TD 2 Grandeurs physiques

1. Calcul intégral de base

Vu en cours

2. VAG (Véhicule autoguidé, suite du TD 1-1) : grandeurs physiques

- **Phase 1 : Avancement à vitesse variable $t_0 \leq t \leq t_1 = 4\ s$**

Q2.1. Calculer le temps t_1 nécessaire pour que le VAG atteigne la vitesse v_1.

On sait que $\ddot{x}(t) = \frac{dv(t)}{dt}$. *Or, en phase 1, l'accélération est constante $\ddot{x}(t) = \ddot{x}_1$ (fig 9 : pente unique de la vitesse en phase 1). Les dérivées peuvent être remplacées par des accroissements :*

$$\ddot{x}(t) = \frac{dv(t)}{dt} \Rightarrow \ddot{x}_1 = \frac{\Delta v(t)}{\Delta t} = \frac{v_1 - \cancel{v_0}}{t_1 - \cancel{t_0}}.$$

$$Alors, \boldsymbol{t_1} = \frac{v_1}{\ddot{x}_1} \Rightarrow \boldsymbol{t_1 = 2,4\ s}$$

Q2.2. Calculer alors la position x_1 du VAG.

On a aussi, $\int_{t_0}^{t_1} dx(t) = \int_{t_0}^{t_1} v(t).dt \Leftrightarrow x(t_1) - \cancel{x(t_0)} = \int_{t_0}^{t_1} v(t).dt$ 1

Mais pour calculer cette intégrale, il faut connaître la fonction v en phase 1.

Dans notre cas, c'est simple (fig 9), on peut affirmer que $v(t) = \ddot{x}_1.t$. Pensez bien à exploiter les données, figures, tableaux , … de l'énoncé.

Sinon, on utilisera $\int_{t_0}^{t} dv(t) = \int_{t_0}^{t} \ddot{x}(t).dt \Rightarrow v(t) - \cancel{v(t_0)} = \int_{t_0}^{t} \ddot{x}(t).dt = \int_{t_0}^{t} \ddot{x}_1.dt \Rightarrow v(t) = \ddot{x}_1.t$

Maintenant, on peut intégrer 1. 1 $\Rightarrow x_1 = \int_{t_0}^{t_1} \ddot{x}_1.t.dt \Leftrightarrow \boldsymbol{x_1 = \frac{1}{2}.\ddot{x}_1.t_1^2}$ ***soit*** $\boldsymbol{x_1 = 1,44\ m}$

- **Phase 2 : Avancement à vitesse constante $t_1 \leq t \leq t_2 = 4\ s$**

Q2.3. Calculer la position x_2 du VAG.

La vitesse est constante en phase 1 donc $v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \Rightarrow v_1 = \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} \Leftrightarrow v_1 = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{x_2 = x_1 + v_1.(t_2 - t_1)} \quad \textbf{\textit{soit}} \quad \boldsymbol{x_2 = 3,36\ m}$$

- **Phase 3 : Arrêt d'urgence $t_2 \leq t \leq t_3$**

Q2.4. Calculer alors l'instant t_3.

A nouveau, l'accélération est constante en phase 3, $\ddot{x}(t) = \frac{dv(t)}{dt} \Rightarrow \ddot{x}_3 = \frac{\Delta v(t)}{\Delta t} = \frac{\cancel{v_3} - v_2}{t_3 - t_2}$

Pour $\ddot{x}_3$, prenons sa valeur maxi autorisée $\ddot{x}_3 = -3,6\ m.s^{-2}$.

$$\text{Alors, } \boldsymbol{t_3 = t_2 - \frac{v_2}{\ddot{x}_3}} \quad \textbf{\textit{soit}}\ \boldsymbol{t_3 = 4,33\ s}$$

Q2.5. Calculer la position x_3 du VAG.

On sait que $\int_{t_2}^{t_3} dx(t) = \int_{t_2}^{t_3} v(t).dt \Leftrightarrow x_3 - x_2 = \int_{t_2}^{t_3} v(t).dt$ mais il faut connaître v comme à la Q 2.2.

On intègre donc l'accélération entre t_2 *et* t

$$\int_{t_2}^{t} dv(t) = \int_{t_2}^{t} \ddot{x}(t).dt \Rightarrow v(t) - v_2 = \int_{t_2}^{t} \ddot{x}_3.dt \Rightarrow \boldsymbol{v(t) = v_2 + \ddot{x}_3.(t - t_2)}$$

On peut aussi affirmer (figure 9) que $\ddot{x}_3 = \frac{\Delta v(t)}{\Delta t} = \frac{v(t)-v_2}{t-t_2}$ …

L'intégration de la vitesse entre t_2 et t_3 donne :

$$\boldsymbol{x_3 - x_2 = v_2.(t_3 - t_2) + \frac{1}{2}\ddot{x}_3.(t_3 - t_2)^2 \ \ soit \ \ x_3 - x_2 = 0,2\ m \ \ (\leq 0,25\ m)}$$

Q2.6. L'exigence du cahier des charges concernant la distance d'arrêt est-elle satisfaite ?

L'exigence sur la distance d'arrêt est satisfaite.

Actionneur et moment généré au niveau de la roue motrice (1) au cours de la phase 1

Q2.7. L'action du sol (0) sur la roue motrice (1) du VAG génère un effort $F_{0\to1}$ au point $\boldsymbol{I_1}$ selon $+\vec{x}$ (voir figure 8 cas 1). On suppose que c'est la seule force selon $+\vec{x}$ subie par le VAG+chariot. Par application du Principe fondamental de la dynamique à l'ensemble VAG+chariot déterminer l'expression littérale de $F_{0\to1}$.

Si on s'intéresse à l'ensemble E = VAG ∪ chariot, (on dira isoler E), la seule force qui s'appliquent sur E selon $+\vec{x}$ est $F_{0\to1}$. Il y a sûrement aussi des forces de frottements qui s'opposent au déplacement de E mais elles ne sont pas évoquées dans l'énoncé.

Le PFD appliqué à E dans son mouvement de translation par rapport à 0, s'écrit donc :

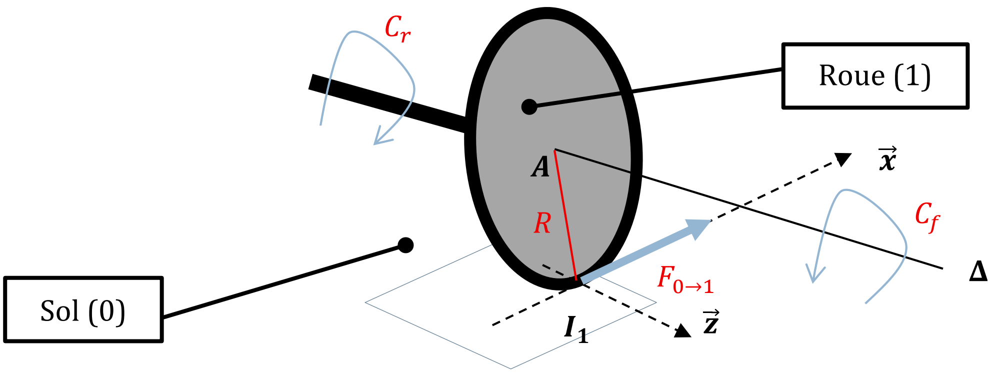
$$F_{0\to1} = M.\ddot{x}(t) \quad et\ comme\ en\ phase\ 1, \ddot{x}(t) = \ddot{x}_1, il\ vient \quad \boldsymbol{F_{0\to1} = M.\ddot{x}_1}$$

Q2.8. Calculer $F_{0\to1}$.

Avec les données, on trouve $\boldsymbol{F_{0\to1} = 225\ N}$.

Rotation de la roue (1) autour de l'axe Δ (voir la figure 7)

Q2.9. Compléter le schéma de la roue (1) faisant apparaître les grandeurs $F_{0\to1}$, R, C_r et C_f.



*Q2.10. Par application du Principe fondamental de la dynamique à la rotation de la roue (1) autour de **Δ** déterminer l'expression littérale reliant $F_{0\to1}$, J_Δ, R, C_r, C_f et $\ddot{\theta}_1(t)$.*

Le PFD appliqué à 1 dans son mouvement de rotation par rapport à 0, s'écrit donc :

$$C_r + C_f + R.F_{0\to1} = J_\Delta.\ddot{\theta}_1(t)$$

Q2.11. On donne $C_f = 32\ N.m$; $J_\Delta = 1{,}6\ kg.m^2$; $R = 0{,}105\ m$; $F_{0\to1} = 225\ N$ et $\ddot{\theta}_1(t) = -\frac{\ddot{x}_1}{R}$. Calculer C_r.

Avec ces données, on a :

$$C_r = J_\Delta.\left(-\frac{\ddot{x}_1}{R}\right) - C_f - R.F_{0\to1} \quad \text{Numériquement, } \boldsymbol{C_r = -63,2\ N.m}$$

Le réducteur à engrenage a un gain $K_{réd} = \frac{\omega_{poulie\ moteur}}{\omega_{moteur}} = \frac{1}{32}$.

Le système poulie-courroie a un gain $K_{pc} = \frac{\omega_{poulie\ réceptrice}}{\omega_{poulie\ moteur}} = \frac{1}{2}$.

Q2.12. Le moteur choisi peut délivrer un couple maxi C_{max} de 1,5 N.m. Convient-il ? Justifier.

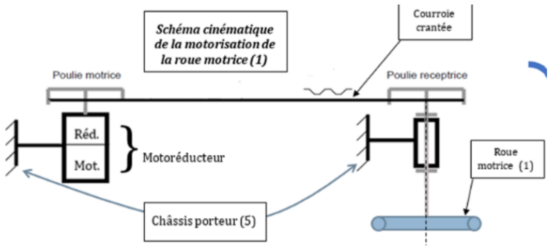
La puissance mécanique du moteur est une puissance entrante dans les réducteurs et s'écrit :

$$P_{méca\_mot} = C_m.\omega_{moteur}$$

En sortie du des réducteurs, la puissance mécanique sortie s'écrit :

$$P_{méca\_réd} = C_r.\omega_{poulie\ réceptrice}$$

Les deux réducteurs permettent de réduire la vitesse de rotation $\omega_{poulie\ réceptrice}$ de l'arbre de sortie du réducteur (lié à la roue 1 donc $\omega_{poulie\ réceptrice} = \ddot{\theta}_1$) et d'augmenter le couple C_r (donc $C_m < C_r$ *mais* $\omega_{moteur} > \omega_{poulie\ réceptrice}$)



Ainsi, $\boldsymbol{C_m = K_{réd}.K_{pc}.C_r \approx 1\ N.m < C_{max}}$.

Le moteur pourra sans difficulté délivrer le couple nécéssaire à l'entraînement de E.

Par ailleurs, $\omega_{moteur} = \frac{1}{K_{réd}.K_{pc}}.\omega_{poulie\ réceptrice}$

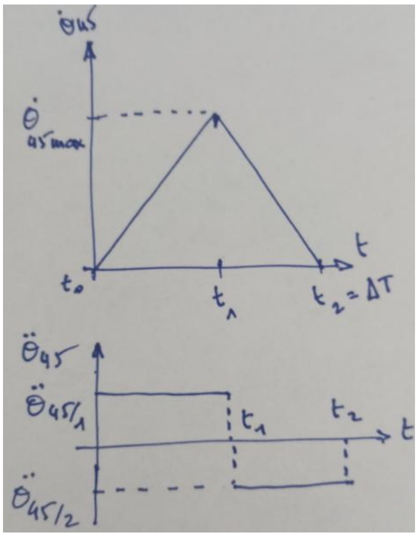
3. Equations du mouvement : profil triangle

La loi des vitesses de rotation de l'avant-bras 4 d'un robot par rapport à son bras 5 a été choisie **en triangle**. Ce qui signifie que le mouvement se décompose en deux phases.

Q3.1. Que peut-on affirmer pour t_1 ?

L'accélération et la décélération sont identiques en module donc $t_1 = \frac{t_2}{2} = \frac{\Delta T}{2}$

Q3.2. Tracer la loi des vitesses.



Q3.3. Le cahier des charges impose :

Exigence	Critère	Niveau
Rapidité	Délai ΔT pour un angle de rotation $\Delta\theta_{45} = 150°$ de l'avant-bras.	$\Delta T \leq 0{,}5\ s$

Déterminer la valeur de $\ddot{\theta}_{45/1}$ qui satisfera à l'exigence de rapidité.

On dispose, comme données de $\Delta\theta_{45}$ *et* ΔT. Il faut donc Partir de là.

On sait que $\int_{t_0}^{t_1} d\theta_{45}(t) = \int_{t_0}^{t_1} \omega_{45}(t).dt \Leftrightarrow \frac{\Delta\theta_{45}}{2} = \int_{t_0}^{t_1} \omega_{45}(t).dt$

Il faut donc déterminer la fonction ω_{45} soit la intégration de l'accélération entre t_0 *et* t soit en affirmant que :

$$\omega_{45}(t) = \ddot{\theta}_{45/1}.t$$

Alors, $\frac{\Delta\theta_{45}}{2} = \frac{1}{2}.\ddot{\theta}_{45/1}.{t_1}^2 \Leftrightarrow \Delta\theta_{45} = \ddot{\theta}_{45/1}.\left(\frac{\Delta T}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \underbrace{\ddot{\theta}_{45/1} = 4.\frac{\Delta\theta_{45}}{\Delta T^2}}_{homogène} \quad soit \;\; \ddot{\theta}_{45/1} = 41{,}9 \;\; rad.s^{-2}$

Q3.4. Calculer la vitesse maximale de rotation $\dot{\theta}_{45/max}$.

Comme un phase 1, $\omega_{45}(t) = \ddot{\theta}_{45/1}.t \Longrightarrow \dot{\theta}_{45/max} = \ddot{\theta}_{45/1}.t_1 \Longrightarrow \dot{\theta}_{45/max} = 4.\frac{\Delta\theta_{45}}{\Delta T^2}.\frac{\Delta T}{2}$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\dot{\theta}_{45/max} = 2.\frac{\Delta\theta_{45}}{\Delta T} \quad soit \quad \dot{\theta}_{45/max} = \; 10,47 \; rad.s^{-1} \quad (= 100 \; tr.min^{-1})}$$

Le moteur d'entraînement de l'avant-bras tourne à $N_{mot} = 4000 \; tr/min$.

Q3.5. Faut-il prévoir un réducteur ? Si oui, calculer le rapport de réduction

Un moteur tourne généralement « vite ». Il faut prévoir un réducteur de rapport de réduction $k = \boldsymbol{\frac{1}{40}}$

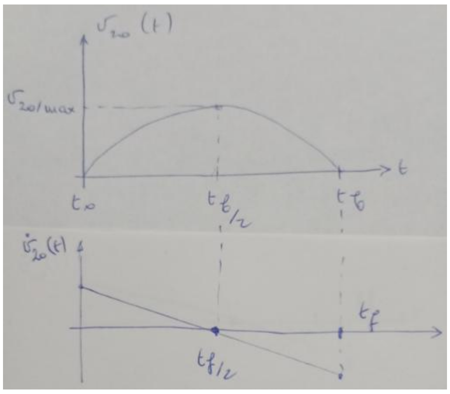
4. Equations du mouvement : profil parabolique

Q4.1. Justifier l'expression de la vitesse.

La vitesse doit être nulle au début et à la fin du mouvement. On a bien $v_{20}(t_0) = v_{20}(t_f) = 0$.

Remarquons, pour la vérification de l'homogénéité des relations que A est en $m.s^{-3}$.

Q4.2. Tracer son allure.



Q4.3. Cahier des charges

Montrer que le respect de cette exigence impose que $A = \frac{|\ddot{x}_{20/max}|}{t_f}$.

Sur les courbes de la question Q.4.2., es accélérations maximale et minimale sont au début et à la fin du mouvement. (droite affine).

Alors, $\ddot{x}_{20/max} = \ddot{x}_{20}(t_0) \quad avec \quad \ddot{x}_{20}(t) = A.\left((t_f - t) - t\right) \;\; d'où \;\; \ddot{x}_{20/max} = A.t_f \Longrightarrow \boldsymbol{A} = \boldsymbol{\frac{|\ddot{x}_{20/max}|}{t_f}}$.

Q4.4. Déterminer la durée du mouvement.

$On\ a\ L = 6\ m\ et\ \int_{t_0}^{t_f} dx_{20}(t) = \int_{t_0}^{t_f} v_{20}(t).dt \Rightarrow L = \int_{t_0}^{t_f} A.t.(t_f - t).dt$

$$\Leftrightarrow L = \left[\frac{A.t_f.t^2}{2} - \frac{A.t^3}{3}\right]_{t_0}^{t_f} \Leftrightarrow L = \frac{A.t_f{}^3}{6} \Rightarrow \boldsymbol{t_f} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{6.L}}{|\boldsymbol{\ddot{x}_{20/max}}|}}$$

Numériquement , $\boldsymbol{t_f = 19\ s}$

Q4.5. Déterminer la vitesse maximale $v_{20/max}$.

Et $v_{20/max} = v_{20}\left(\frac{t_f}{2}\right) = \frac{A.t_f{}^2}{4} \Rightarrow \boldsymbol{v_{20/max}} = \frac{|\ddot{x}_{20/max}|.t_f}{4}$ $\quad numériquement, \boldsymbol{v_{20/max} = 0,475\ m.s^{-1}}$

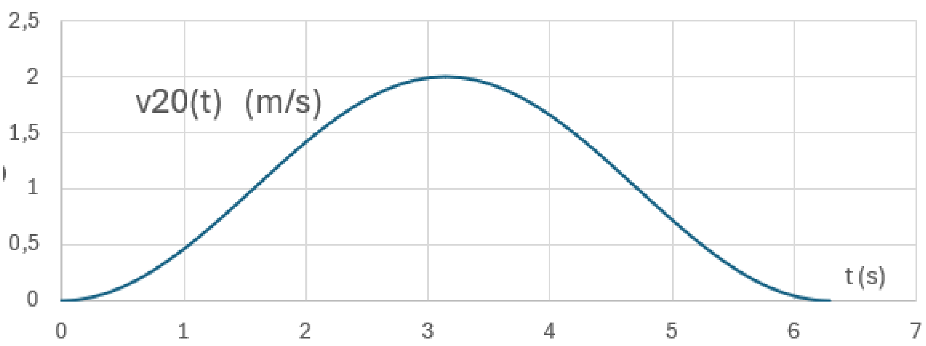
Remarque, $\boldsymbol{A} = \frac{|\ddot{x}_{20/max}|}{t_f} = \boldsymbol{5,3.10^{-3}\ m.s^{-3}}$

5. Equations du mouvement : Profil sinusoïdal

On souhaite maintenant réaliser en démarrage et un arrêt en « douceur » en utilisant un profil sinusoïdal tel que :

$$v_{20}(t) = A.(1 - \cos(\omega.t))\ ;\ t_0 \leq t \leq t_f\ ; A\ et\ \omega\ deux\ constantes\ strictement\ positives.$$

Q5.1. Tracer sa courbe représentative pour $A = 1\ m/s$ et $\omega = 1\ rad/s$.



Q5.2. Le démarrage et l'arrêt est-il conforme aux attentes ? Expliquer.

La vitesse est nulle pour $t = t_0 = 0\ \ et\ \ t = t_f$ (démarrage et arrêt). Par ailleurs, l'accélération est nulle aux mêmes instant indiquant un démarrage et arrêt en « douceur » (produits fragiles).

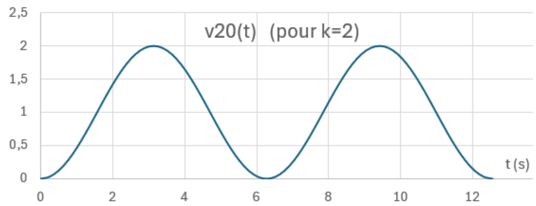
Q5.3. Le cahier des charges impose :

Exigence	Critère	Niveau
Limiter l'accélération	$\ddot{x}_{20/max}$	$\lvert\ddot{x}_{20/max}\rvert = 0,1\ m.s^{-2}$

Calculer les valeurs de $t_f, A\ et\ \omega$. La distance parcourue par la tablette est $L = 6\ m$.

On veut $v_{20}(t_f) = 0$ 1 $\Leftrightarrow \omega.t_f = 2.k.\pi$

Cependant, les mathématiques nous donnent toutes les solutions de 1 y compris celles non physiques et/ou non techniques. $k = 0$ correspond à $t_f = t_0$ (début du mouvement, ce n'est pas celle qui est recherchée), $k=1$ correspond à $t_f=\frac{2.\pi}{\omega}$ (1er arrêt, celui qui est recherché), $k=2$ correspond à $t_f=\frac{4.\pi}{\omega}$ (2ème arrêt, non souhaité car cela signifierait qu'il y aurait un arrêt intermédiaire pour $t_i=\frac{2.\pi}{\omega}$).



On a donc $\boldsymbol{t_f=\frac{2.\pi}{\omega}}$ ***ou*** $\boldsymbol{\omega=\frac{2.\pi}{t_f}}$

Par ailleurs, $\ddot{x}_{20}(t)=A.\omega.\sin(\omega.t)$ dont le maximum est atteint, on le sait sans démonstration, pour $\omega.t_M=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow t_M=\frac{t_f}{4}$. Alors,

$$\boldsymbol{\ddot{x}_{20/max}=A.\omega}$$

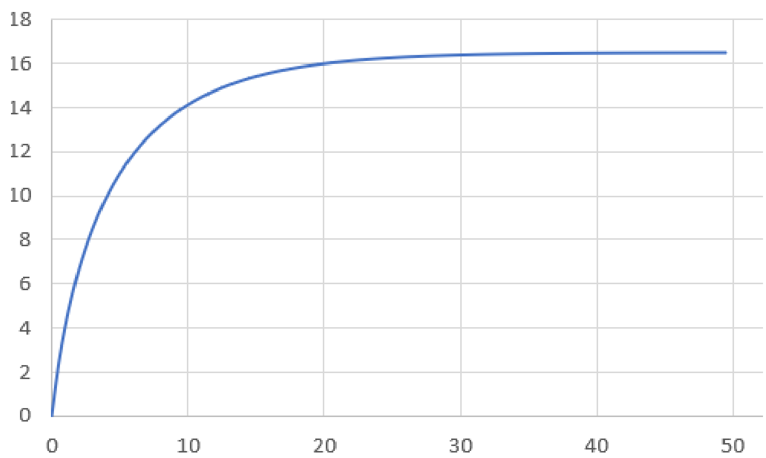
Enfin, $\int_{t_0}^{t_f} dx_{20}(t)=\int_{t_0}^{t_f} v_{20}(t).dt \Leftrightarrow \boldsymbol{L=A.t_f} \Rightarrow \boldsymbol{L=\frac{\ddot{x}_{20/max}}{2.\pi}.t_f^{\,2}}$

$$\textbf{On obtient } \boldsymbol{t_f=\sqrt{\frac{2.\pi.L}{\ddot{x}_{20/max}}}} \textbf{ (numériquement } \boldsymbol{t_f=19,4\ s}\textbf{).}$$

$$\textbf{Alors, } \boldsymbol{\omega=0,32\ rad.s^{-1}} \textbf{ et } \boldsymbol{A=0,31\ m.s^{-1}} \quad \boldsymbol{(v_{20/max}=2.A)}$$

6. Tapis transbordeur de mine

Q6.1. La vitesse de consigne est $\boldsymbol{V_c=16\ m/s}$*. On demande la valeur asymptotique de la vitesse, l'erreur statique et le temps de réponse à 5%.*



Q6.2. Donner les unités de $\boldsymbol{a, \mu}$ ***et*** $\boldsymbol{K}$

$\boldsymbol{a}$ *est en* $s.m^{-1}$; $\boldsymbol{\mu}$ *est sans unité* K *est en* $kg.m^{-1}$

Q6.3. Ecrire le PFD appliqué au tapis 1 en translation par rapport à 0 selon $\vec{x}$*.*

Le PFD appliqué au tapis 1 en translation par rapport à 0 selon $\vec{x}$ s'écrit : $\sum F_{ext\to 1}=M.\Gamma_{1/0}(t)$

$$F_{mot}(t)-T_{fr}(t)-T_{aéro}(t)=M.\ddot{x}_{1/0}(t)$$

$$Soit\quad F_{mot}.e^{-a.\dot{x}_{10}(t)}-\frac{1}{3}.M.g.\mu-K.\left(\dot{x}_{10}(t)\right)^2=M.\ddot{x}_{1/0}(t)$$

Q6.4. Citer les quatre exigences principales imposées aux asservissements (SCLI).

Stabilité, précision, rapidité et amortissement-dépassement

*Q6.5. Donner les instants $\boldsymbol{t_1}$ **et** $\boldsymbol{t_2}$.*

On lit $\boldsymbol{t_1 = 12\ s}$ **et** $\boldsymbol{t_2 = 20\ s}$

Dans les calculs qui suivent, comme la vitesse est affine par morceaux, on utilisera de préférence des calculs d'aires.

Q6.6. Calculer les accélérations $\boldsymbol{\ddot{x}_i}$.

Elles sont constantes par morceaux donc $\ddot{x}_i = \frac{\Delta v(t)}{\Delta t}$ et,

$$\ddot{x}_1 = +1{,}23\ \boldsymbol{m.s^{-2}} \ ; \ \ddot{x}_2 = +0{,}156\ \boldsymbol{m.s^{-2}} \ ; \ \ddot{x}_3 = 0\ \boldsymbol{m.s^{-2}}$$

Q6.7. Calculer la distance parcourue par le tapis à l'instant $\boldsymbol{t_1}$.

On a, $\int_{t_0}^{t_1} dx_{10}(t) = \int_{t_0}^{t_1} v_{10}(t).dt \Rightarrow \boldsymbol{x_1} = \int_{t_0}^{t_1} \ddot{x}_1.t.dt \Leftrightarrow \boldsymbol{x_1} = \frac{\ddot{x}_1.{t_1}^2}{2}\left(= \frac{\boldsymbol{v_1.t_1}}{2}\ aire\right)$

$$\boldsymbol{x_1 = 88,5\ m}$$

Q6.8. Calculer la distance parcourue par le tapis à l'instant $\boldsymbol{t_2}$.

On a $\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1} = \int_{t_1}^{t_2} v_{10}(t).dt$ $\ \boldsymbol{avec}\ v_{10}(t) - \boldsymbol{v_1} = \ddot{x}_2.(t - t_1)\ pour\ la\ phase\ 2.$

Ou (aire du trapèze), $x_2 - x_1 = (t_2 - t_1).\frac{v_1+v_2}{2} \Rightarrow \boldsymbol{x_2 = 211,5\ m}$

Q6.9. Calculer la distance parcourue $\boldsymbol{X = x_{10}(40)}$ par le tapis à l'instant $\boldsymbol{t = 40\ s}$.

On a (aire du rectangle pour $t \geq t_2$), $\boldsymbol{X} = x_2 + v_2.(t - t_2) \Rightarrow \boldsymbol{X = 531,5\ m}$

Q6.10. Calculer la durée T pour parcourir $\boldsymbol{L = 10\ km}$.

On reprend la relation précédente avec $L = x_2 + v_2.(T - t_2) \Leftrightarrow T = t_2 + \frac{L-x_2}{v_2}$

$$\Rightarrow \boldsymbol{T = 611,8\ s}$$