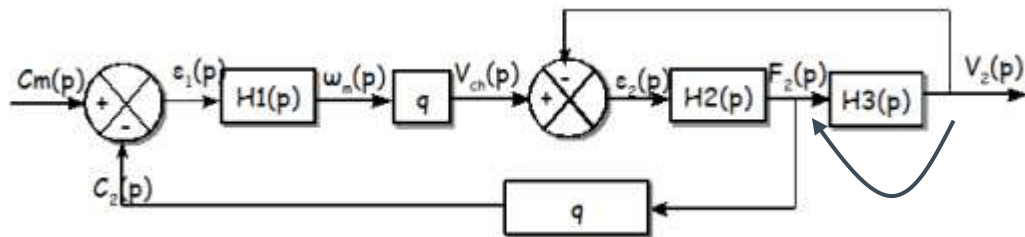


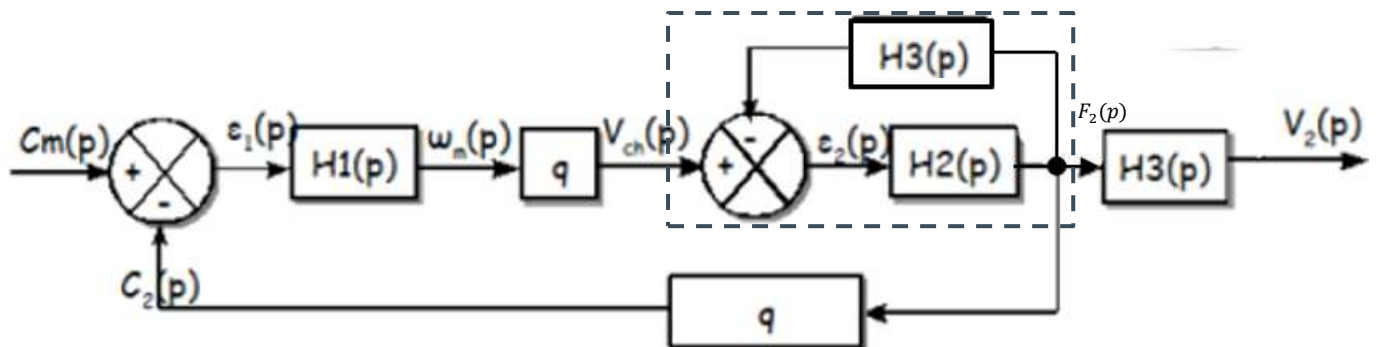
TD 5 Techniques de manipulations des schémas-blocs : Calculs de fonctions de transfert

EXERCICE 1 : MANIPULATIONS DE SCHEMAS-BLOCS

Q1. Appliquer les manipulations de schémas blocs pour obtenir la fonction de transfert $G(p) = \frac{V_2(p)}{C_m(p)}$



Déplacement de la jonction $V_2(p)$. Le retour unitaire supérieur doit être modifier avec un bloc $H_3(p)$



On calcule $H_{eq}(p) = \frac{F_2(p)}{V_{ch}(p)} = \frac{H_2(p)}{1 + H_2(p) \cdot H_3(p)}$ et alors $G(p) = \frac{V_2(p)}{C_m(p)} = \frac{H_1(p) \cdot q \cdot H_{eq}(p)}{1 + H_1(p) \cdot q \cdot H_{eq}(p) \cdot q} \cdot H_3(p)$

$$G(p) = \frac{V_2(p)}{C_m(p)} = \frac{H_1(p) \cdot q \cdot H_2(p) \cdot H_3(p)}{1 + H_2(p) \cdot H_3(p) + H_1(p) \cdot q^2 \cdot H_2(p)}$$

Q2. Donner sa forme canonique.

Impossible car les expressions des $H_i(p)$ sont inconnues !

EXERCICE 2 : CONTROLE DU DEVERS DE TGV PAR PENDULATION (CENTRALE SUPELEC MP 2000)

Plus rapide et plus confortable :

La «**PENDULATION**» permet d'augmenter la vitesse sur les lignes classiques sans que les voyageurs ressentent les effets désagréables des accélérations latérales.

Respect de l'environnement : le système de pendulation, en permettant l'augmentation de la vitesse sur les lignes classiques, évite la réalisation de nouvelles infrastructures.

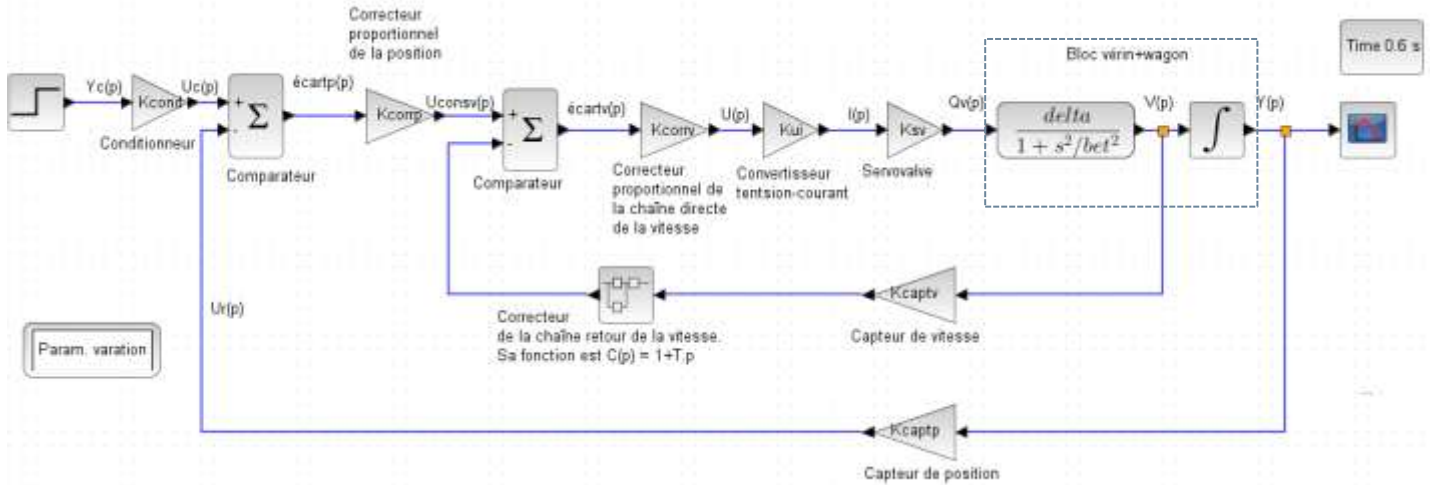
Inclinaison des caisses : $6^\circ 3'$

Masse en ordre de marche du wagon : 20 t

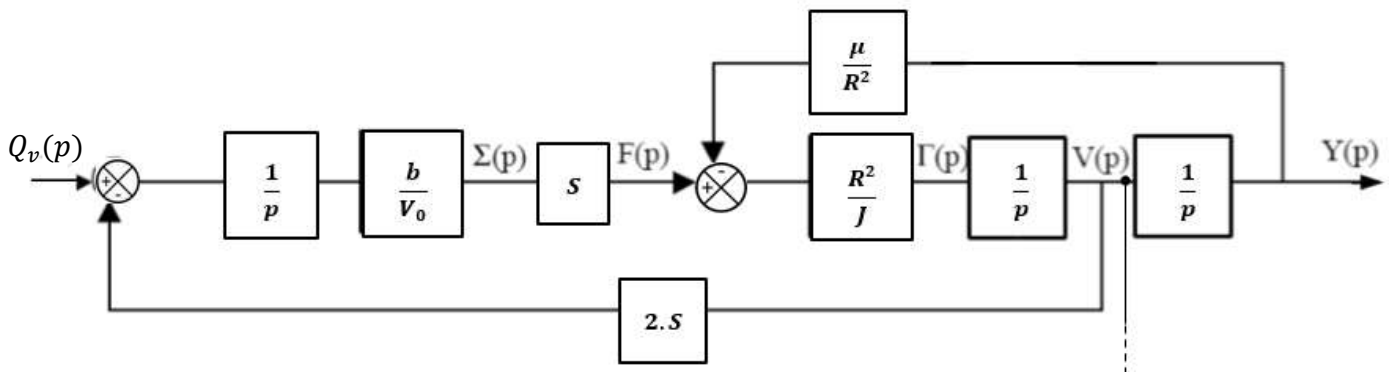
Une première approche de ce système a été vu dans le cours C4. Il est modélisé plus complètement ci-dessous, avec une boucle d'asservissement en vitesse et une autre en position, grâce au module **Xcos** du logiciel **Scilab** qui permet de simuler le fonctionnement et d'en déduire ses performances à partir d'outils d'analyses présents dans Scilab.



Schéma-blocs global :



Dans le cours C4, on a construit le schéma-blocs suivant pour « **Vérin+charge** » :



Le comportement du vérin est régi par les lois de la mécanique des fluides, la charge (le wagon en fait) est régie par le Principe fondamental de la dynamique (PFD).

Ce schéma-blocs est inséré dans un schéma-blocs plus vaste.

Q1. Calculer la fonction de transfert équivalente 1, $H_{eq1}(p) = \frac{V(p)}{Q_v(p)}$. Vous préciserez les modifications à opérer sur le schéma-blocs vérin+charge pour qu'il corresponde à la zone vérin+wagon.

Déplacement du prélèvement $Y(p)$ vers $V(p)$ et le bloc retour est modifié en $\frac{\mu}{R^2 \cdot p}$

$$\text{On calcule } H_{eq}(p) = \frac{V(p)}{F(p)} = \frac{\frac{R^2}{J \cdot p}}{1 + \frac{R^2 \cdot \mu}{J \cdot p \cdot R^2 \cdot p}} = \frac{R^2 \cdot p}{J \cdot p^2 + \mu}$$

$$\text{Puis } H_{eq1}(p) = \frac{V(p)}{Q_v(p)} = \frac{\frac{b \cdot S}{p \cdot V_0} \cdot \frac{R^2 \cdot p}{J \cdot p^2 + \mu}}{1 + \frac{b \cdot S}{p \cdot V_0} \cdot \frac{R^2 \cdot p}{J \cdot p^2 + \mu} \cdot 2S} = \frac{b \cdot S \cdot R^2}{V_0 \cdot (J \cdot p^2 + \mu) + 2 \cdot b \cdot S^2 \cdot R^2}$$

Q2. Montrer qu'elle peut s'écrire sous la forme canonique $H_{eq1}(p) = \frac{\delta}{1 + \frac{p^2}{\beta^2}}$. Vous donnerez les expressions de δ et β .

Attention (erreur classique). Pour la forme canonique, il faut mettre en facteur **tout** le terme constant du dénominateur ! Développons le dénominateur.

$$H_{eq1}(p) = \frac{V(p)}{Q_v(p)} = \frac{b \cdot S \cdot R^2}{V_0 \cdot J \cdot p^2 + \underbrace{V_0 \cdot \mu + 2 \cdot b \cdot S^2 \cdot R^2}_{\text{terme constant}}}$$

$$H_{eq1}(p) = \frac{\frac{b \cdot S \cdot R^2}{V_0 \cdot \mu + 2 \cdot b \cdot S^2 \cdot R^2}}{1 + \frac{V_0 \cdot J}{V_0 \cdot \mu + 2 \cdot b \cdot S^2 \cdot R^2} \cdot p^2}$$

On a donc $\delta = \frac{b \cdot S \cdot R^2}{V_0 \cdot \mu + 2 \cdot b \cdot S^2 \cdot R^2}$ et $\beta = \sqrt{\frac{V_0 \cdot \mu + 2 \cdot b \cdot S^2 \cdot R^2}{V_0 \cdot J}}$

Commentaires :

Dans δ et β , nous retrouvons tous les coefficients des équations issues de l'hydraulique et du PFD décrivant la rotation du wagon autour de son axe longitudinal (voir le corrigé de l'exercice 4 pour l'hydraulique du TD4).

Globalement, $H_{eq1}(p)$ est d'ordre 2 sans terme en p au dénominateur. Cela signifie que la rotation du wagon serait identique à celui d'une balançoire sans frottement (oscillation permanente).

Dans le cas classique ou la forme canonique d'un **ordre 2** s'écrit :

$$H_{2nd}(p) = \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot z}{\omega_0} \cdot p + \frac{1}{\omega_0^2} \cdot p^2}, \text{ on parlera d'un } \underline{\text{second ordre}}.$$

K est le gain statique ; z est le facteur d'amortisseur (frottements) et ω_0 la pulsation propre non amortie.

Ici, $H_{eq1}(p)$ présente un $z = 0$, l'oscillation n'est donc pas amortie et nous connaissons même la fréquence

propre de cette oscillation : $f_0 = \frac{\omega_0}{2 \cdot \pi}$, par identification $f_0 = \frac{\beta}{2 \cdot \pi} = \frac{\sqrt{\frac{V_0 \cdot \mu + 2 \cdot b \cdot S^2 \cdot R^2}{V_0 \cdot J}}}{2 \cdot \pi}$.

L'approche globale est donc suffisante pour identifier le comportement de nos systèmes grâce à des démarches, méthodes et outils développés spécifiquement dans ce but (Laplace, Schéma-blocs, manipulations, chaînes directe et retour, comparateur, écart, Black, Théorèmes, forme générique d'un asservissement, FTBF, FTBO, identification 1^{er} ordre (C10) et 2nd ordre (C11), diagramme de Bode (C12), Correcteurs (C16), ...). L'ensemble est mis en pratique lors des TP.

Q3. Justifier la contrainte $K_{cond} = K_{captp}$ (qui sera noté K_0 pour la suite).

C'est la question ultra classique (voir la fin du C3 et TD 4). L'écart doit être nul lorsque la sortie est égale à la consigne. Or, $\varepsilon(p) = K_{cond} \cdot Y_c(p) - K_{captp} \cdot Y(p)$. Cette condition impose que $K_{cond} = K_{captp}$!

Q4. Après avoir placé le gain $K_{cond} = K_0$ après le comparateur et modifié le schéma-blocs en conséquence, calculer la FTBO(p) du schéma-blocs obtenu. Vous l'écrirez sous forme canonique.

ALERTE : K_0 est maintenant après le premier comparateur et l'asservissement de position est désormais à retour unitaire. **L'écart devient $\text{écartp}(p) = Y_c(p) - Y(p)$ et la mesure(p), retour au comparateur, vaut $Y(p)$.**

Par définition, $FTBO(p) = \frac{\text{mesure}(p)}{\text{écartp}(p)}$

Au préalable, calculons $FTBF_v(p) = \frac{V(p)}{U_{cons_v}(p)}$. Cette boucle fermée, interne au schéma-blocs, constitue l'asservissement de vitesse de la tige du vérin. Il est classique, pour asservir la position $y(t)$ de la tige du vérin, de contrôler avant sa vitesse $v(t)$ pour éviter l'emballement du fonctionnement.

$$D'après Black, FTBF_v(p) = \frac{K_{corr_v} \cdot K_{ui} \cdot K_{sv} \cdot \frac{\delta}{1 + \frac{p^2}{\beta^2}}}{1 + K_{corr_v} \cdot K_{ui} \cdot K_{sv} \cdot \frac{\delta}{1 + \frac{p^2}{\beta^2}} \cdot K_{capt_v} \cdot (1 + T \cdot p)} = \frac{K_{corr_v} \cdot K_{ui} \cdot K_{sv} \cdot \delta \cdot \beta^2}{\beta^2 + p^2 + \beta^2 \cdot K_{corr_v} \cdot K_{ui} \cdot K_{sv} \cdot \delta \cdot K_{capt_v} \cdot (1 + T \cdot p)}$$

Attention, développons le dénominateur pour bien identifier le terme constant.

$$FTBF_v(p) = \frac{K_{corr_v} \cdot K_{ui} \cdot K_{sv} \cdot \delta \cdot \beta^2}{p^2 + \beta^2 \cdot K_{corr_v} \cdot K_{ui} \cdot K_{sv} \cdot \delta \cdot K_{capt_v} \cdot T \cdot p + \beta^2 + \beta^2 \cdot K_{corr_v} \cdot K_{ui} \cdot K_{sv} \cdot \delta \cdot K_{capt_v}}$$

$$FTBF_v(p) = \frac{\frac{K_{corr_v} \cdot K_{ui} \cdot K_{sv} \cdot \delta}{1 + K_{corr_v} \cdot K_{ui} \cdot K_{sv} \cdot \delta \cdot K_{capt_v}}}{1 + \frac{K_{corr_v} \cdot K_{ui} \cdot K_{sv} \cdot \delta \cdot K_{capt_v} \cdot T}{1 + K_{corr_v} \cdot K_{ui} \cdot K_{sv} \cdot \delta \cdot K_{capt_v}} \cdot p + \frac{1}{\beta^2 \cdot (1 + K_{corr_v} \cdot K_{ui} \cdot K_{sv} \cdot \delta \cdot K_{capt_v})} p^2}$$

L'asservissement de vitesse se comporte comme un 2nd ordre. Comme T et K_{corr_v} sont les coefficients des correcteurs, nous pouvons les régler pour imposer la valeurs de z et ω_0 .

On sait qu'un 2nd ordre est toujours stable et qui est le plus rapide ($t_{5\%}$ mini) lorsque $z = 0,69 \dots$ Cet asservissement sera donc facile à maîtriser.

Par contre, la FTBO de l'asservissement de position vaut $FTBO(p) = K_0 \cdot K_{corr_p} \cdot FTBF_v(p) \cdot \frac{1}{p}$. Elle est donc de classe 1, ce qui annulera l'erreur pour une consigne échelon (C16) mais d'ordre 3, ce qui peut poser des problèmes de stabilité (C16).

Q5. Calculer sa FTBF.

Pour l'asservissement de position qui est maintenant à retour unitaire, d'après Black,

$$FTBF(p) = \frac{Y(p)}{Y_c(p)} = \frac{K_0 \cdot K_{corr_p} \cdot FTBF_v(p) \cdot \frac{1}{p}}{1 + K_0 \cdot K_{corr_p} \cdot FTBF_v(p) \cdot \frac{1}{p}} = \frac{K_0 \cdot K_{corr_p} \cdot FTBF_v(p)}{p + K_0 \cdot K_{corr_p} \cdot FTBF_v(p)}$$

$$FTBF(p) = \frac{K_0 \cdot K_{corr_p} \cdot K_{corr_v} \cdot K_{ui} \cdot K_{sv} \cdot \delta \cdot \beta^2}{p \cdot (p^2 + \beta^2 \cdot K_{corr_v} \cdot K_{ui} \cdot K_{sv} \cdot \delta \cdot K_{capt_v} \cdot T \cdot p + \beta^2 + \beta^2 \cdot K_{corr_v} \cdot K_{ui} \cdot K_{sv} \cdot \delta \cdot K_{capt_v} \cdot p) + K_0 \cdot K_{corr_p} \cdot K_{corr_v} \cdot K_{ui} \cdot K_{sv} \cdot \delta \cdot \beta^2}$$

On ne demande pas sa forme canonique ... mais c'est un ordre 3.

Q6. Calculer $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$ pour une entrée-test $y_c(t) = y_c \cdot u(t)$ où $u(t)$ est l'échelon unité.

D'après le théorème de la valeur finale, $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot Y(p)$ (ne pas oublier le p).

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot Y(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot FTBF(p) \cdot Y_c(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot FTBF(p) \cdot \frac{y_c}{p}$$

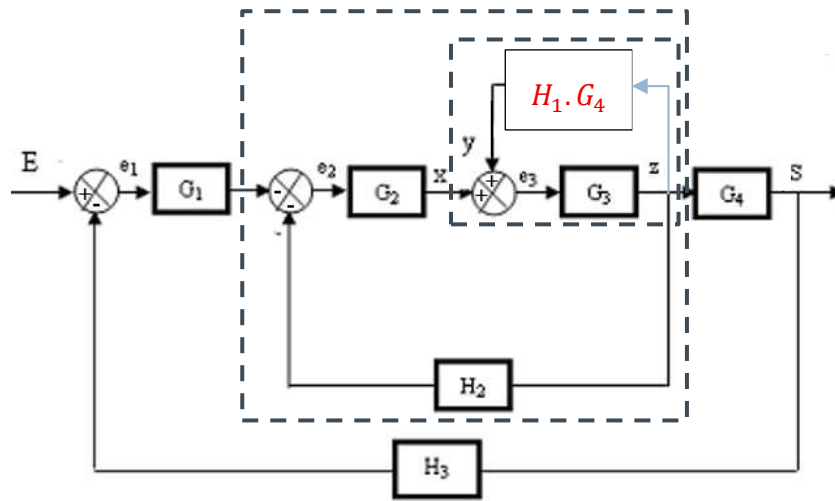
$$\text{Et finalement, } \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot FTBF(p) \cdot \frac{y_c}{p} = \frac{K_0 \cdot K_{corr_p} \cdot K_{corr_v} \cdot K_{ui} \cdot K_{sv} \cdot \delta \cdot \beta^2}{K_0 \cdot K_{corr_p} \cdot K_{corr_v} \cdot K_{ui} \cdot K_{sv} \cdot \delta \cdot \beta^2} \cdot y_c = y_c$$

Résultat prévisible grâce à la classe 1 de la FTBO !

Remarque : Par définition, l'erreur statique $e_{st} = \lim_{t \rightarrow +\infty} (y_c(t) - y(t))$ et elle sera nulle.

EXERCICE 3 : MANIPULATIONS DE SCHEMAS-BLOCS

Q1. Appliquer les manipulations de schémas-blocs pour obtenir la fonction de transfert $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$.



Déplacement du prélèvement $S(p)$ vers $Z(p)$ et le bloc retour est modifié en $H_1 \cdot G_4$

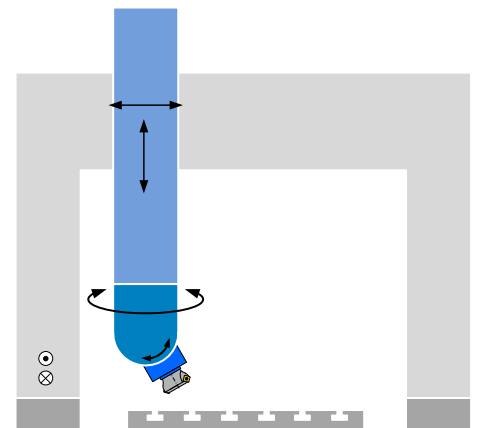
On calcule $H_{eq1}(p) = \frac{G_3}{1 - H_1 \cdot G_4 \cdot G_3}$ (attention - car sommateur ++).

Puis $H_{eq2}(p) = \frac{-G_2 \cdot H_{eq1}(p)}{1 + G_2 \cdot H_{eq1}(p) \cdot H_2} = \frac{-G_2 \cdot G_3}{1 - H_1 \cdot G_4 \cdot G_3 + G_2 \cdot G_3 \cdot H_2}$

Enfin, $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{G_1 \cdot H_{eq2}(p) \cdot G_4}{1 + G_1 \cdot H_{eq2}(p) \cdot G_4 \cdot H_3} = \frac{-G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 \cdot G_4}{1 - H_1 \cdot G_4 \cdot G_3 + G_2 \cdot G_3 \cdot H_2 - G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 \cdot G_4 \cdot H_3}$

EXERCICE 4 : SCHÉMA-BLOC FONCTIONNEL D'UN AXE ASSERVI DE MACHINE OUTIL

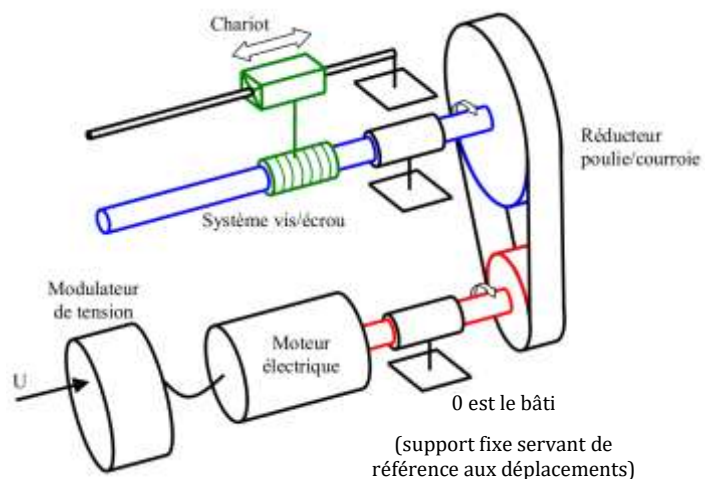
L'étude porte sur un axe linéaire asservi que l'on peut retrouver sur des machines-outils à commande numérique. Par exemple, ce type de transformation de mouvement est présent sur les trois axes en translation de la machine 5 axes dont la structure est représentée ci-contre.



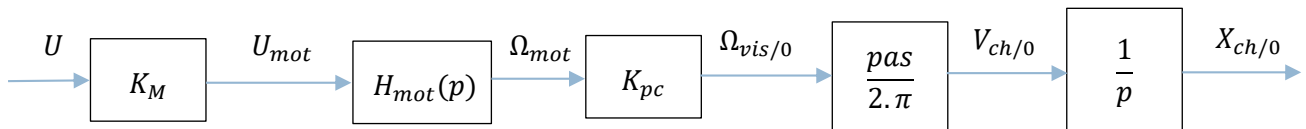
Etude en boucle ouverte :

Le signal de commande U du modulateur de tension de gain pur K_M engendre l'alimentation U_{mot} du moteur électrique de fonction de transfert $H_{mot}(p)$ dont l'arbre tourne à la vitesse $\omega_{mot/0}$ et entraîne alors un réducteur de vitesse de gain pur K_{pc} constitué de deux poulies et d'une courroie.

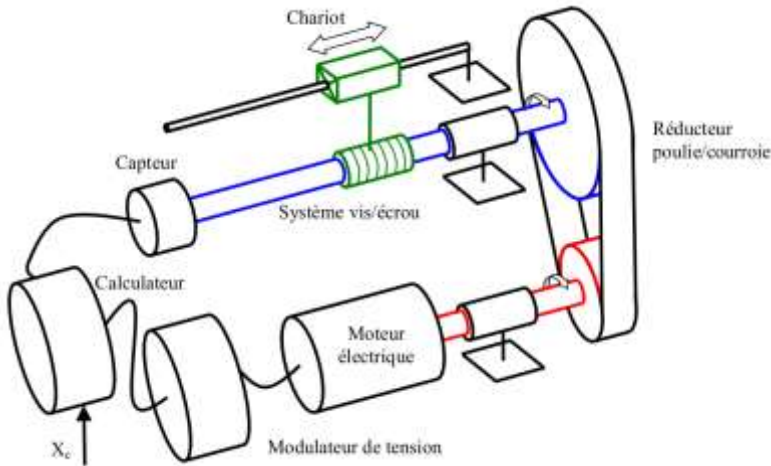
La rotation de la vis $\omega_{vis/0}$, liée à la grande poulie, entraîne la translation de l'écrou (pas noté Pas) et donc du chariot. On note $X_{ch/0}$ cette translation.



Q1. Après avoir identifié l'entrée et la sortie de ce système, tracer son schéma-bloc fonctionnel et définir les données de sortie de chaque bloc.

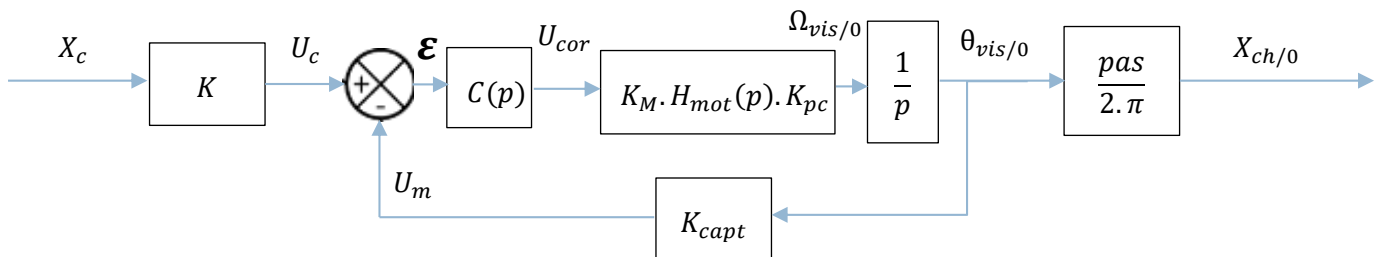


Etude en boucle fermée :



On rajoute au système précédent un capteur et un calculateur. Le capteur, de gain pur K_{capt} , mesure l'angle $\theta_{vis/0}$ de rotation de la vis et en informe le calculateur avec la tension de mesure U_m . X_c étant la consigne de position du chariot par rapport au bâti, le calculateur compare cette mesure avec la tension de consigne $U_c = K \cdot X_c$ et élabore le signal de commande corrigé en tension U_{cor} , fonction de la différence $U_c - U_m$, vers le modulateur. La fonction de transfert du correcteur est notée $C(p)$.

Q2. A partir de ces informations et de la structure générique d'un asservissement, tracer le nouveau schéma-bloc fonctionnel de ce système et définir les données de sortie de chaque bloc.



Bien sûr, $K = K_{capt} \cdot \frac{2\pi}{pas}$ car $\varepsilon(p) = 0$ lorsque $X_{ch/0} = X_c$.

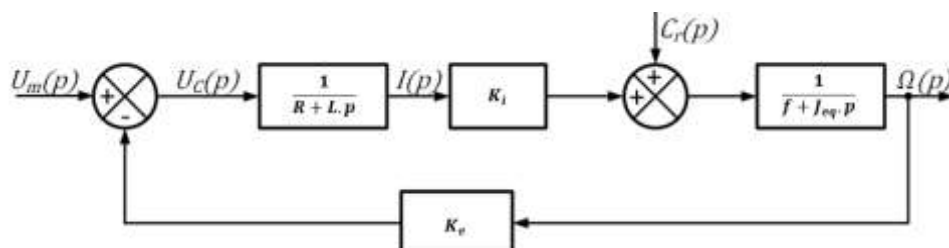
Q3. Calculer la fonction de transfert en boucle fermée $FTBF(p) = \frac{X_{ch/0}(p)}{X_c(p)}$.

$$FTBF(p) = \frac{X_{ch/0}(p)}{X_c(p)} = K \cdot \frac{C(p) \cdot K_M \cdot H_{mot}(p) \cdot K_{pc} \cdot \frac{1}{p}}{1 + C(p) \cdot K_M \cdot H_{mot}(p) \cdot K_{pc} \cdot \frac{1}{p} \cdot K_{capt}} \cdot \frac{pas}{2\pi} = K_{capt} \cdot \frac{2\pi}{pas} \cdot \frac{C(p) \cdot K_M \cdot H_{mot}(p) \cdot K_{pc}}{p + C(p) \cdot K_M \cdot H_{mot}(p) \cdot K_{pc} \cdot K_{capt}} \cdot \frac{pas}{2\pi}$$

$$FTBF(p) = \frac{C(p) \cdot K_M \cdot H_{mot}(p) \cdot K_{pc} \cdot K_{capt}}{p + C(p) \cdot K_M \cdot H_{mot}(p) \cdot K_{pc} \cdot K_{capt}}$$

EXERCICE 5 : SUPERPOSITION MCC (CLASSIQUE EN CONCOURS)

Le schéma-blocs d'un moteur à courant continu MCC, vu au cours TD 4, est :



Q1. Montrer par superposition que $\Omega_m(p)$ s'écrit :

$$\Omega_m(p) = \frac{K_i}{(R + L \cdot p) \cdot (f + J_{eq} \cdot p) + K_i \cdot K_e} \cdot U_m(p) + \frac{R + L \cdot p}{(R + L \cdot p) \cdot (f + J_{eq} \cdot p) + K_i \cdot K_e} \cdot C_r(p)$$

Voir cours C5

Q2. On alimente ce moteur avec une tension $u_m(t)$ en échelon d'amplitude U_0 . Par ailleurs, la charge (c'est le couple résistant $c_r(t)$ composé par les frottements et l'inertie du récepteur) est modélisée par un échelon d'amplitude C_{r0} . Donner les transformées de Laplace de ces deux entrées.

On a $U_m(p) = \frac{U_0}{p}$ et $C_r(p) = \frac{C_{r0}}{p}$

Q3. Calculer la limite $\lim_{t \rightarrow +\infty} \omega_m(t)$ pour les deux entrées précédentes.

D'après le TVF, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \omega_m(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \Omega_m(p)$

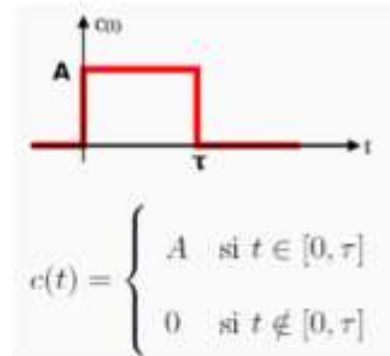
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \omega_m(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{K_i}{(R + L \cdot p) \cdot (f + J_{eq} \cdot p) + K_i \cdot K_e} \cdot U_m(p) + \frac{R + L \cdot p}{(R + L \cdot p) \cdot (f + J_{eq} \cdot p) + K_i \cdot K_e} \cdot C_r(p)$$

$$= \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{K_i}{(R + L \cdot p) \cdot (f + J_{eq} \cdot p) + K_i \cdot K_e} \cdot \frac{U_0}{p} + \frac{R + L \cdot p}{(R + L \cdot p) \cdot (f + J_{eq} \cdot p) + K_i \cdot K_e} \cdot \frac{C_{r0}}{p}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \omega_m(t) = \frac{K_i \cdot U_0 + R \cdot C_{r0}}{R \cdot f + K_i \cdot K_e}$$

EXERCICE 6 : DIVERS

La fonction créneau dessinée ci-contre peut être exprimée mathématiquement avec des échelons unitaires.



Q1. Déterminer l'expression temporelle du créneau $c(t)$ puis sa transformée de Laplace $C(p)$.

On construit ce créneau par une somme d'échelon ainsi :

$$c(t) = A \cdot u(t) - A \cdot u(t - T)$$

$$\text{et } C(p) = \frac{A}{p} - \frac{A}{p} \cdot e^{-T \cdot p}$$

Q2. Qu'est-ce qu'un SLCI ?

C'est un Système Linéaire, Continue, Invariant (voir le cours C4).

Q3. Citer les 4 exigences classiques qui lui sont associées.

Stabilité, Précision, Rapidité et Amortissement

Q4. Tracer les structures de Black et les formules associées pour des sommateurs $(+, -)$; $(+, +)$; $(-, -)$ et $(-, +)$.

Q5. Appliquer les 4 théorèmes classiques à la fonction $f(t) = \left(-\frac{1}{2} \cdot t^2 + 12\right) \cdot u(t)$. (retard et amortissement de votre choix).

On a $F(p) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p^2} + \frac{12}{p}$.

$$TVI \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p \cdot F(p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p^2} + \frac{12}{p} \right) = 12$$

$$TVF \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot F(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p^2} + \frac{12}{p} \right) = 0$$

$$\text{Théorème du retard } f(t - T) = \left(-\frac{1}{2} \cdot (t - T)^2 + 12 \right) \cdot u(t - T) \text{ et } \mathcal{L}(f(t - T)) = \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p^2} + \frac{12}{p} \right) \cdot e^{-T \cdot p}$$

$$\text{Théorème de l'amortissement } \mathcal{L}(f(t) \cdot e^{-a \cdot t}) = \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(p+a)^2} + \frac{12}{p+a} \right)$$

Q6. Calculer la limite à l'infini de la dérivée temporelle de f .

$$TVF \lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{f}(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \mathcal{L}(\dot{f}(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot (p \cdot F(p)) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \left(p \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p^2} + \frac{12}{p} \right) \right) = -\frac{1}{2}$$

Q7. Démontrer l'expression de la transformée de Laplace de la fonction $f(t) = \sin(\omega \cdot t) \cdot u(t)$

$$\text{Astucieusement, posons } \tilde{f}(t) = (\cos(\omega \cdot t) + i \cdot \sin(\omega \cdot t)) \cdot u(t) = e^{i \cdot \omega \cdot t} \cdot u(t)$$

$$\mathcal{L}[\tilde{f}(t)] = \tilde{F}(p) = \int_{0^-}^{+\infty} \tilde{f}(t) \cdot e^{-p \cdot t} \cdot dt = \int_{0^-}^{+\infty} e^{i \cdot \omega \cdot t} \cdot e^{-p \cdot t} \cdot u(t) \cdot dt = \int_{0^-}^{+\infty} e^{(i \cdot \omega - p) \cdot t} \cdot u(t) \cdot dt$$

$$\tilde{F}(p) = \left[\frac{e^{(i \cdot \omega - p) \cdot t}}{i \cdot \omega - p} \right]_{0^-}^{+\infty} = \frac{e^{(i \cdot \omega - p) \cdot (+\infty)}}{i \cdot \omega - p} - \frac{e^{(i \cdot \omega - p) \cdot (0^-)}}{i \cdot \omega - p} = -\frac{1}{i \cdot \omega - p} = -\frac{-i \cdot \omega - p}{(i \cdot \omega - p) \cdot (-i \cdot \omega - p)}$$

$$\tilde{F}(p) = \frac{p + i \cdot \omega}{p^2 + \omega^2}$$

$$\text{Et finalement, } \mathcal{L}(\sin(\omega \cdot t) \cdot u(t)) = \text{Im}(\tilde{F}(p)) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \text{ et } \mathcal{L}(\cos(\omega \cdot t) \cdot u(t)) = \text{Re}(\tilde{F}(p)) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

Précision et temps de réponse

Q8. Donner l'erreur statique, le gain statique et le temps de réponse à 5 % pour les tracés qui suivent et qui représentent le comportement de systèmes.

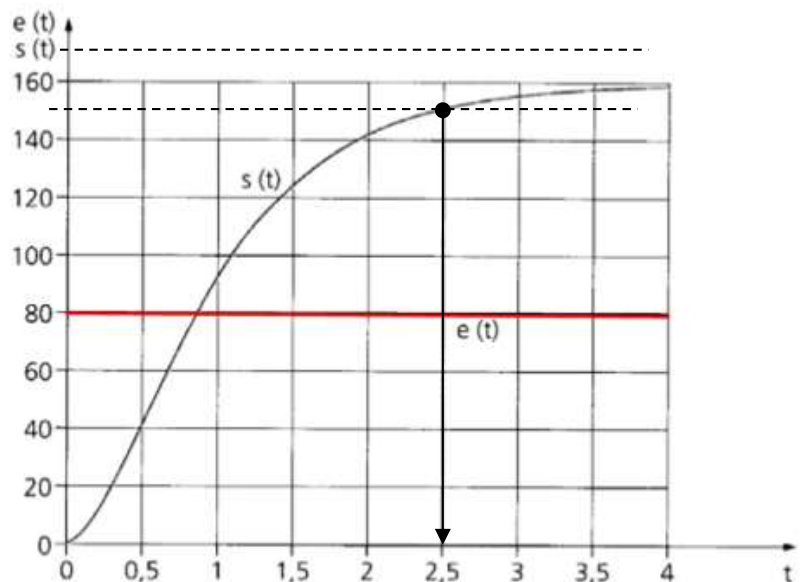
Par définition, l'erreur statique

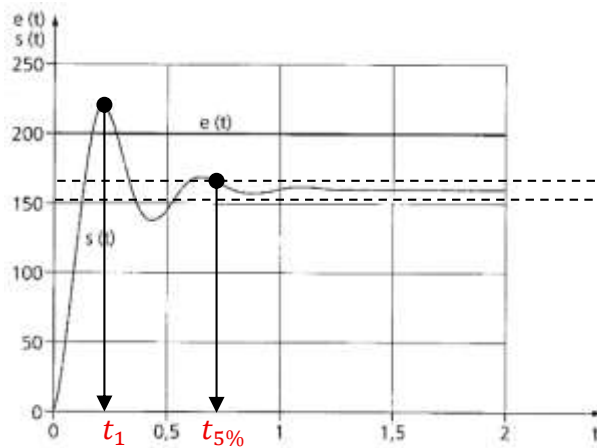
$$e_{st} = \lim_{t \rightarrow +\infty} (e(t) - s(t)) = -80$$

Ce critère (l'erreur) est associé à l'exigence de Précision.

Pour $t_{5\%}$, il faut tracer un intervalle de $\pm 5\%$ autour de $s(+\infty)$ et on lit $t_{5\%} = 2,5 \text{ s}$.

Ce critère est associé à l'exigence de Rapidité.





Cette courbe est la réponse d'un système du 2nd ordre à une entrée échelon.

$$H_{2nd}(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0} \cdot p + \frac{1}{\omega_0^2} \cdot p^2} \text{ (voir exercice 2)}$$

$$e_{st} = 200 - 160 = 40$$

$$t_{5\%} = 0,7 \text{ s}$$

On définit le premier dépassement

$$D_1 = s(t_1) - s(+\infty) = 220 - 160 = 60$$

Et le premier dépassement relatif

$$D_{1rel} = \frac{s(t_1) - s(+\infty)}{s(+\infty) - s(0)} = \frac{60}{160} = 0,375 \text{ (37,5 \%)} \text{ cette valeur dépend de } z \text{ (facteur d'amortissement).}$$

Ce critère (le dépassement) est associé à l'exigence d'Amortissement.

EXERCICE 7 : FORME CANONIQUE

Q9. Donner la forme canonique des fonctions de transfert ci-dessous et identifier leurs gains statiques, ordres et classes.

$H_1(p)$; $H_2(p)$ et $H_3(p)$ voir le TD4

$$H_4(p) = \frac{58,2 \cdot \left(p + \frac{1,1}{p}\right)}{p \cdot (p + 4) \cdot (p + 8)} = \frac{58,2 \cdot \left(p + \frac{1,1}{p}\right) \cdot p}{p \cdot (p + 4) \cdot (p + 8) \cdot p} = \frac{58,2 \cdot (p^2 + 1,1)}{32 \cdot p^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{4} \cdot p\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{8} \cdot p\right)}$$

$$H_4(p) = \frac{\frac{58,2}{32} \cdot 1,1 \cdot \left(\frac{p^2}{1,1} + 1\right)}{p^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{4} \cdot p\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{8} \cdot p\right)} = \frac{2 \cdot \left(1 + \frac{p^2}{1,1}\right)}{p^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{4} \cdot p\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{8} \cdot p\right)}$$

Gain statique = 2 ; Ordre 4 et classe 2