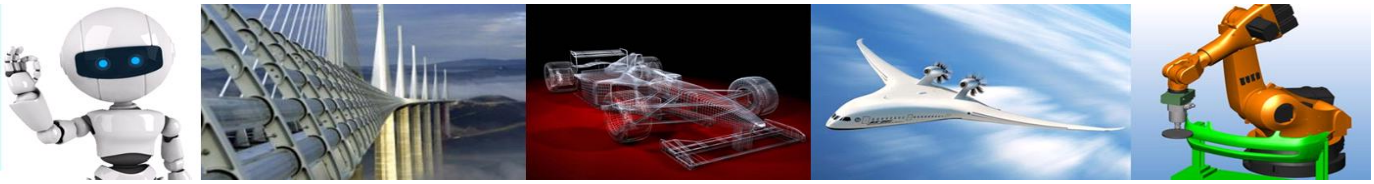


C4 – Transformée de Laplace d'un système d'équations, schéma-blocs, fonction de transfert H(p)

(Approche comportementale)

Compétences à acquérir

Ecrire la transformée d'une équation linéaire (y compris différentielle) quelconque ;

Connaître la **forme générique et le vocabulaire** associé au **schéma-blocs** d'un asservissement (vocabulaire voir p 8/8) ;

Construire le schéma-blocs d'un asservissement à partir des équations modélisant le fonctionnement de ses composants ;

Connaître les entrées-test usuelles ;

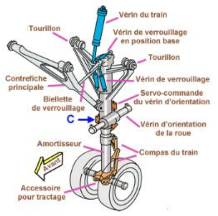
Connaître les **4 théorèmes classiques**.

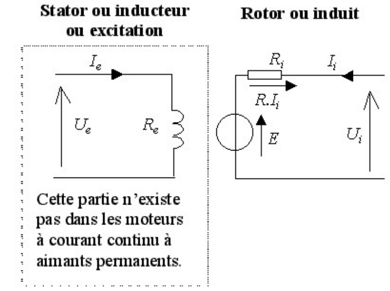
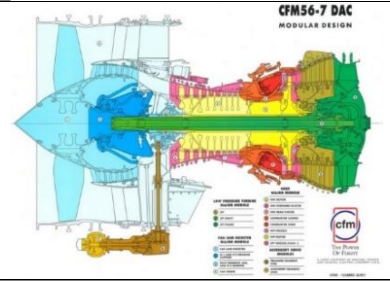
1. COMPORTEMENT DES SYSTÈMES COMPLEXES ET SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Les **systèmes réels** ont la particularité d'être **évolutifs** (évolution des espèces, tectonique des plaques, propagation des épidémies, réaction chimique, expansion de l'univers, cinématique des mécanismes, …). Cette **variabilité** est exprimée par la dérivée mathématique des **grandeurs quantifiant le phénomène** et les **lois et principes** de la physique, relient ces dérivées entre elles **sous la forme d'équations différentielles**.

Une équation différentielle est une relation entre une ou plusieurs fonctions inconnues et leurs dérivées. On pourra noter la dérivée temporelle avec un point sur la variable ou la fonction. Une double dérivée fait intervenir deux points.

Voyons quelques exemples de systèmes présents dans notre environnement qui nécessitent des équations différentielles pour leur modélisation :

Principe	Système	Equation (modèle de connaissance)	Applications
Principe fondamental de la dynamique des solides		$\Sigma M_{ext} = J.\ddot{\theta}$	*Modélisation de la dynamique des chaînes de solides, etc…*

Lois de l'électro-magnétisme, caractéristiques des dipôles		$U = E + Ri + L\dfrac{di}{dt}$	*Les combinaisons de modèle R, L et C permettent de décrire efficacement la majorité des circuits électriques.*
Premier principe de la thermodynamique		$dh + de_c + de_p = \delta q + \delta w_r$ $\dfrac{dm}{dt} = \dot{m}$ $\dfrac{dA}{A} = -(1 - M^2).\dfrac{dV}{V}$	*Ecoulement de fluides* *(écoulements sub et supersonique)*

Les équations différentielles **linéaires** couvrent une grande part des phénomènes physiques en jeu dans les systèmes complexes.

Nous étudierons des **systèmes linéaires continus invariants** (SLCI). C'est-à-dire que le **comportement** de chaque composant est régi par un **modèle de connaissance** représenté parfois par une **équation différentielle *linéaire***.

$$F(t) = S.\sigma(t) \quad ; \quad \lambda(t) = R.\alpha_2(t) \qquad ①$$

$$\frac{J}{R}.\gamma(t) = R.F(t) - \mu.\alpha_2(t) \qquad ②$$

$$\dot{\lambda}(t) = \frac{d\lambda(t)}{dt} \quad ; \quad \gamma(t) = \frac{d^2\lambda(t)}{dt^2} \qquad ③$$

$$q_v(t) = 2.S.\frac{d\lambda(t)}{dt} + \frac{V_0}{b}.\frac{d\sigma(t)}{dt} \qquad ④$$

Approche S.I.I.

Approche Mathématique

Partant du système d'équations différentielles issues des différents modèles de connaissance (Lois générales de la physique) des sous-systèmes élémentaires constituant le schéma-bloc fonctionnel du système, on aboutit au comportement global lui-même représenté par une équation différentielle linéaire d'ordre n reliant la sortie *s(t)* à l'entrée *e(t)*. Elle s'écrit sous la forme générale :

$$a_n \cdot \frac{d^n s(t)}{dt^n} + \cdots + a_0 \cdot s(t) = b_m \cdot \frac{d^m e(t)}{dt^m} + \cdots + b_0 e(t)$$

avec $n \geq m$ afin de respecter la condition de causalité du système (la sortie dépend uniquement des entrées passées ou présentes, et non futures). n est appelé l'ordre du système.

Cependant, en **SII**, nous voulons développer des méthodes pour **déduire des informations pertinentes** sur le fonctionnement du système (stabilité, précision, rapidité, présence de résonance, …) **sans avoir à résoudre un système d'équations différentielles**.

La méthode est fondée sur les analyses de Laplace et de Fourier :

$$E(p) = X_{\text{cons-deck}}(p) \longrightarrow \boxed{H(p)} \longrightarrow S(p) = X_{\text{réelle-deck}}(p)$$

Etude, directement de la **fonction de transfert**

Pour le système Ampelmann, $H(p) = \dfrac{S(p)}{E(p)} = \dfrac{X\ \text{réelle-deck}(p)}{X\ \text{cons-deck}(p)}$

2. TRANSFORMÉE DE LAPLACE D'UNE ÉQUATION (DIFFÉRENTIELLE)

2.1. Définition de la transformée de Laplace

La transformée de Laplace de la fonction f de $\mathbb{R}_+$ $dans$ $\mathbb{R}$ qui à $t \longrightarrow f(t)$est :

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(p) = \int_{0^-}^{+\infty} f(t) e^{-p \cdot t}\, dt \text{ où } p \text{ est une variable complexe}$$

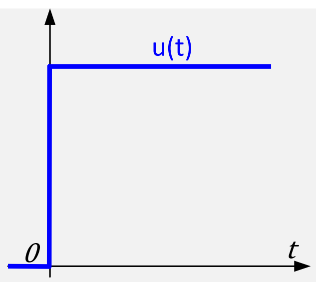
Cette transformation permet de passer du domaine temporel (variable en t) vers le domaine symbolique de Laplace (variable en p).

On ne calcule que les transformées de Laplace de fonctions causales, c'est-à-dire telles que $f(t) = 0$ pour $t < 0$. Ces fonctions f représentent des grandeurs physiques : intensité, température, effort, vitesse,... $F(p)$ n'existe que si l'intégrale a un sens et converge. Dans les cas rencontrés en SII, les conditions d'existence et de convergence sont réunies. La variable p peut aussi être noté avec la lettre s ($F(s)$notation anglo-saxonne).

Exemple : Transformée de Laplace de l'échelon unitaire $u(t) \;=\; 1$ pour $t \geq 0$:

$$U(p) = \mathcal{L}[u(t)] = \int_{0^-}^{+\infty} u(t).e^{-pt}.dt = \int_{0^-}^{+\infty} 1.e^{-pt}.dt$$

$$\Longrightarrow \quad U(p) = \left[-\frac{e^{-pt}}{p}\right]_{0^-}^{+\infty} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{U(p) = \frac{1}{p}}$$



2.2. Exemples de transformées de Laplace usuelles (entrées-test)

Dans la pratique on évite au maximum de calculer $F(p)$ par sa définition. On préfère se servir directement des résultats de transformées de Laplace pour les fonctions usuelles (tableau C

Les principales transformées usuelles utilisées sont les suivantes :

$f(t)$ avec $f(t) = 0$ pour $t < 0$	$F(p)$	
$\delta(t)$: impulsion de Dirac	1	Ces 3 fonctions ci-contre sont à connaître par cœur car elles sont très utilisées comme **entrées-test** des systèmes asservis.
$u(t)$: échelon unitaire	$\frac{1}{p}$	
$t.u(t)$: rampe unitaire	$\frac{1}{p^2}$	

2.3. Propriétés importantes

- **Conditions de Heaviside**

Une fonction du temps f de $\mathbb{R}_+$ $dans$ $\mathbb{R}$ qui à $t \longrightarrow f(t)$vérifie les conditions de **Heaviside** si:

$f(0^-) = 0,\ f'(0^-) = 0,\ f''(0^-) = 0,\ \ldots$ C'est à dire si les **conditions initiales** sont **nulles et le système est au repos pour t<0.**

- **Unicité et linéarité**

Unicité : à $f(t)$ correspond $F(p)$ unique, à $F(p)$ correspond $f(t)$ unique.

Linéarité : $\mathcal{L}\,[f_1(t)\; +\; f_2(t)] \;=\; \mathcal{L}\,[f_1(t)] \;+\; \mathcal{L}\,[f_2(t)] \;=\; F_1(p) \;+\; F_2(p)$

$\mathcal{L}\,[\lambda\,.\,f(t)] = \lambda.\mathcal{L}\,[f(t)] = \lambda.F(p)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$

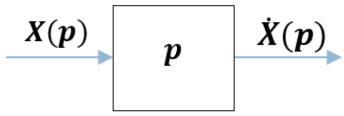
2.4. Transformée de la dérivée (démonstration ① en fin de cours)

Dériver par rapport à t dans le domaine temporel revient à multiplier par p dans le domaine symbolique dans les conditions de Heaviside.

Dans des conditions générales : $\boxed{\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = p.F(p) - f(0^-)}$

Et $\mathcal{L}\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = p^2.F(p) - p.f(0^-) - f'(0^-)$ avec F la transformée de Laplace de f

Sous les conditions de Heaviside :



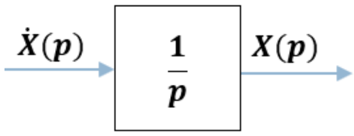
2.5. Transformée de l'intégrale (démonstration ② en fin de cours)

Dans les conditions de Heaviside, intégrer dans le domaine temporel revient à diviser par p dans le domaine symbolique.

Dans des conditions générales : $\boxed{\mathcal{L}\left[\int_0^t f(u).du\right] = \frac{F(p)}{p} + \frac{g(0)}{p}}$

avec g une primitive de f et F la transformée de Laplace de f

Sous les conditions de Heaviside :



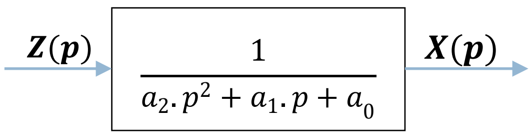
2.6. Transformée d'une équation différentielle linéaire

Exemple : transformation de l'équation différentielle suivante sous les conditions de Heaviside :

$$a_2\cdot\frac{d^2x(t)}{dt^2} + a_1\cdot\frac{dx(t)}{dt} + a_0.x(t) = z(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} a_2.p^2.X(p) + a_1.p.X(p) + a_0.X(p) = Z(p)$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} (a_2.p^2 + a_1.p + a_0).X(p) = Z(p)$$

(sous les conditions de Heaviside)



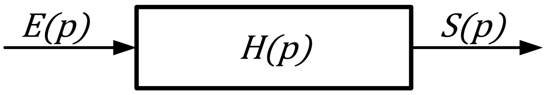
3. APPROCHE GLOBALE : FONCTION DE TRANSFERT H(P) D'UN SYSTÈME

Si on applique la transformation de Laplace sur l'équation différentielle d'un système, d'entrée $e(t)$, de sortie $s(t)$ et d'équation $a_n\cdot\frac{d^ns(t)}{dt^n} + \cdots + a_0\cdot s(t) = b_m\cdot\frac{d^me(t)}{dt^m} + \cdots + b_0.e(t)$, on obtient pour des conditions de Heaviside : $(a_n\cdot p^n + \cdots + a_0)\cdot S(p) = (b_m\cdot p^m + \cdots + b_0)\cdot E(p)$

On appelle **fonction de transfert $H(p)$** du système (ou transmittance) la relation dans le domaine symbolique telle que : $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_m \cdot p^m + \cdots + b_0}{a_n \cdot p^n + \cdots + a_0}$

Dans le domaine symbolique, la relation entre l'entrée et la sortie s'écrit donc : *S(p) = H(p).E(p)*

La fonction de transfert caractérise le comportement intrinsèque du système et ne dépend ni de l'entrée, ni de la sortie.



Les fonctions de transfert se présenteront toujours sous forme de fraction rationnelle, mise sous la forme suivante que l'on appelle **forme canonique** :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K.(1 + b_1.p + \cdots + b_m \cdot p^m)}{p^\alpha.(1 + a_1.p + \cdots + a_n \cdot p^{n-\alpha})}$$

α : **classe du système** (représente le nombre d'intégrateur dans le système avec $\alpha \in \{0,1,2\}$

n : **ordre du système**, identique à l'ordre de l'équation différentielle

K : **gain statique** (permet de connaître le comportement du système en régime permanent), il possède une unité (unité de la variable de sortie / unité de la variable d'entrée).

Remarque : si l'entrée est une impulsion de Dirac, on a alors $S(p) = H(p).1 = H(p)$. La fonction de transfert représente donc la transformée de Laplace de la réponse "impulsionnelle". Malheureusement, on sait rarement générer physiquement un tel signal. Cependant, cette propriété est utilisée pour les logiciels de simulation et des protocoles d'essais expérimentaux (test au marteau de choc).

3.1. Représentation schématique des systèmes automatisés asservis

- **Trois solutions de représentation sont proposées :**
- Le **SysML** est adapté à la représentation des systèmes asservis. Le *diagramme paramétrique* permet en particulier de mettre en place le modèle physique en liant les blocs d'équations qui modélisent le comportement du système et de sa boucle de régulation. Les blocs contiennent les équations entre les variables. Les variables ne sont pas spécifiées comme d'entrée (cause) ou de sortie (effet) dans les blocs, on dit que le modèle est ***acausal***. Les variables sont ensuite liées entre les blocs en fonction de l'architecture du système.
- Les logiciels **Simulink de Matlab ou Xcos de Scilab** après la démarche de modélisation permettent de représenter et simuler le comportement de système asservi. Ils sont utilisés en cours et en TP.
- Les **schémas-blocs** constituent une représentation *causale* d'un système. Ils présupposent quels sont les signaux d'entrée et de sortie du modèle et de chaque bloc (sous-modèles) : (figure 1).

3.2. Représentation par schémas-blocs

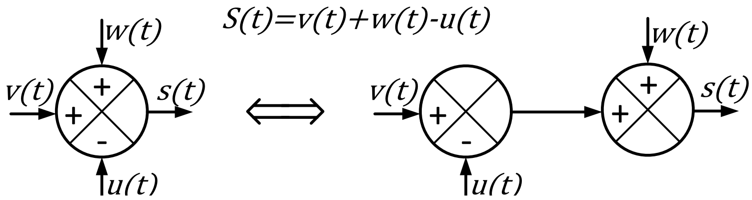
Pour représenter un système automatique, le schéma-bloc fonctionnel met en relation les entrées et sorties du système et permet de comprendre la structure du système et de l'étudier d'un point de vue commande (lien entre la consigne et la réponse).

On distingue plusieurs éléments graphiques :

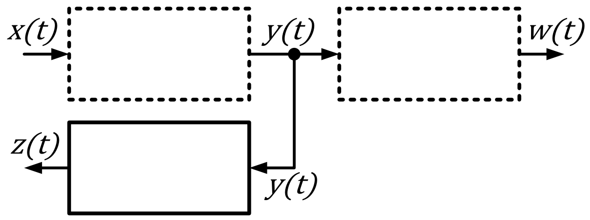
Le bloc : le contenu du bloc est en général le nom d'un composant (moteur, réducteur, roue...), d'une loi (PFD,...) ou bien encore d'opérateur mathématique associé à une fonction particulière (exemple : l'opérateur $\frac{1}{p}$ pour décrire une intégration lors du passage d'une vitesse à une position).

Une entrée secondaire correspond en général à une perturbation.

Le point de sommation (ou sommateur, soustracteur, comparateur) qui réalise des opérations du type addition ou soustraction



Le point de prélèvement ou de jonction : une variable $y(t)$ est réutilisée comme entrée d'un bloc



Les systèmes industriels sont, par nature, complexes et la représentation en schéma-bloc fonctionnel permet de décomposer le système en sous-systèmes plus facilement modélisables.

Par assemblage des différents blocs, il est ensuite possible de déduire le comportement global du système complexe.

De manière générale, un système automatisé asservi mécatronique présente généralement une structure en schéma-bloc fonctionnel comme celle-ci dont il faut connaître le vocabulaire associé :

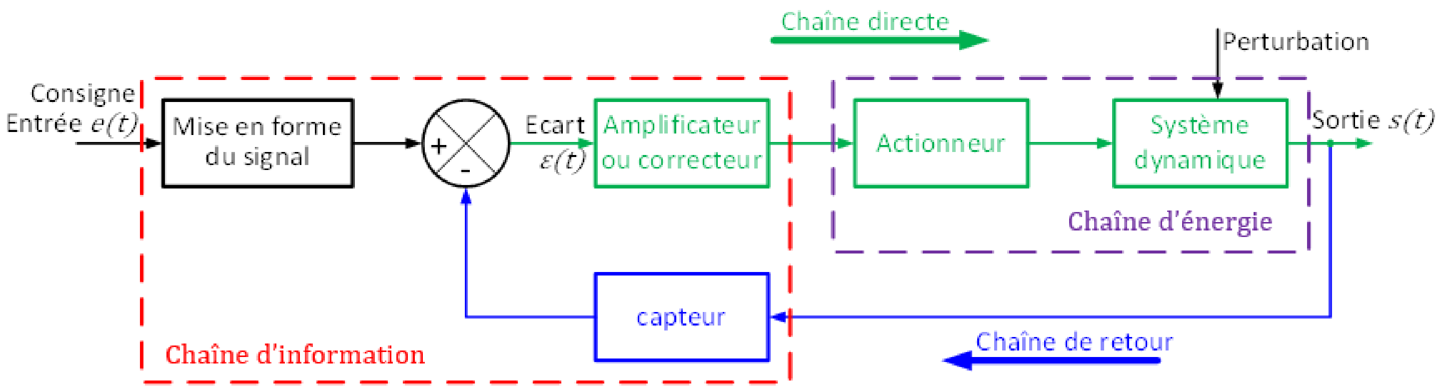
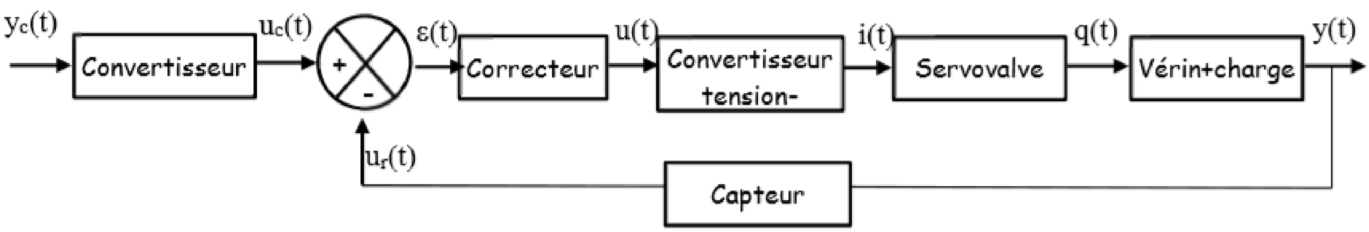


Figure 1 : Forme générique d'un schéma-bloc fonctionnel associé à un système automatisé asservi mécatronique

4. EXEMPLES

4.1. Contrôle du devers d'un wagon de TGV (Centrale Supélec MP 2000)

Le contrôle du devers d'un wagon de TGV est modélisé par l'asservissement ci-dessous.



- Quels composants constituent la chaîne directe ?

- Quels composants constituent la chaîne retour ?

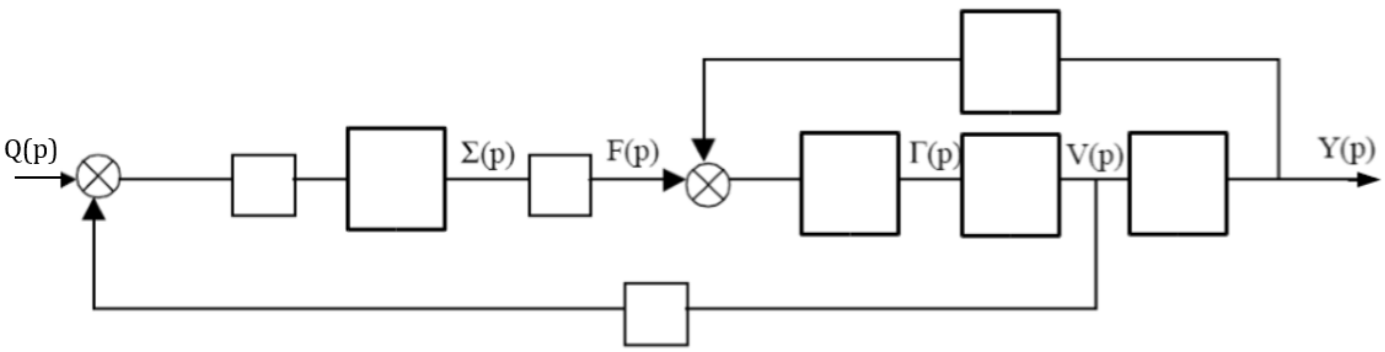
- Donner l'expression de l'écart

Le fonctionnement du bloc « vérin + charge » est décrit par le système d'équations reliant les grandeurs physiques $q(t)$; $y(t)$; $\sigma(t)$; $F(t)$; $\alpha_2(t)$ et leurs dérivées :

$$F(t) = S.\sigma(t) \quad ; \quad y(t) = R.\alpha_2(t) \quad ① \quad ; \quad \frac{J}{R}.\gamma(t) = R.F(t) - \mu.\alpha_2(t) \quad ②$$

$$\dot{y}(t) = v(t) = \frac{dy(t)}{dt} \quad ; \quad \gamma(t) = \frac{d^2y(t)}{dt^2} \quad ③ \quad ; \quad q(t) = 2.S.\frac{dy(t)}{dt} + \frac{V_0}{b}.\frac{d\sigma(t)}{dt} \quad ④$$

- Ecrire les transformées de Laplace de ces équations :



- Compléter le schéma-bloc ci-dessous :

5. QUATRE THÉORÈMES INDISPENSABLES

- **Théorème de la valeur initiale et de la valeur finale**

Lorsqu'on veut obtenir rapidement des informations sur la fonction temporelle $\boldsymbol{f(t)}$ mais que l'on ne souhaite pas déterminer la transformée inverse de $\boldsymbol{F(p)}$, pour limiter les calculs, on peut utiliser les deux théorèmes suivants :

- **Théorème de la valeur initiale** : $\lim\limits_{t \to 0} \boldsymbol{f(t)} = \lim\limits_{p \to +\infty} \boldsymbol{p \cdot F(p)}$
- **Théorème de la valeur finale** : $\lim\limits_{t \to +\infty} \boldsymbol{f(t)} = \lim\limits_{p \to 0} \boldsymbol{p \cdot F(p)}$

Rq : La démonstration de ce théorème implique que la fonction f converge, ce qui sera toujours le cas dans nos domaines d'étude (systèmes stables).

Exemple : On veut connaître la valeur asymptotique de la réponse *s(t)* d'un système. Il suffira d'écrire :

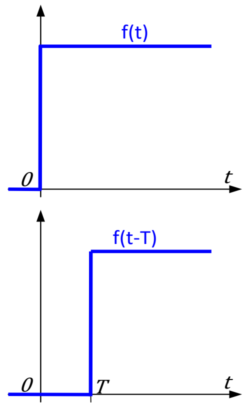
$\lim\limits_{t\to+\infty} s(t) = \lim\limits_{p\to 0} p \cdot S(p) = \lim\limits_{p\to 0} p \cdot H(p).E(p)$ obtenue sans résolution de système d'équations différentielles …

- **Théorème du retard**

Soit une fonction $\boldsymbol{f(t)}$ de transformée de Laplace $\boldsymbol{F(p)}$. Alors $\boldsymbol{f(t-T)}$ peut être déduite de $\boldsymbol{f(t)}$ en lui faisant subir un décalage temporel (ou retard) de valeur T.

Par conséquent $\mathcal{L}[f(t-T)]$ peut être calculée en exploitant ce décalage temporel, c'est le théorème du retard :

$\mathcal{L}[\boldsymbol{f(t-T)}] = \boldsymbol{e^{-T.p}.F(p)}$ où $\boldsymbol{e^{-T.p}}$ correspond à l'opérateur retard.



Ainsi, on peut créer des signaux d'entrée plus complexes en combinant des signaux simples avec différents retards. Exemple : le créneau.

Exemple :

- **Théorème de l'amortissement :**

Soit une fonction $\boldsymbol{f(t)}$ de transformée de Laplace $\boldsymbol{F(p)}$

Alors $\boldsymbol{\mathcal{L}[e^{-at}.f(t)] = F(p+a)}$

Exemple :

Vocabulaire de base dont le sens doit être parfaitement compris :

Entrée-test (impulsion, échelon ou indicielle, rampe), consigne, perturbation,

Bloc, chaîne directe, chaîne retour, comparateur, écart, intégrateur,

Forme canonique, classe, ordre, gain statique

Démonstration ① : par définition, $\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \int_{0^-}^{+\infty} \left[\frac{df(t)}{dt}\right] e^{-pt}.dt$

Intégrons par parties en posant : $\begin{cases} u = e^{-pt} \\ v = f(t) \end{cases}$ $alors$ $\begin{cases} du = -p.e^{-pt}.dt \\ dv = \frac{df(t)}{dt}.dt \end{cases}$

$$donc\ \ \mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \left[f(t).e^{-pt}\right]_{0^-}^{+\infty} - \int_{0^-}^{+\infty} -f(t).p.e^{-pt}\,dt = -f(0^-) + p.F(p)$$

(en effet, $f(t)$ $étant$ "bornée" (abscisses de convergences), on a $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t).e^{-pt} = 0$)

Démonstration ② : on pose $f(t) = \frac{dg(t)}{dt}$ (g une primitive de f $donc$ $g(t) = \int_0^t f(u).du$)

$$\text{Alors, } \mathcal{L}[f(t)] = F(p) = \mathcal{L}\left[\frac{dg(t)}{dt}\right] = p.G(p) - g(0) = p.\mathcal{L}[g(t)] - g(0) = p.\mathcal{L}\left[\int_0^t f(u)du\right] - g(0)$$

$$\text{et donc, } \mathcal{L}\left[\int_0^t f(u)du\right] = \frac{F(p)}{p} + \frac{g(0)}{p}$$