vérins, …)

La **force** est une action mécanique entre deux systèmes matériels caractérisée par un vecteur $\vec{F}_{personne \to caisse}$, ainsi qu'un point d'application P. L'unité de la norme de ce vecteur est le **Newton (N)**.



Ordres de grandeur

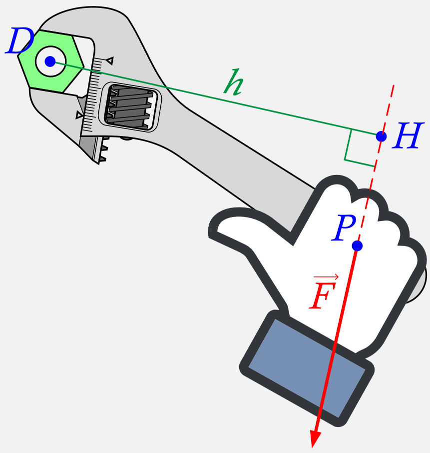
Force de pesanteur sur un objet de 1 kg	10 N
Force pour rompre un filin de 1 mm^2 d'acier	environ 500 N
Poussée réacteur M88-2 du Rafale avec postcombustion	75 kN

- ## Moment de force (moteurs, …)

Le **moment** de force est une **action mécanique** entre deux systèmes matériels qui caractérise une intention de mise en rotation d'un objet (ou de réduire sa rotation). Le moment est un vecteur obtenu par le produit d'une **force** et d'un **bras de levier**. Le bras de levier est la distance, perpendiculaire, du point de rotation que l'on considère à la droite d'action de la force qui génère le moment.

Exemple :

On souhaite mesurer le serrage d'écrou imposé par un opérateur à l'aide d'une clef. C'est l'intention de mise en rotation de l'ensemble E = {écrou + clef} autour de l'axe de rotation passant par D.



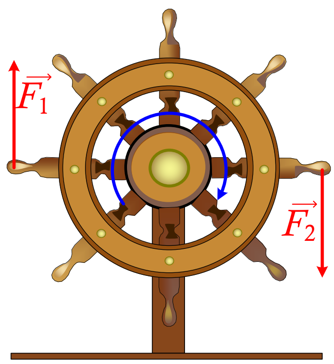
Ce moment au point D de la force $\vec{F}_{main \to E}$ est proportionnel à la force extérieure $F = \left\|\vec{F}_{main \to E}\right\|$ et à la distance h. h est le bras de levier c'est-à-dire la distance DH avec H le projeté orthogonal de D sur la droite d'action $\left(P, \vec{F}_{main \to E}\right)$.

Ainsi, on note :

$$\boxed{M\left(D, \vec{F}_{main \to E}\right) = \pm\, h.F}$$

On définira plus rigoureusement, dans le cycle 2, le moment qui est un vecteur $(selon\ l'axe\ (D, \vec{n}), \vec{n}\ étant\ un\ vecteur\ unitaire\ normal\ au\ plan\ de\ la\ feuille)$

En appliquant deux forces opposées (donc de somme vectorielle **nulle**) comme montré sur la figure ci-contre, on exerce une action mécanique qui tend à entrainer en rotation l'objet. Cette action est appelée **couple**. *Le couple est issu des moments de deux forces.*



Le **moment de force** et le **couple** sont exprimés en $\boldsymbol{N.m}$

1.3. Principe fondamental de la dynamique : masse, inertie et lien entre actions mécaniques (actionneurs) et cinématique (matière d'œuvre)

La masse est une grandeur bien connue (unité SI : kg).

Dans le cas, du **mouvement de translation rectiligne** d'un solide **S** par rapport à un repère galiléen noté (**0**), elle intervient dans une des relations du Principe Fondamental de la Dynamique (PFD), appelé aussi Deuxième Loi de Newton en Physique :

$\boxed{\sum F_{ext \to S} = m.\Gamma_{S/0}(t) = m.\ddot{x}_{S/0}(t)}$ c'est le ***Théorème de la résultante dynamique***

Application : le Rafale ($M = 10\ t$) génère en post-combustion une poussée $F_{pc} = 150000\ N$. Quelle est son accélération pour une montée selon la verticale $(O, \vec{z})$?

Pour le **mouvement de rotation du solide S autour de l'axe** $\Delta\ avec\ O \in \Delta$ l'équation issue du PFD est :

$$\boxed{\sum M(O, F_{ext \to S}) = J_{\triangle}.\ddot{\theta}_{S/0}(t)}$$

- $\sum M(O, \vec{F}_{ext \to S})$: somme des composantes des moments de forces et de couples au point O*, selon l'axe* Δ, s'exerçant sur S ;
- $\ddot{\theta}_{S/0}(t)$: accélération angulaire (rad/s^2) ;
- $J_{\triangle}$: moment d'inertie par rapport à l'axe Δ, en $kg.m^2$.

C'est le *Théorème du moment dynamique*

Mais en vrai, c'est quoi cette inertie ?

L'inertie est une grandeur physique dépendante du carré de l'éloignement de la masse par rapport à l'axe de rotation. Elle apparaît dans le traitement mathématique des équations de la dynamique. Concrètement, plus la masse est proche de l'axe de rotation plus le solide est mis facilement en rotation.

Exemple : tour à meuler

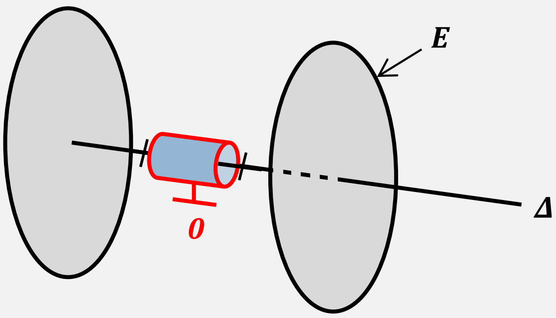
La meule est constituée de deux cylindres pleins de masse volumique $4\ 000\ kg/m^3$ de diamètre $D = 600\ mm$ et d'épaisseur $e = 25\ mm$ et d'un arbre de masse négligeable qui les relie. Elle tourne à la fréquence de rotation $N_{E/0} = 900\ tr/min$. On note $\boldsymbol{E} = \{meule\}$ et $\boldsymbol{0}$ le carter (fixe).

L'effort de meulage du couteau est modélisé par une force tangente à la meule, d'intensité $\|\vec{F}_{couteau \to E}\| = \|\vec{F}\| = 60\ N$.

Un couple de frottement constant de son arbre sur les paliers est : $C_{palier \to E} = C_f = 5\ N.m$.

Le moment d'inertie d'un cylindre selon son axe de révolution : $J_\Delta = m.\frac{r^2}{2} = 2{,}5\ kg.m^2$

Schéma à compléter :



Phase de meulage

- *En phase de meulage à vitesse de rotation constante, quel couple $C_{mot \to E} = C_m$ le moteur doit-il fournir ?*

La vitesse est constante donc $\ddot{\theta}_{E/0}(t) = 0$ et l'équation du PFD pour ce mouvement de rotation autour d'un axe fixe donne :

$$\underbrace{-M(0,F) - C_f}_{\substack{car\ ils\ s'opposent \\ à\ la\ rotation}} + C_m = J_\Delta.\ \ddot{\theta}_{E/0}(t) = 0$$

Or : $M(0,F) = \frac{D}{2}.F = 0{,}3.60 = 18\ N.m$

On en déduit que : $C_m = 18 + 5$ $\boxed{C_m = 23\ N.m}$

Phase de mise en immobilisation de la meule

Pour arrêter l'outil, on débraye le moteur et le couteau n'est plus en contact avec la meule.

- *Calculer l'accélération angulaire $\ddot{\theta}_{E/0}(t)$ de la meule.*

Dans ce cas, on a : $J_\Delta.\ \ddot{\theta}_{E/0}(t) = -C_f = cste\ donc\ \ddot{\theta}_{E/0}(t)\ \ est\ constant$ notons-la $\overline{\ddot{\theta}_{E/0}}$.

Le calcul donne :

$$\ddot{\theta}_{E/0}(t) = -\frac{C_f}{J_\Delta}(= cste = \overline{\ddot{\theta}_{E/0}}) \quad \text{A.N.} : \overline{\ddot{\theta}_{E/0}} = -\frac{5}{2{,}5} \quad \boxed{\overline{\ddot{\theta}_{E/0}} = -2{,}0\ rad.s^{-2}}$$

- *Calculer le temps d'immobilisation t_f.*

En intégrant l'accélération, on obtient la vitesse de rotation :

$$\omega_{E/0}(t) - \omega_{E/0}(0) = \int_0^t \ddot{\theta}(t).dt\,, \qquad \omega_{E/0}(t) = \overline{\ddot{\theta}_{E/0}}.(t-0)$$

A l'arrêt : $\omega_{E/0}(t_f) = 0 = \overline{\ddot{\theta}_{E/0}}.t_f + \omega_{E/0}(0)$

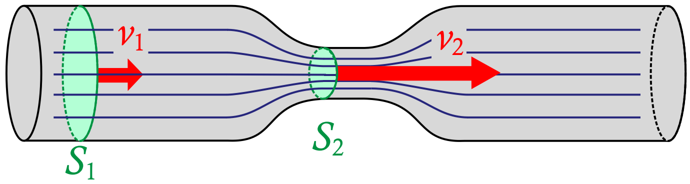
Ainsi :

$$t_f = \frac{\omega_{E/0}(t_f) - \omega_{E/0}(0)}{\overline{\ddot{\theta}_{E/0}}} = \frac{-900.2\pi}{60}.\frac{1}{-2{,}0} \quad \boxed{t_f = 47\ s}$$

Remarque : La maîtrise des actionneurs (leurs asservissements) permettra d'après le PFD de maîtriser la cinématique (souvent la matière d'œuvre) des effecteurs.

1.4. Débits

Soit une conduite dans laquelle circule un fluide. On appelle section de passage la surface S à travers laquelle s'écoule le fluide. Le **débit** est la quantité de matière (exprimée en masse ou un volume V) qui passe à chaque unité de temps à travers cette section.



Débit volume :

$$Q(t) = q_v(t) = \frac{dV}{dt} \quad en \quad m^3.s^{-1}$$

Connaissant la section de la conduite et la vitesse du fluide, on peut facilement déterminer le débit :

$$\boxed{Q(t) = q_v(t) = S.v(t)}$$

Débit masse :

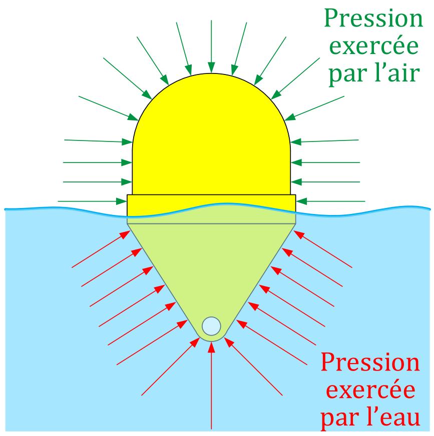
$$q_m(t) = \frac{dm}{dt} = \frac{\rho.dV}{dt} donc \boxed{q_m(t) = \rho.S.v(t)} \quad en \quad kg.s^{-1}$$

Relation entre débit masse et débit volume :

$$\boxed{q_m(t) = \rho.S.v(t) = \rho.q_v(t)}$$

Exemple de calculs au paragraphe suivant.

1.5. Pression



Tous les fluides au repos (liquide ou gaz) exercent sur toutes les surfaces avec lesquelles ils sont en contact, une action normale en tout point à ces surfaces.

C'est la **pression**.

L'unité du système international (SI) pour les pressions est le **Pascal (*Pa*).**

$$\boxed{1\ Pa = 1\ N/m^2} \ (1\ MPa = 1\ N/mm^2)$$

Le bar est aussi une unité très utilisée pour les pressions : $\boxed{1\ bar = 10^5\ Pa}$

Il existe de multiples autres unités pour la pression (atmosphère, PSI, mm de mercure…).

Ordres de grandeurs

Emballage sous vide	10 kPa	100 $mbar$
Pression du réseau d'air comprimé du lycée	400 à 800 kPa	4 à 8 bar

Pression dans une bouteille de champagne	407 à 707 kPa	4,07 à 7,07 bar
Pression d'expulsion de l'eau d'un nettoyeur sous pression	10 Mpa	100 bar
Pression au fond de la fosse des Mariannes, environ 10 km sous la surface de l'océan.	100Mpa	1000 bar

Lien force-pression

Il est souvent nécessaire de connaître la force équivalente à la pression exercée sur une surface :

Quand la pression est homogène et la surface plane, on calcule la force équivalente à cette pression par :

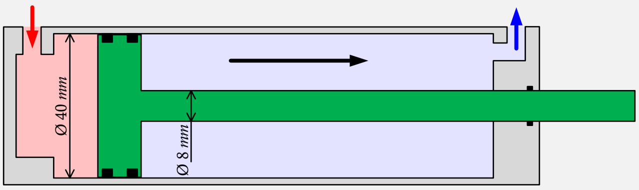
$$\boxed{F = p.S}$$

Exemple de calculs de forces et de débits : vérin double effet

Un **vérin** est un **actionneur** permettant de ***convertir une énergie fluidique en travail mécanique***. Le vérin double effet est muni de deux chambres tantôt alimentées en basse pression tantôt en haute pression. On note la basse pression $p_{BP} = 2\ bars$ et la haute pression $p_{HP} = 6\ bars$

Déterminons la force équivalente due au fluide sur la tige du vérin (en vert) dans les deux cas suivants :

Cas : Grande chambre à la HP



Grande chambre : $F_{GC} = p_{HP}.S_{GC}$

$$F_{GC} = 6.10^5.\pi.\left(\frac{40.10^{-3}}{2}\right)^2 = 754\ N$$

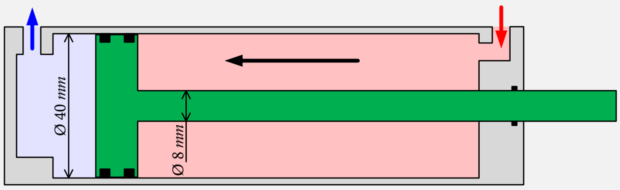
Petite chambre : $F_{PC} = -p_{BP}.S_{PC}$

$$F_{PC} = -2.10^5.\pi.\left[\left(\frac{40.10^{-3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{8.10^{-3}}{2}\right)^2\right] = -241\ N$$

Au final, la force du fluide sur la tige est :

$$F_{fluide \to tige} = 754 - 241 = 513\ N \text{ (dirigée vers la droite)}$$

Cas : Petite chambre à la HP



Grande chambre : $F_{GC} = p_{BP}.S_{GC}$

$$F_{GC} = 2.10^5.\pi.\left(\frac{40.10^{-3}}{2}\right)^2 = 251\ N$$

Petite chambre : $F_{PC} = -p_{HP}.S_{PC}$

$$F_{PC} = -6.10^5.\pi.\left[\left(\frac{40.10^{-3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{8.10^{-3}}{2}\right)^2\right] = -723\ N$$

Au final, la force du fluide sur la tige est :

$$F_{fluide \to tige} = 251 - 723 = -472\ N \text{ (dirigée vers la gauche)}$$

*Remarque : Si la vitesse de la **tige** par rapport au **corps** du vérin est notée $V_{T/C}$, alors le calcul des débits entrant et sortant des chambres est fait avec la relation $Q(t) = S.v(t)$ (voir 1.4). Et,*

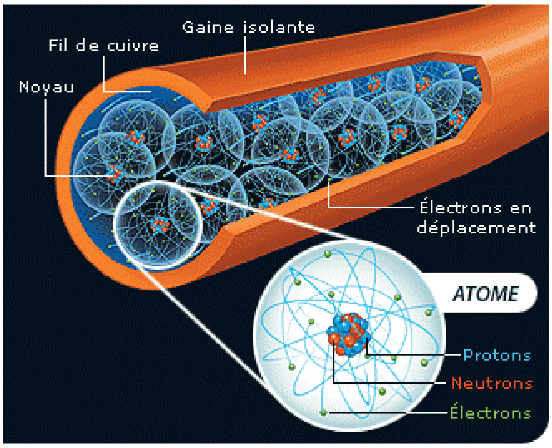
Pour la petite chambre $\quad Q_{PC}(t) = S_{PC}.V_{T/C}(t) = \pi.\left[\left(\frac{D}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2\right].V_{T/C}(t)$

Pour la grande chambre $\quad Q_{GC}(t) = S_{GC}.V_{T/C}(t) = \pi.\left(\frac{D}{2}\right)^2.V_{T/C}(t)$

A.N : Pour $V_{T/C}(t) = 0{,}5\ m/s$

1.6. Domaine de l'électricité

Intensité



Un courant électrique est une circulation de porteurs de charges électriques. L'intensité du courant électrique est la grandeur qui quantifie le débit de charge en un point du circuit.

On peut dire que l'intensité du courant est la quantité de charges électriques traversant une section du circuit pendant une seconde.

L'orientation du circuit en ce point fait que l'intensité est une grandeur algébrique (avec un signe).

Unité de l'intensité : l'**ampère (A)**.

Quelques ordres de grandeurs d'intensités…

LED de lampe de poche	Quelques dizaines de mA (tension 6V environ)
Clignotant de voiture	1 A environ (tension de 12 V)
Radiateur électrique	Jusqu'à 10 A environ (tension de 220 V)
Démarreur d'automobile	100 A environ (tension 12 V)
Motrice électrique (SNCF ou métro)	500 A environ (tension de 750 à 3000 V)
Cuve à électrolyse de l'alumine (préparation de l'aluminium)	Jusqu'à 200 kA

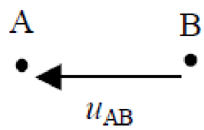
Tension

Lorsque deux points d'un circuit ont des niveaux de charges électriques différents une différence de potentiel qui se mesure par une tension électrique apparait. Si un conducteur connecte ces points, un courant le traversera. Il sera plus important si cette tension est plus grande.

Par analogie avec le domaine hydraulique, pour que se crée un mouvement de fluide dans une conduite (débit analogue au courant), il faut que ses extrémités soient à des pressions différentes.

C'est une grandeur algébrique. Conventionnellement, on représente la tension entre les points :

$$u_{AB} = V_A - V_B$$



Unité de la tension : le **volt (V).**

Quelques ordres de grandeurs de tensions

Tension aux bornes d'une pile AAA	1,5 V

Tension aux bornes d'une batterie automobile	$12\ V\ ou\ 48\ V$
Tension d'alimentation secteur	$230\ V$
Réseaux de distribution (moyenne tension)	1 à 25 kV (tension alternative)
Réseaux de transports (haute tension)	de 150 à 1 200 kV (tension alternative) et jusqu'à 900 kV (tension continue)

1.7. Puissances et rendements

La puissance est une grandeur physique fondamentale et permet l'évaluation du rendement d'un système (son efficience). C'est une grandeur instantanée, calculée à partir de deux grandeurs physiques. Son unité est le Watt (W).
Pour la calculer, il faut toujours identifier son **type** et sa **nature.**
On calcule le rendement d'un système par :

$$\boxed{\eta_{syst} = \frac{P_s}{P_e} = \frac{P_{eff}}{P_{abs}}}$$

TYPES ?	Entrante P_e	P_{abs}: Puissance Absorbée Elle est reçue ou absorbée par le composant	En Watt
	Sortante P_s	P_{eff}: Puissance effective ou utile Elle est fournie par le composant	En Watt
NATURE ?	Mécanique	$P_{méca} = C.\omega$ (pour les moteurs, pompes, génératrice,…) $P_{méca} = F.v$ (pour les vérins)	C : couple en N.m ω : vitesse de rotation en $rad.s^{-1}$ F : force en N v : $vitesse\ de\ la\ tige\ en\ m.s^{-1}$
	Chimique (carburant)	$P_{chim} = q_m.P_{ci}$ (pour les moteurs thermiques, réacteurs, …)	P_{ci} : pouvoir calorifique inférieur du carburant en J/kg. q_m : $débit\ masse\ de\ carburant\ en\ kg.s^{-1}$
	Electrique	$P_{élec} = U.I$ si MCC (Moteur à Courant Continu)	
	Hydraulique	$P_{hyd} = q_m.w_{composant}$ (cas général) $P_{hyd} \approx q_v.\Delta p$ (en hydrostatique)	q_m : $débit\ masse\ en\ kg.s^{-1}$ $w_{composant}$: $travail\ massique\ en\ J/kg$ q_v : débit volume en $m^3.s^{-1}$ Δp : différence de pression en Pa
	Thermodynamique	$P_{thermo} = q_m.w_{composant}$	

2. EXEMPLES DE CALCULS (A LIRE)

2.1. Production d'énergie électrique : groupe électrogène

Un groupe électrogène permet de produire une puissance électrique. A pleine charge, la génératrice délivre une puissance $P_{élect} = 288$ kW lorsqu'elle est entraînée à $\omega = 3000\ tr.min^{-1}$ par le moteur thermique. Celui-ci fournit alors un couple $C = 1050\ N.m$. Le rendement du moteur est $\eta_{mot} = 0{,}5$. Le pouvoir calorifique du carburant est $P_{ci} = 42{,}5.10^6\ J/kg$. Par ailleurs, on donne $\rho_{carburant} = 850\ kg/m^3$.

Q1. Pour le moteur thermique, identifier les puissances entrante et sortante et leur nature. Faire l'application numérique.

Le moteur thermique convertit une puissance chimique entrante $P_{chim} = q_m.P_{ci}$ en une puissance mécanique sortante $P_{méca} = C.\omega = 1050.(3000.\frac{2.\pi}{60}) = 330\ \ 10^3\ W$.

On ne peut calculer directement P_{chim} car nous n'avons pas q_m mais indirectement avec le rendement, on a $\eta_{mot} = \left[\frac{P_s}{P_e}\right]_{mot} = \frac{P_{méca}}{P_{chim}}$ ce qui nous permet de calculer $P_{chim} = \frac{P_{méca}}{\eta_{mot}} = 660\ \ 10^3\ W$.

Q2. Calculer la consommation horaire de carburant du moteur en $l.h^{-1}$.

A partir de $P_{chim} = q_m.P_{ci}$, on calcule le débit masse $q_m = \frac{P_{chim}}{P_{ci}} = 0{,}0155\ kg/s$.

On en déduit le débit volume $Q = q_v = \frac{q_m}{\rho_{carburant}} = 1{,}826\ \ 10^{-5}\ m^3.s^{-1}$

$$\text{Finalement, } q_v = 1{,}826\ \ 10^{-5}.1000.3600 = 65{,}74\ \ l.h^{-1}$$

Q3. Pour la génératrice, identifier les puissances entrante et sortante et leur nature.

La puissance mécanique (sortante du moteur) est la puissance entrante de la génératrice.

La puissance électrique est la puissance sortante de la génératrice.

Q4. Calculer le rendement $\eta_{gén}$ de la génératrice.

On en déduit le rendement de la génératrice $\eta_{gén} = \left[\frac{P_s}{P_e}\right]_{gén} = \frac{P_{élect}}{P_{méca}} = \frac{288}{330} = 0{,}87$.

Q5. On donne la chaîne de conversion de la puissance pour le groupe électrogène. Calculer η_{syst} le rendement du système.

$$\xrightarrow{P_{chim}} \boxed{\text{Moteur thermique } (\eta_{mot})} \xrightarrow{P_{méca}} \boxed{\text{Génératrice } (\eta_{gén})} \xrightarrow{P_{élec}}$$

Le rendement du système ou rendement global est $\eta_{syst} = \left[\frac{P_s}{P_e}\right]_{syst} = \frac{P_{élect}}{P_{chim}} = \frac{288}{660} = 0{,}43$

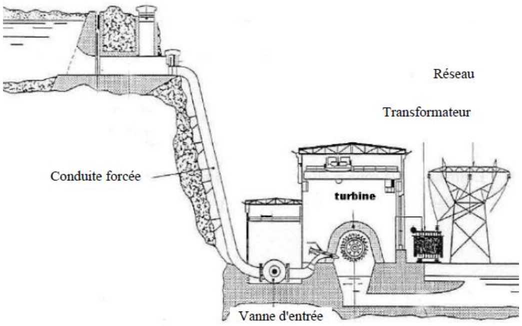
Le rendement du système peut être obtenu en effectuant le produit des rendements élémentaires :

$$\eta_{syst} = \left[\frac{P_s}{P_e}\right]_{mot}.\left[\frac{P_s}{P_e}\right]_{gén} = \eta_{mot}.\eta_{gén} = 0{,}43$$

2.2. Tracé de courbes, calcul numérique, sens physiques des grandeurs, contrôle-commande

La puissance mécanique disponible sur l'arbre d'une turbine Pelton de barrage s'écrit :

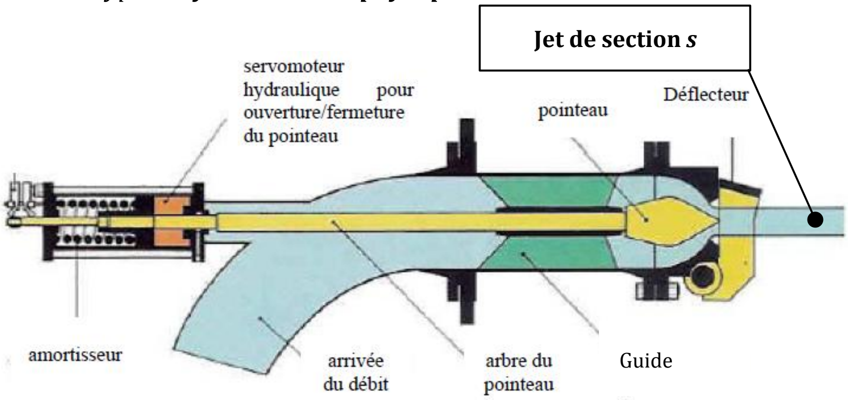
$$P_{méca} = \eta_T . q_m . w_{turb} = \eta_T . q_m . \left(g.h \quad - \quad \underbrace{\frac{1}{2}.k(v).v^2}_{perte\ par\ frottement\ fluide} \right) . \eta_g \quad avec \ \ q_m = \rho.s.v \ \ (débit\ masse)$$



https://youtu.be/zHZYIAMrO6Y
https://youtu.be/bCpZ737mOWE

Cette relation relie un ensemble de grandeurs physiques qui définissent les caractéristiques de l'installation. On peut donc exprimer l'une de ces grandeurs en fonction des autres.

*Le **contrôle** de la puissance mécanique produite par la turbine Pelton est obtenu grâce à l'**asservissement** (cours C3 à C5 du cycle 1) de la position du pointeau qui règle la section s du jet. Dans les cours qui suivent, nous allons mettre en place les démarches pour l'étude de ce type de **systèmes multiphysiques**.*



Cette turbine est couplé à une génératrice électrique alimentant le réseau électrique. On a donc différents étages de conversion de l'énergie.

s : section du jet terminal v : vitesse du fluide en sortie d'injecteur g = 9,81 m.s^{-2} (accélération de la pesanteur) h : 1200 m (hauteur du plan d'eau du barrage par rapport à la turbine) ρ = 1 kg/dm^3 (masse volumique du fluide)	η_T = 85 % (rendement de la turbine) k : Fonction propre à l'installation permettant de calculer son coefficient de pertes énergétiques (k *est positive*).

Q1. Quelle est l'unité de *Pméca* ? Entrante ou sortante ?
La puissance est en Watt. Elle est sortante pour la turbine (la puissance entrante de la turbine étant une puissance hydraulique) mais entrante pour génératrice électrique (la puissance sortante de la génératrice est une puissance électrique alimentant le réseau).

Q2. Donner l'unité de la fonction k.

$$k(v)\ est\ sans\ unité$$

Q3. Ecrire $P_{méca}$ en fonction de v seulement.

$$P_{méca} = \eta_T . \rho . s . v . \left(g.h \quad - \quad \underbrace{\frac{1}{2}.k(v).v^2}_{perte\ par\ frottement\ fluide} \right) . \eta_g$$

Q4. La fonction $P_{méca}$ (v) passe-t-elle pas zéro ? Combien de fois ?
Au moins une fois lorsque $v = 0$ $(injecteurs\ fermés)$.
Par contre, on n'a pas l'expression de $k(v)$, on ne peut affirmer que $(g.h - \frac{1}{2}.k(v).v^2)$ s'annule.

3. HOMOGÉNÉITÉ DIMENSIONNELLE

3.1. Homogénéité

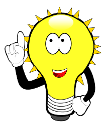
Nous allons manipuler de nombreuses expressions mathématiques cette année. Pour qu'elles aient un sens, il est nécessaire qu'elles soient homogènes : par exemple, il n'est pas possible d'aboutir à une équation du type $Force = pression$ ou encore de sommer une longueur avec un nombre sans dimension.

Homogénéité d'un résultat (équation issue du PFD appliqué à la tige d'un vérin)

$$F - a.b.p = m.\frac{d^2x}{dt^2} \qquad \text{avec : } \begin{cases} F : \text{ une force} \\ a \text{ et } b : \text{des longueurs} \\ p : \text{une pression} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} m : \text{une masse} \\ x : \text{une distance} \end{cases}$$

Vérification en utilisant les symboles des unités :

$$F = a.b.p + m.\frac{d^2x}{dt^2} \qquad \text{avec : } \begin{cases} [F] = N \\ [a.b.p] = m.m.Pa = m.m.N.m^{-2} = N \\ \left[m.\frac{d^2x}{dt^2}\right] = kg.m.s^{-2} = \left[m.\underbrace{g}_{\substack{\text{accélération} \\ \text{de la pesanteur}}}\right] = N \end{cases}$$



La vérification de l'homogénéité des formules est un point clef à la réussite. Comme il est tout à fait humain de faire des erreurs de calcul dans les développements calculatoires longs, on s'efforcera de vérifier systématiquement l'homogénéité du résultat.
Et oui, à partir de l'homogénéité, il est très facile d'identifier son erreur : l'erreur de calcul a beau être compréhensible, un résultat encadré non homogène n'est pas pardonnable.