

DS de S.I.I n°2 Corrigé

Cycle 1 et cours C6

1. Robot MIR : Etude de l'asservissement (d'après sujet de concours)

Q1.1. Expliquer pourquoi $K_{conv} = K_{capt}$.

Dans un asservissement, la condition « l'écart doit être nul lorsque la sortie est égale à la consigne » doit être vérifiée. C'est une condition nécessaire mais pas suffisante.

Or, dans notre cas, $\varepsilon(p) = K_{conv} \cdot V_c(p) - K_{capt} \cdot V_r(p)$. On en déduit que la condition impose $K_{conv} = K_{capt}$.

Pour la suite, on pose $K_{conv} = K_{capt} = K_0$.

Q1.2. Donner l'expression de la FTBO, sans perturbation, de cet asservissement. Préciser les grandeurs d'entrée et de sortie de cette fonction. Donner sa classe et son ordre.

Par définition, $FTBO(p) = \frac{U_r(p)}{\varepsilon(p)} = C(p) \cdot H_{mot}(p) \cdot G(p) \cdot K_0$

$$FTBO(p) = \frac{K_{cor} \cdot K_m \cdot K \cdot K_0}{(1 + \tau_m \cdot p) \cdot (1 + \tau \cdot p)}$$

Classe 0 et Ordre 2

Q1.3. Exprimer $H_1(p) = \left. \frac{V_r(p)}{V_c(p)} \right|_{F_{pert}=0}$ en fonction de τ_m , τ , K , K_m , K_0 , K_{cor} et de p .

$$H_1(p) = \frac{K_0 \cdot C(p) \cdot H_{mot}(p) \cdot G(p)}{1 + K_0 \cdot H(p) \cdot H_{mot}(p) \cdot G(p)}$$

$$H_1(p) = \frac{K_0 \cdot K_{cor} \cdot K_m \cdot K}{(1 + \tau_m \cdot p) \cdot (1 + \tau \cdot p) + K_0 \cdot K_{cor} \cdot K_m \cdot K}$$

Q1.4. Exprimer $H_2(p) = \left. \frac{V_r(p)}{F_{pert}(p)} \right|_{V_c=0}$ en fonction de τ_m , τ , K , K_{cor} , K_m , K_0 et de p :

$$H_2(p) = \frac{G(p)}{1 + K_0 \cdot C(p) \cdot H_{mot}(p) \cdot G(p)}$$

$$H_2(p) = \frac{K \cdot (1 + \tau_m \cdot p)}{(1 + \tau_m \cdot p) \cdot (1 + \tau \cdot p) + K_0 \cdot K_{cor} \cdot K_m \cdot K}$$

Q1.5. Quels sont les noms des fonctions $H_1(p)$ et $H_2(p)$?

$H_1(p)$ est la fonction de transfert en poursuite (elle est associée à la consigne).

$H_2(p)$ est la fonction de transfert en régulation (elle est associée à la perturbation).

Q1.6. Donner la forme canonique de $H_2(p)$. Préciser son gain, classe et ordre.

En développant le dénominateur, $H_2(p) = \frac{K \cdot (1 + \tau_m \cdot p)}{1 + \tau_m \cdot \tau \cdot p^2 + (\tau_m + \tau) \cdot p + K_0 \cdot K_{cor} \cdot K_m \cdot K}$

Et en mettant le terme constant du dénominateur en facteur, $H_2(p) = \frac{\frac{K}{1 + K_0 \cdot K_{cor} \cdot K_m \cdot K} \cdot (1 + \tau_m \cdot p)}{\frac{\tau_m \cdot \tau}{1 + K_0 \cdot K_{cor} \cdot K_m \cdot K} \cdot p^2 + \frac{(\tau_m + \tau)}{1 + K_0 \cdot K_{cor} \cdot K_m \cdot K} \cdot p + 1}$

On en déduit, Gain : $\frac{K}{1 + K_0 \cdot K_{cor} \cdot K_m \cdot K}$; Classe : 0 ; Ordre : 2

Q1.7. Donner l'expression de $V_r(p)$ en fonction des $H_i(p)$ et des entrées.

$$V_r(p) = H_1(p) \cdot V_c(p) + H_2(p) \cdot F_{pert}(p)$$

Q1.8. On impose une consigne de vitesse $v_c(t) = v_0 \cdot u(t)$ et une perturbation $f_{pert}(t) = -m_t \cdot g \cdot \sin(\alpha) \cdot u(t)$ (avec $u(t)$ fonction échelon unitaire de Heaviside). Exprimer l'erreur statique (en fonction de l'angle α , de la vitesse v_0 et de différents gains).

Par définition, l'erreur statique $e_{stat} = \lim_{t \rightarrow +\infty} (e(t) - s(t))$ et d'après le théorème de la valeur finale, appliqué à notre système,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} (v_c(t) - v_r(t)) &= \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot (V_c(p) - V_r(p)) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \left(\frac{v_0}{p} - (H_1(p) \cdot \frac{v_0}{p} + H_2(p) \cdot \frac{-m_t \cdot g \cdot \sin(\alpha)}{p}) \right) \text{ car } F_{pert}(p) = \frac{-m_t \cdot g \cdot \sin(\alpha)}{p} \\ &= v_0 - \frac{K_0 \cdot K_{cor} \cdot K_m \cdot K}{1 + K_0 \cdot K_{cor} \cdot K_m \cdot K} \cdot v_0 + \frac{m_t \cdot \sin \alpha \cdot g}{K_0 \cdot K_{cor} \cdot K_m} \\ \text{car, } H_1(p=0) &= \frac{K_0 \cdot K_{cor} \cdot K_m \cdot K}{1 + K_0 \cdot K_{cor} \cdot K_m \cdot K} \text{ et } H_2(p=0) = \frac{1}{K_0 \cdot K_{cor} \cdot K_m} \end{aligned}$$

Finalement,
$$e_{stat} = \frac{v_0}{1 + K_0 \cdot K_{cor} \cdot K_m \cdot K} + \frac{m_t \cdot \sin \alpha \cdot g}{1 + K_0 \cdot K_{cor} \cdot K_m \cdot K}$$

Q1.9. Quel correcteur $C(p)$ aurait permis d'annuler l'erreur ? Démontrer que le correcteur que vous proposez est pertinent.

La FTBO est de classe 0, on sait (TP) qu'il est bon d'avoir une FTBO de classe 1, autrement dit avec un intégrateur.

On peut proposer un correcteur intégrateur en $C(p) = \frac{K_{cor}}{p}$.

Démonstration :

Le calcul de limite précédent devient alors,

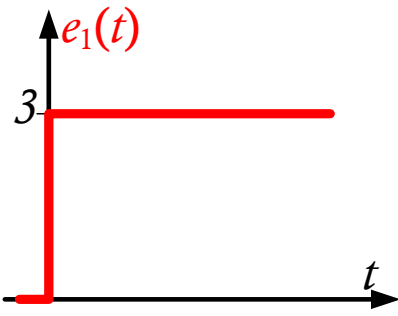
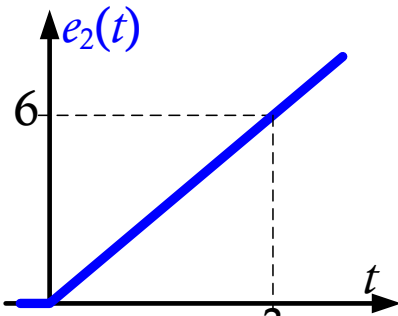
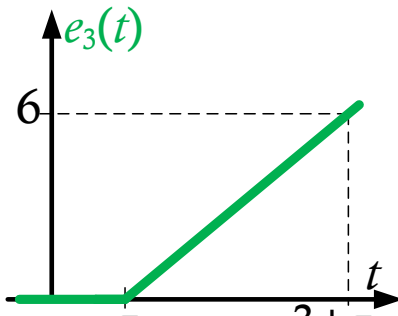
$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} (v_c(t) - v_r(t)) &= \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \left(\frac{v_0}{p} - \frac{v_0}{p} \cdot \frac{K_0 \cdot \frac{K_{cor}}{p} \cdot K_m \cdot K}{1 + K_0 \cdot \frac{K_{cor}}{p} \cdot K_m \cdot K} + \frac{\frac{m_t \cdot \sin \alpha \cdot g}{p}}{1 + K_0 \cdot \frac{K_{cor}}{p} \cdot K_m \cdot K} \right) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \left(v_0 - v_0 \frac{K_0 \cdot K_{cor} \cdot K_m \cdot K}{p + K_0 \cdot K_{cor} \cdot K_m \cdot K} + \frac{p \cdot m_t \cdot \sin \alpha \cdot g}{p + K_0 \cdot K_{cor} \cdot K_m \cdot K} \right) \end{aligned}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (v_c(t) - v_r(t)) = v_0 - v_0 \cdot 1 + 0$$

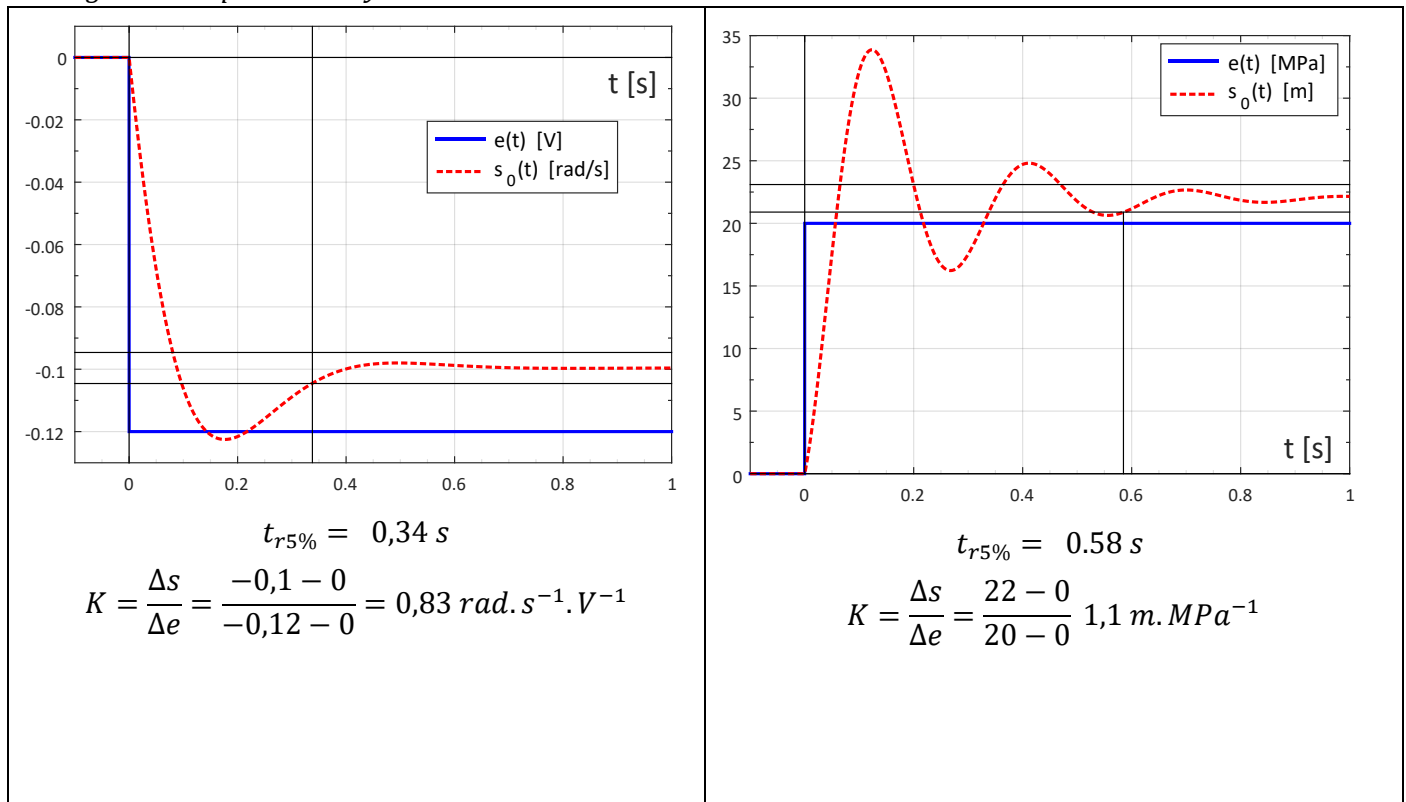
Et finalement, $e_{stat} = 0$ (conforme à la prévision)

2. Questions de cours de SLCI

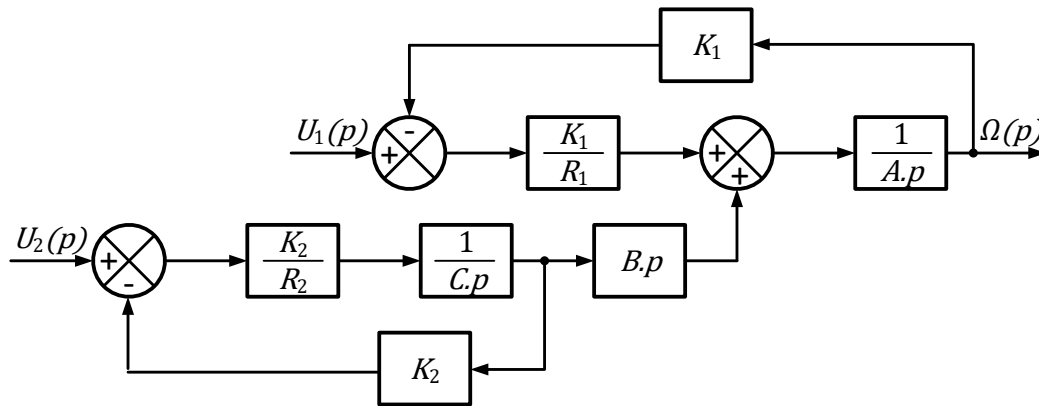
Q2.1. Pour les signaux représentés ci-dessous, donner le nom, l'expression temporelle et l'expression dans le domaine de Laplace.

		
Nom : échelon	Nom : Rampe de pente 2	Nom : Rampe de pente 2 retardée
$e_1(t) = 3 \cdot u(t)$	$e_2(t) = 2 \cdot t \cdot u(t)$	$e_3(t) = 2 \cdot (t - \tau) \cdot u(t - \tau)$
$E_1(p) = \frac{3}{p}$	$E_2(p) = \frac{2}{p^2}$	$E_3(p) = \frac{2}{p^2} \cdot e^{-\tau p}$

Q2.2. En effectuant les tracés nécessaires sur les deux courbes ci-dessous, donner les temps de réponse à 5% et les gains statiques de ces systèmes :



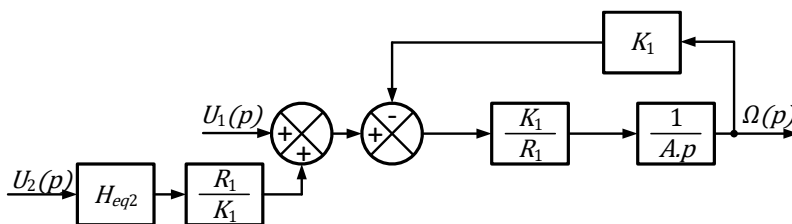
Q2.3. Donner, en indiquant vos modifications du schéma-blocs, l'expression de $\Omega(p) = H_1(p) \cdot U_1(p) + H_2(p) \cdot U_2(p)$ correspondant au schéma-blocs ci-dessous. Préciser les fonctions H_1 et H_2 .



La boucle inférieure peut être directement réduite par la formule de Black qui sera multipliée par le bloc $B \cdot p$, on a :

$$H_{eq2}(p) = \frac{\frac{K_2}{R_2} \cdot \frac{1}{C \cdot p}}{1 + K_2 \cdot \frac{K_2}{R_2} \cdot \frac{1}{C \cdot p}} \cdot B \cdot p = B \cdot p \cdot \frac{K_2}{R_2 \cdot C \cdot p + K_2^2}$$

Par ailleurs, le déplacement du sommateur (+,+) vers la gauche et la permutation des sommateurs conduisent à créer une boucle fermée et à corriger par un bloc $\frac{R_1}{K_1}$.



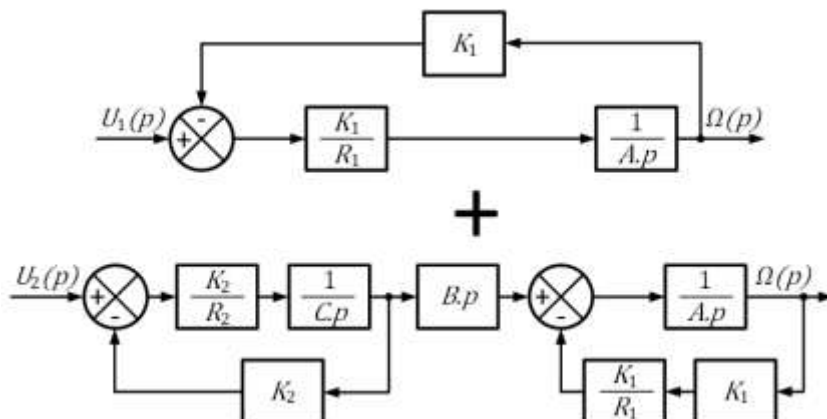
La boucle restante équivaut d'après la formule de Black à :

$$H_{eq1}(p) = \frac{K_1}{R_1 \cdot A \cdot p + K_1^2}$$

Finalement : $\Omega(p) = H_{eq1}(p) \cdot U_1(p) + H_{eq1}(p) \cdot H_{eq2}(p) \cdot \frac{R_1}{K_1} \cdot U_2(p)$

$$\Omega(p) = \frac{K_1}{R_1 \cdot A \cdot p + K_1^2} \cdot U_1(p) + \frac{B \cdot K_2 \cdot R_1 \cdot p}{(R_2 \cdot C \cdot p + K_2^2) \cdot (R_1 \cdot A \cdot p + K_1^2)} \cdot U_2(p)$$

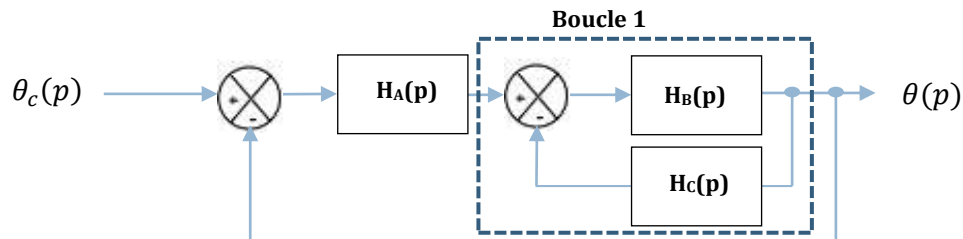
Remarque, on aurait aussi pu procéder avec le théorème de superposition en considérant successivement $U_1(p) = 0$ et $U_2(p) = 0$:



ATTENTION : $U_1(p) = 0$ ne fait pas disparaître la boucle supérieure.

3. Miroir tilt

Q3.1. Indiquer les modifications que vous proposez pour obtenir le schéma-bloc ci-dessous. Vous indiquerez l'expression des fonctions de transfert de chaque bloc.



On déplace le point de jonction $E_5(p)$ vers $\theta(p)$.

Il faut alors installer sur ce retour un bloc K_4 .

Les blocs K_4 associés à $\theta(p)$ et $\theta_c(p)$ peuvent maintenant être réunis en un seul bloc après le comparateur.

Et on aura bien un retour unitaire.

Q3.2. Indiquer l'expression des fonctions de transfert de chaque bloc.

$H_A(p) = K_4 \cdot K_1 \cdot \left(1 + \frac{1}{T_1 \cdot p}\right)$	$H_B(p) = \frac{K_2 \cdot K_3}{k + T \cdot k \cdot p + J \cdot p^2}$	$H_C(p) = K_4 \cdot K_5 \cdot (1 + T_5 \cdot p)$
---	--	--

Q3.3. Déterminer la FTBO de la boucle 1. Donner sa classe et son ordre.

$$FTBO_1(p) = H_B(p) \cdot H_C(p) = K_2 \cdot K_3 \cdot K_4 \cdot K_5 \cdot \frac{(1 + T_5 \cdot p)}{k + T \cdot k \cdot p + J \cdot p^2}$$

Classe = 0	Ordre = 2
------------	-----------

Q3.4. Déterminer la FTBF de la boucle 1 sous forme canonique. Donner sa classe et son ordre.

$$\begin{aligned} FTBF_1(p) &= \frac{H_B(p)}{1 + FTBO_1(p)} = \frac{K_2 \cdot K_3}{k + T \cdot k \cdot p + J \cdot p^2} \cdot \frac{1}{1 + K_2 \cdot K_3 \cdot K_4 \cdot K_5 \cdot \frac{(1 + T_5 \cdot p)}{k + T \cdot k \cdot p + J \cdot p^2}} \\ &= \frac{K_2 \cdot K_3}{k + T \cdot k \cdot p + J \cdot p^2 + K_2 \cdot K_3 \cdot K_4 \cdot K_5 \cdot (1 + T_5 \cdot p)} \end{aligned}$$

$$= \frac{K_2 \cdot K_3}{k + K_2 \cdot K_3 \cdot K_4 \cdot K_5 + (T \cdot k + K_2 \cdot K_3 \cdot K_4 \cdot K_5 \cdot T_5) \cdot p + J \cdot p^2}$$

$$= \frac{\frac{K_2 \cdot K_3}{k + K_2 \cdot K_3 \cdot K_4 \cdot K_5}}{1 + \frac{T \cdot k + K_2 \cdot K_3 \cdot K_4 \cdot K_5 \cdot T_5}{k + K_2 \cdot K_3 \cdot K_4 \cdot K_5} \cdot p + \frac{J}{k + K_2 \cdot K_3 \cdot K_4 \cdot K_5} \cdot p^2}$$

Classe = 0

Ordre = 2

L'équation est du 2nd ordre et sa forme canonique est $H_{2nd}(p) = \frac{\theta(p)}{\theta_c(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2}$.

Les constantes caractéristiques d'un second ordre sont K (gain statique), z (facteur d'amortissement) et ω_0 (pulsation propre non amortie)

Q3.5. Donner l'expression de ces constantes caractéristiques.

Gain statique K :	Pulsation propre ω_0 :	Facteur d'amortissement :
$K = \frac{K_2 \cdot K_3}{k + K_2 \cdot K_3 \cdot K_4 \cdot K_5}$	On a $\frac{1}{\omega_0^2} = \frac{J}{k + K_2 \cdot K_3 \cdot K_4 \cdot K_5}$ Et, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k + K_2 \cdot K_3 \cdot K_4 \cdot K_5}{J}}$	On a $\frac{2z}{\omega_0} = \frac{T \cdot k + K_2 \cdot K_3 \cdot K_4 \cdot K_5 \cdot T_5}{k + K_2 \cdot K_3 \cdot K_4 \cdot K_5}$ $z = \frac{T \cdot k + K_2 \cdot K_3 \cdot K_4 \cdot K_5 \cdot T_5}{k + K_2 \cdot K_3 \cdot K_4 \cdot K_5} \cdot \frac{\omega_0}{2}$ Et, $z = \frac{T \cdot k + K_2 \cdot K_3 \cdot K_4 \cdot K_5 \cdot T_5}{2 \cdot \sqrt{J \cdot (k + K_2 \cdot K_3 \cdot K_4 \cdot K_5)}}$

4. Questions de cours de cinématique du solide

Q4.1. Calculs élémentaires (figure 3.1)

Donner l'expression de $\vec{y}_2$ dans la base B_1 :	Donner l'expression de $\vec{x}_3$ dans la base B_4 :
$\vec{y}_2 = -\sin(\alpha) \cdot \vec{x}_1 + \cos(\alpha) \cdot \vec{y}_1$	$\vec{x}_3 = \cos(\theta) \cdot \vec{x}_4 + \sin(\theta) \cdot \vec{z}_4$
Donner l'expression de $\vec{x}_3$ dans la base B_1 :	Donner l'expression de $\vec{x}_1$ dans la base B_3 :
$\vec{x}_3 = \cos(\beta) \cdot (\cos(\alpha) \cdot \vec{x}_1 + \sin(\alpha) \cdot \vec{y}_1) - \sin(\beta) \cdot \vec{z}_1$	$\vec{x}_1 = \cos(\beta) \cdot \cos(\alpha) \cdot \vec{x}_3 - \sin(\alpha) \cdot \vec{y}_3 + \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha) \cdot \vec{z}_3$

Calculer le produit scalaire $\vec{x}_1 \cdot \vec{y}_2$: $\vec{x}_1 \cdot \vec{y}_2 = -\sin(\alpha)$	Calculer le produit vectoriel $\vec{x}_1 \wedge \vec{y}_2$: $\vec{x}_1 \wedge \vec{y}_2 = \cos(\alpha) \cdot \vec{z}_1$
Calculer le produit scalaire $\vec{y}_1 \cdot \vec{z}_4$: $\vec{y}_1 \cdot \vec{z}_4 = \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta + \theta)$	Calculer le produit vectoriel $\vec{y}_4 \wedge \vec{y}_2$: $\vec{y}_4 \wedge \vec{y}_2 = \vec{0}$
Calculer le produit scalaire $\vec{y}_3 \cdot \vec{x}_2$: $\vec{y}_3 \cdot \vec{x}_2 = 0$	Calculer le produit vectoriel $\vec{z}_4 \wedge \vec{y}_1$: (résultat dans la base B_4) $\vec{z}_4 \wedge \vec{y}_1 = -\cos(\alpha) \cdot \vec{x}_4 + \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta + \theta) \cdot \vec{y}_4$

Q4.2. Tableau des liaisons

Compléter le tableau. VOIR LE COURS C6