C6 – Chaîne cinématique ou articulée : de la matière d'œuvre aux consignes de pilotage des actionneurs : paramétrage des mouvements

Compétences attendues :
Notion de **repère orthonormé direct**
Notion de **repère lié** à un solide
Paramétrer un mouvement de rotation ou de translation
Lien entre la cinématique et certaines fonctions de la chaîne d'énergie
Connaître les **liaisons normalisées** (nom, ***degré de liberté***, **représentation graphique 2D et 3D**)
Lire un **schéma cinématique** (Classes d'équivalences cinématique (CEC), axes, points particuliers, liaisons normalisées) *: la construction des schémas sera faite en Cycle 3 : Consolidation-Expérimentation*
Construire un **graphe de liaison**
Construire une **figure de projection** d'une base par rapport à une autre base
Changer de bases les coordonnées d'un vecteur
Maîtriser les **produits scalaire et vectoriel**

1 BUT DU COURS DE CINÉMATIQUE (C7 A C9)

*Maîtriser les **modélisations et les démarches** permettant d'obtenir la **loi d'entrée-sortie** (Loi E/S) d'une chaîne de solides reliant, classiquement, l'actionneur (mvt d'entrée) à l'effecteur (mvt de sortie).*

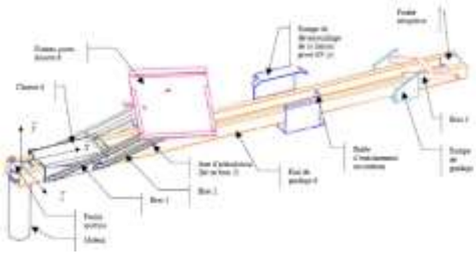
2 EXEMPLES ET PROCÉDURES

2.1 Cooksee

Structure de la chaîne cinématique avec son actionneur (Moteur électrique)

Cette chaîne cinématique fait partie du robot (Cooksee voir DS1) fabriquant des pizzas. Le plateau porte-dosette (6) déplace les dosettes (selon le choix du client) de la zone de réfrigération (froide) vers la zone de préparation et de cuisson (chaude).

Dans ce cas, la relation cinématique entre le mouvement de sortie (translation du chariot 4/0) et le mouvement d'entrée (rotation du moteur 7/0) est simple. On a $\boldsymbol{v_{4/0}(t) = K_{réd}.K_{pc}.\omega_{7/0}(t)}$.



2.2 Robot MOTOMAN ROBOTICS et procédures

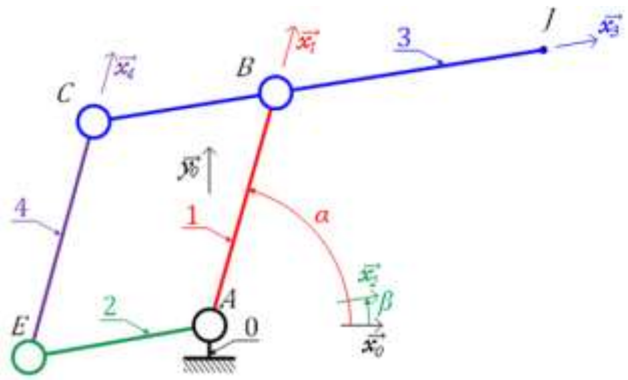
Détermination des lois de commande des moteurs M1 et M2 pour que le point J (extrémité du bras du robot) suive une trajectoire imposée,

$$\left\{\begin{matrix} y_J = 0 \\ 0,95 \ \le \ x_J \ \le 2,09\ (croissant) \end{matrix}\right\} \ \boldsymbol{pour}\ 0 \le \ t \ \le 1\ s$$ (Le point A est l'origine des mesures en mètre).

Après calcul, on trouve les vitesses de rotation $\dot{\alpha}$ (moteur $M1$) et $\dot{\beta}$ (moteur $M2$) pour $\boldsymbol{\dot{x}_J}$ ***connue (parabolique).***

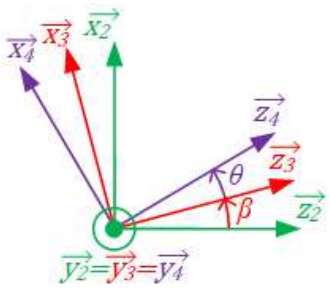
① Structure réelle

② Schéma cinématique minimal (modèle) ou graphe de liaisons (§5)

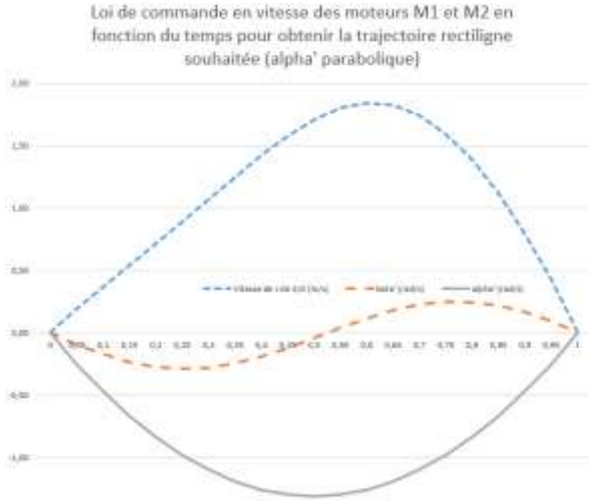


Seuls les **solides principaux** apparaissent dans le schéma cinématique. Ce sont les **classes d'équivalences cinématique** (CEC) qui regroupent pour chaque solide principal, les composants (vis, palier, …) qui y sont fixés.

*③ Répères locaux associés à chaque CEC et **figures planes***



④ Démarches et résultats des calculs

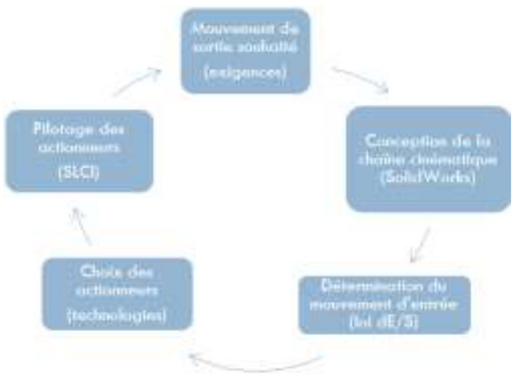


Remarque 1 : les figures planes définissent les paramètres des mouvement $(\theta(t), \beta(t), \lambda(t), \dots)$

Remarque 2 : La cinématique est à associer avec la fonction ADAPTER-TRANSMETTRE de la chaîne fonctionnelle.

Remarque 3 : Le choix de la chaîne cinématique et de ses actionneurs est réalisé lors de la conception des systèmes. On doit évaluer les actions mécaniques (abordées en C2 (PFD) mais formalisées rigoureusement en C13) nécessaires pour mettre en mouvement la structure.

Remarque 4 : Etapes de conception :



3 SCHÉMA CINÉMATIQUE ET PARAMÉTRAGE DES MOUVEMENTS

3.1 Schéma cinématique normalisé

L'outil de communication **normalisé** est le **schéma cinématique minimal**. Il fait apparaître des **liaisons mécaniques normalisées** entre les CEC constitutifs du mécanisme qui renseignent sur les **mobilités (ou degré de liberté)** possibles entre ces CEC. Chaque CEC est numéroté et des repères permettent de définir rigoureusement les axes des mouvements. Par ailleurs, il est accompagné de **figures géométriques planes** pour préciser les **paramètres de mouvement** (angle ou longueur).

3.2 Paramètres de mouvement (en position ou/et en vitesse)

Deux solides sans lien entre eux possèdent 6 mouvements indépendants possibles (3 translations et 3 rotations selon les axes d'un espace 3D) tel l'avion en vol par rapport à la terre.

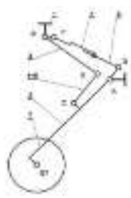
On parle de **degré de liberté** (DDL).

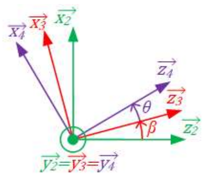
S'il y a une liaison, les degrés de liberté sont moindres :

- pour la liaison *pivot* de 2/4 d'axe $(B, \vec{z})$ il n'y a que *1 degré de liberté*, la rotation de 2/4 selon $(B, \vec{z})$ qui est paramétrée parla position angulaire $\theta_{2/4}$. Mais nous utiliserons aussi les paramètres de vitesse $\omega_{2/4} = \dot{\theta}_{2/4}$ en particulier dans le torseur cinématique ;

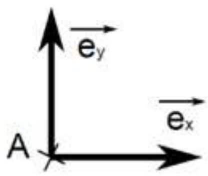
- pour la liaison *glissière* de 4/0 de direction $\vec{x}$ il n'y a que *1 degré de liberté*, la translation de 4/0 selon $\vec{x}$ qui est paramétrée par la position linéaire $x_{4/0}$. Mais nous utiliserons aussi les paramètres de vitesse $v_{4/0} = \dot{x}_{4/0}$ en particulier dans le torseur cinématique.

3.3 Repère local associé à un solide (ou CEC) et paramétrage des mobilités





Un **repère** est l'association d'un **point origine** des longueurs dans l'espace et d'une **base orthonormée directe** indiquant les directions de l'espace (2D ou 3D).

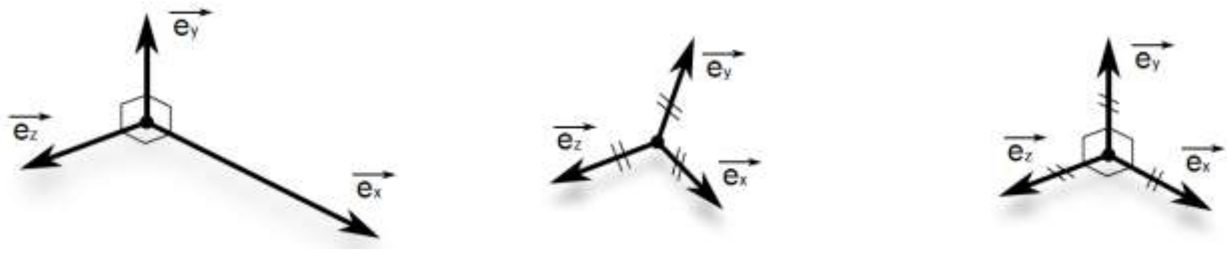


3.3.1 Définition d'une base orthonormée directe (b.o.n.d)

Une **base** est une combinaison de deux ou trois vecteurs linéairement indépendants respectivement pour les représentations planes ou de l'espace (définition simplifiée d'une base d'un espace vectoriel). On la notera par exemple : $\mathcal{B} = (\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$

Une base est dite :

- **Orthogonale** si : $\vec{e_x} \perp \vec{e_y} \perp \vec{e_z} \perp \vec{e_x}$
- **Normée** si : $\|\vec{e_x}\| = \|\vec{e_y}\| = \|\vec{e_z}\| = 1$
- **Orthonormée** si elle est orthogonale et normée
- **Directe** si le trièdre $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ est direct (voir détails ci-dessous)

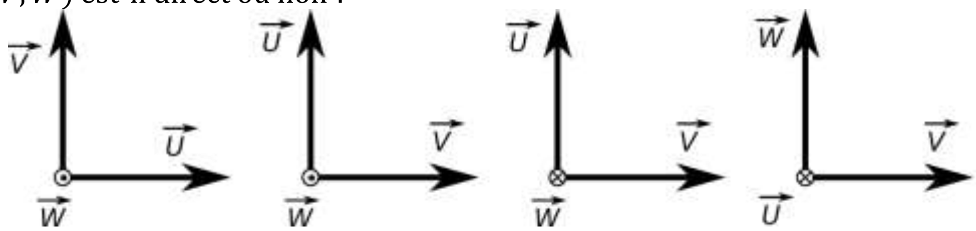


Pour savoir si $(\vec{U},\vec{V},\vec{W})$ est direct, il existe plusieurs méthodes :

- Si le 1er vecteur pointe vers nous, les deux autres vecteurs dans l'ordre sont dans le sens direct
- On peut utiliser la règle du *trièdre direct avec la main droite* (aussi appelée de la *vis* ou du *tire-bouchon*) : si on représente respectivement $\vec{U}$, $\vec{V}$ et $\vec{W}$ par le pouce, l'index et le majeur de la main droite tels que représenté sur la figure ci-dessous, alors le trièdre est direct.

$$(①, ②, ③) = (\vec{U},\vec{V},\vec{W})$$
$$(\vec{W},\vec{U},\vec{V})$$
$$(\vec{V},\vec{W},\vec{U})$$

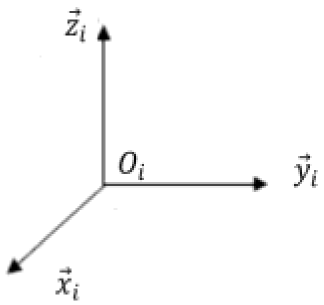
Exemples : $(\vec{U},\vec{V},\vec{W})$ est-il direct ou non ?

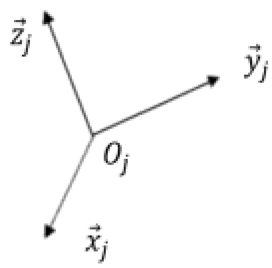


Sens direct Sens indirect Sens direct Sens indirect

3.3.2 Mouvements relatifs entre deux repères ou degré de liberté (ddl)

Soient deux solides en mouvements, on ne pourra définir que 6 degrés de liberté au maximum entre leurs repères associés. Ces 6 fonctions servent à positionner *le repère $\mathcal{R}_j$ par rapport au repère $\mathcal{R}_i$* .





3 degrés de liberté en translation nécessitant 3 paramètres pour positionner un *point du repère $\mathcal{R}_j$ par rapport* à *un point du repère $\mathcal{R}_i$*: $\overrightarrow{O_iO_j} = \boldsymbol{x_{j/i}}(t).\vec{x}_i + \boldsymbol{y_{j/i}}(t).\vec{y}_i + \boldsymbol{z_{j/i}}(t).\vec{z}_i$ On utilisera fréquemment un vecteur composé de points fixes respectivement de $\mathcal{R}_i$ *et de* $\mathcal{R}_j$. Remarque : on définira le vecteur vitesse de déplacement d'un point $A \in \mathcal{R}_j$ *par rapport* à $\mathcal{R}_i$: $\overrightarrow{V(A \in j/i)} = V_{xj/i}(t).\vec{x}_i + V_{yj/i}(t).\vec{y}_i + V_{zj/i}(t).\vec{z}_i$	**3 degrés de liberté en rotation** nécessitant 3 paramètres pour positionner *la base $\mathcal{B}_j$ par rapport* à *la base $\mathcal{B}_i$* : $\boldsymbol{\theta_{xj/i}}(t)$ *rotation selon* $\vec{x}_i$ *de $\mathcal{B}_j$ par rapport* $\mathcal{B}_i$ $\boldsymbol{\theta_{yj/i}}(t)$ *rotation selon* $\vec{y}_i$ *de $\mathcal{B}_j$ par rapport* $\mathcal{B}_i$ $\boldsymbol{\theta_{zj/i}}(t)$ *rotation selon* $\vec{z}_i$ *de $\mathcal{B}_j$ par rapport* $\mathcal{B}_i$ Remarque : on définira le vecteur vitesse de rotation de *la base $\mathcal{B}_j$ par rapport* à *la base $\mathcal{B}_i$* : $\overrightarrow{\Omega_{j/i}} = \omega_{xj/i}(t).\vec{x}_i + \omega_{yj/i}(t).\vec{y}_i + \omega_{zj/i}(t).\vec{z}_i$

3.3.3 Composantes d'un vecteur

Dans la base $\mathcal{B} = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, de l'espace, il existe 3 réels x, y et z, appelées composantes du vecteur $\vec{V}$, tels que l'on puisse écrire de façon unique :

$$\vec{V} = x.\vec{x} + y.\vec{y} + z.\vec{z} \qquad \rightarrow \text{notation en ligne}$$

$$= \underset{\mathcal{B}}{\left|\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}\right.} \qquad \rightarrow \text{notation en colonne (indiquer la base)}$$

Attention à ne pas confondre x et $\vec{x}$: x est la composante du vecteur $\vec{V}$ suivant la direction $\vec{x}$.
Ces coordonnées sont souvent des fonctions du temps $(x(t); \dots)$ que nous aurons à dériver. Aussi, la base pertinente pour exprimer les composantes d'un vecteur est celle qui **minimise la quantité de calculs**.

4 LIAISONS NORMALISÉES D'UN SOLIDE REPÉRÉ PAR R_j EN LIAISON AVEC UN AUTRE SOLIDE REPÉRÉ PAR R_i

Pour modéliser les mouvements entre deux solides, il faut deux vecteurs, regroupés dans un **torseur**.
Voir le tableau en Annexe qui est à connaître par cœur.

$$\{\mathcal{V}(j/i)\} = \left\{\begin{matrix} \vec{\Omega}_{j/i} = \omega_{xj/i}.\vec{x}_i + \omega_{yj/i}.\vec{y}_i + \omega_{zj/i}.\vec{z}_i \\ \overrightarrow{V(A \in j/i)} = V_{xj/i}.\vec{x}_i + V_{yj/i}.\vec{y}_i + V_{zj/i}.\vec{z}_i \end{matrix}\right\} = \underset{A}{\left\{\begin{matrix} \omega_{xj/i} & V_{xj/i} \\ \omega_{yj/i} & V_{yj/i} \\ \omega_{zj/i} & V_{zj/i} \end{matrix}\right\}}_{\mathcal{B}_i}$$

Remarque : entre deux points d'un repère, la relation de Varignon (démontrée en **C7**) :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{V(B \in j/i)}} = \overrightarrow{\boldsymbol{V(A \in j/i)}} + \overrightarrow{\boldsymbol{BA}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{\Omega_{j/i}}}$$

Pour faire ce calcul, nous aurons besoin *d'exprimer un vecteur dans une base quelconque et de faire des produits scalaires et vectoriels.*

4.1 Expression d'un vecteur d'une base dans une autre base

La réalisation des **figures de projection** (ou figures géométrales) est une étape préalable indispensable à toute étude de mécanique du solide. Elles font apparaître les paramètres de mouvements entre les différentes bases associées aux différents solides d'un mécanisme (on parle de **paramétrage du mécanisme**).

1. Pour éviter toute erreur de calcul, nous réaliserons des figures planes avec un angle **positif** et **petit** (autour de **+15°** par exemple). Pour réaliser ces figures planes, nous commencerons toujours par tracer le vecteur commun aux 2 bases **sortant de la feuille**, puis nous placerons les autres vecteurs de façon à obtenir des trièdres directs.
2. Les *textes* des énoncés nous donnent des informations. Mais nous ne tiendrons JAMAIS COMPTE :
   - du schéma réalisé dans une position particulière…
   - de la valeur algébrique des angles (120°, -36°, 85°…).

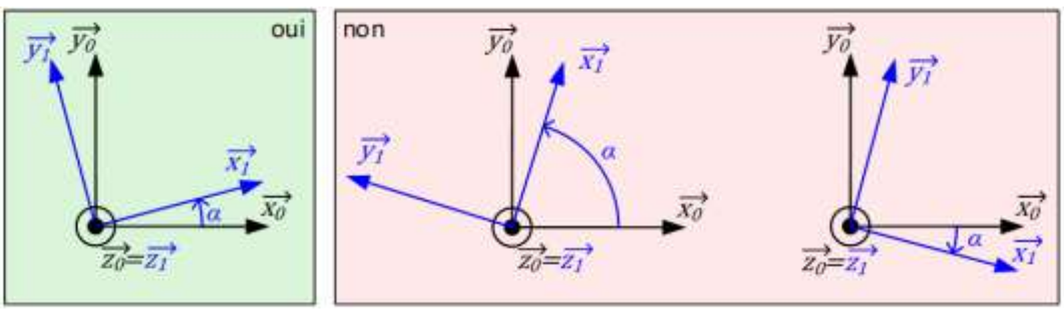


Figure : à gauche la représentation à adopter. Les deux autres sont équivalentes mais nécessitent plus de précautions lors des projections, à éviter donc.

3. Nous nous retrouverons donc toujours avec une figure de projection de cet aspect (voir ci-dessus), dans laquelle 4 projections sont à connaître :

$$\begin{aligned} \vec{x_1} &= \cos\alpha\,.\,\vec{x_0} + \sin\alpha\,.\,\vec{y_0} \\ \vec{y_1} &= -\sin\alpha\,.\,\vec{x_0} + \cos\alpha\,.\,\vec{y_0} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \vec{x_0} &= \cos\alpha\,.\,\vec{x_1} - \sin\alpha\,.\,\vec{y_1} \\ \vec{y_0} &= \sin\alpha\,.\,\vec{x_1} + \cos\alpha\,.\,\vec{y_1} \end{aligned}$$

Nous pouvons vérifier facilement que nos projections fonctionnent pour toutes les valeurs algébriques de α. Prenons par exemple les cas particuliers où $\alpha = 0°, 90°, 180°$ et $-90°$.

Pour tracer une figure plane, trois étapes :

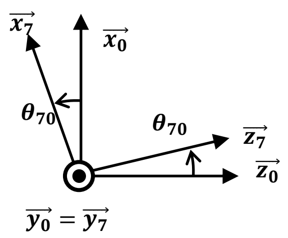
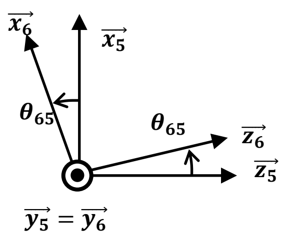
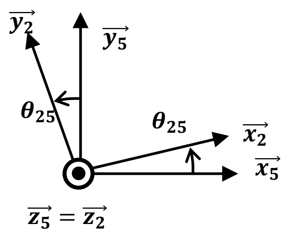
1. Tracer le vecteur invariant perpendiculairement et sortant de la feuille
2. Tracer les deux autres vecteurs de la première base pour que le trièdre soit direct
3. Tracer la seconde base avec l'angle de rotation (positif et d'environ 15°)

Application : CookSee

On donne les liaisons suivantes,

- Liaison pivot de 7/0 d'axe $(A', \vec{y_0})$ de paramètre $\theta_{70} = (\vec{x_0}, \vec{x_7})$
- Liaison pivot de 6/5 d'axe $(O', \vec{y_5})$ de paramètre $\theta_{65} = (\vec{z_5}, \vec{z_6})$
- Liaison pivot de 2/5 d'axe $(B', \vec{z_2})$ de paramètre $\theta_{25} = (\vec{y_5}, \vec{y_2})$

Donner les figures de projections ou figures planes de ces trois rotations.

Calculer les projections qui suivent :

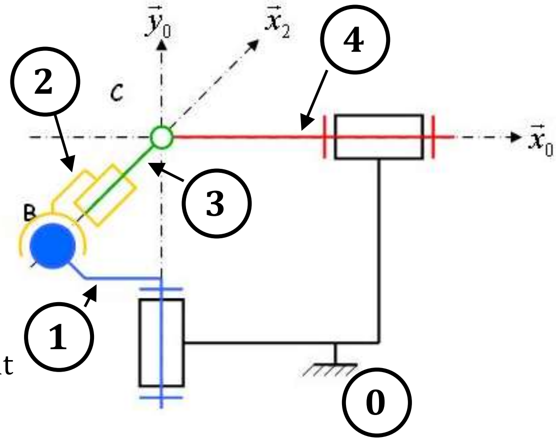
$\vec{x_0}$ *dans* B_7	$\vec{x_7}$ *dans* B_0	$\vec{y_2}$ *dans* B_5
$\vec{x_0} = \cos(\theta_{70})\,.\,\vec{x_7} + \sin(\theta_{70})\,.\,\vec{z_7}$	$\vec{x_7} = \cos(\theta_{70})\,.\,\vec{x_0} - \sin(\theta_{70})\,.\,\vec{z_0}$	$\vec{y_2} = \cos(\theta_{25})\,.\,\vec{y_5} - \sin(\theta_{25})\,.\,\vec{x_5}$

$\vec{x_2}$ *dans* B_6	$\vec{z_6}$ *dans* B_2
$\vec{y_2} = \cos(\theta_{25})\,.\,\vec{y_5} - \sin(\theta_{25})\,.\,\vec{x_5}$ $\vec{y_2} = \cos(\theta_{25})\,.\,\vec{y_6} - \sin(\theta_{25})\,.\,[\cos(\theta_{65})\,.\,\vec{x_6} + \sin(\theta_{65})\,.\,\vec{z_6}]$ Finalement, $\vec{y_2} = -\sin(\theta_{25})\,.\,\cos(\theta_{65})\,.\,\vec{x_6} + \cos(\theta_{25})\,.\,\vec{y_6} - \sin(\theta_{25})\,.\,\sin(\theta_{65})\,.\,\vec{z_6}$	$\vec{z_6} = \cos(\theta_{65})\,.\,\vec{z_5} + \sin(\theta_{65})\,.\,\vec{x_5}$ $\vec{z_6} = \cos(\theta_{65})\,.\,\vec{z_2} + \sin(\theta_{65})\,.\,[\cos(\theta_{25})\,.\,\vec{x_2} - \sin(\theta_{25})\,.\,\vec{y_2}]$ Finalement, $\vec{y_2} = \sin(\theta_{65})\,.\,\cos(\theta_{25})\,.\,\vec{x_2} - \sin(\theta_{65})\,.\,\sin(\theta_{25})\,.\,\vec{y_2} + \cos(\theta_{65})\,.\,\vec{z_2}$

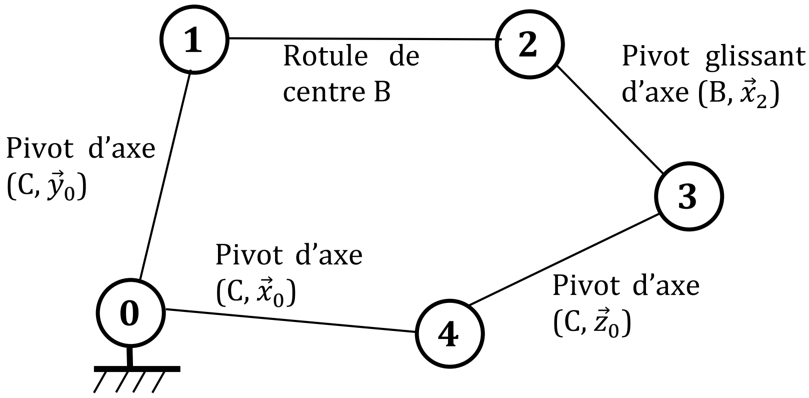
Méthode

- Soit les bases B_i *et* B_j sont liées ⟶ projection directe
- Soit les bases B_i *et* B_j sont séparées ⟶ utiliser une base intermédiaire B_k liée aux bases B_i *et* $B_j (B_i \longrightarrow B_k \longrightarrow B_j)$.

5 GRAPHE DES LIAISONS



Une manière plus simple, mais plus abstraite que le schéma cinématique, de représenter la cinématique d'un mécanisme est le graphe des liaisons.
Les **solides** sont représentés **par des cercles numérotés** et les **liaisons par des arcs** reliant les solides présentant une ou plusieurs liaisons mécaniques entre eux. C'est un outil très utile qu'il faut précisément renseigner.
Application : Mécanisme de barrière

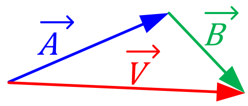


On voit qu'un petit nombre d'informations géométriques peut être suffisant pour definir des liaisons.

6 AUTRES OPÉRATIONS SUR LES VECTEURS (SCALAIRE, VECTORIEL ET MIXTE)

Soient deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$: $\vec{A} = x_A.\vec{x} + y_A.\vec{y} + z_A.\vec{z}$ et $\vec{B} = x_B.\vec{x} + y_B.\vec{y} + z_B.\vec{z}$

1.1. Somme

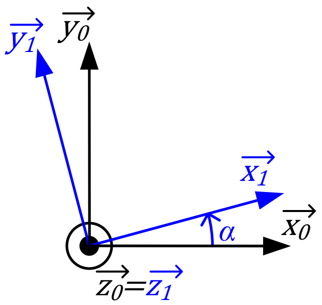


$$\vec{V} = \vec{A} + \vec{B} = (x_A + x_B).\vec{x} + (y_A + y_B).\vec{y} + (z_A + z_B).\vec{z}$$

	1.2. Produit scalaire	1.3. Produit vectoriel
Définition	Le résultat du produit scalaire de 2 vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ est un scalaire tel que : $\vec{A}.\vec{B} = \lVert\vec{A}\rVert.\lVert\vec{B}\rVert.\cos(\vec{A},\vec{B})$ Ce nombre peut être positif ou négatif.	Le résultat du produit vectoriel, noté ∧, de 2 vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ est un vecteur $\vec{V} = \vec{A}_\wedge\vec{B}$: 1. De direction perpendiculaire au plan $(\vec{A},\vec{B})$ 2. De norme $\lVert\vec{V}\rVert = \lVert\vec{A}\rVert.\lVert\vec{B}\rVert.\lvert\sin(\vec{A},\vec{B})\rvert$ 3. Tel que le trièdre $(\vec{A},\vec{B},\vec{V})$ soit direct (définit le sens de $\vec{V}$)
Remarque	$\vec{A}.\vec{B} = 0 \implies \begin{cases} \text{soit} \quad \vec{A} = \vec{0} \\ \text{soit} \quad \vec{B} = \vec{0} \\ \text{soit} \cos(\vec{A},\vec{B}) = 0 \Rightarrow \vec{A} \perp \vec{B} \end{cases}$	$\vec{A}_\wedge\vec{B} = \vec{0} \implies \begin{cases} \text{soit} \quad \vec{A} = \vec{0} \\ \text{soit} \quad \vec{B} = \vec{0} \\ \text{soit} \sin(\vec{A},\vec{B}) = 0 \Rightarrow \vec{A}//\vec{B} \end{cases}$
Propriétés	$\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$ $\vec{A}.(\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A}.\vec{B} + \vec{A}.\vec{C}$	$\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A}$ $\vec{A} \wedge (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \vec{C}$
Autre	Si $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont dans la même base, alors : $\vec{A}.\vec{B} = x_A.x_B + y_A.y_B + z_A.z_B$	Double produit vectoriel (formule de Gibbs) : $\vec{A}_\wedge(\vec{B}_\wedge\vec{C}) = \vec{B}_\wedge(\vec{A}.\vec{C}) - \vec{C}_\wedge(\vec{A}.\vec{B})$

En pratique pour les calculs vectoriels, on se ramènera **toujours** à des calculs entre des vecteurs de **bases.**

Pour déterminer un produit scalaire ou un produit vectoriel, 3 cas sont envisageables :

<table>
<tr><th>calculs entre des vecteurs de base</th><th>Exemples pour le produit scalaire</th><th>Exemples pour le produit vectoriel</th></tr>
<tr><td>1^{ier} cas : les deux vecteurs sont exprimés dans la même base</td><td>$\vec{x}.\vec{y} = 0$
$\vec{y}.\vec{z} = 0$
$\vec{z}.\vec{x} = 0$
$\vec{x}.\vec{x} = 1$
$\vec{y}.\vec{y} = 1$
$\vec{z}.\vec{z} = 1$</td><td>L'ordre des vecteurs dans une base directe est :
$\vec{x},\vec{y},\vec{z},\vec{x},\vec{y},\vec{z},\vec{x},\ldots$
Sens direct :
$\vec{x}\wedge\vec{y} = \vec{z}$
$\vec{y}\wedge\vec{z} = \vec{x}$
$\vec{z}\wedge\vec{x} = \vec{y}$
Sens indirect :
$\vec{y}\wedge\vec{x} = -\vec{z}$
$\vec{z}\wedge\vec{y} = -\vec{x}$
$\vec{x}\wedge\vec{z} = -\vec{y}$
$\vec{x}\wedge\vec{x} = \vec{y}\wedge\vec{y} = \vec{z}\wedge\vec{z} = \vec{0}$</td></tr>
<tr><td>2^{ième} cas : les 2 vecteurs sont définis dans la même figure plane :

</td><td>$\vec{x_0}.\vec{x_1} = \vec{x_1}.\vec{x_0} = \cos\alpha$
$\vec{y_0}.\vec{y_1} = \vec{y_1}.\vec{y_0} =$
$\vec{x_0}.\vec{y_1} = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$
$= -\sin\alpha$
$\vec{y_0}.\vec{x_1} = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$
$= +\sin\alpha$</td><td>$\vec{x_0}\wedge\vec{x_1} = \underbrace{+\vec{z_0}}_{vecteur\ directeur} . \underbrace{\sin\alpha}_{\sin de\ l'angle} =$
$\vec{y_0}\wedge\vec{y_1} = \underbrace{+\vec{z_0}}_{vecteur\ directeur} . \underbrace{\sin\alpha}_{\sin de\ l'angle} =$
$\vec{x_1}\wedge\vec{x_0} = \underbrace{-\vec{z_0}}_{vecteur\ directeur} . \underbrace{\sin\alpha}_{\sin de\ l'angle} =$
$\vec{x_0}\wedge\vec{y_1} = \underbrace{+\vec{z_0}}_{vecteur\ directeur} . \underbrace{\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)}_{\sin de\ l'angle} = \cos(\alpha)\ .\vec{z_0}$
$\vec{y_0}\wedge\vec{x_1} = \underbrace{-\vec{z_0}}_{vecteur\ directeur} . \underbrace{\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)}_{\sin de\ l'angle} = -\cos(\alpha)\ .\vec{z_0}$</td></tr>
<tr><td>3^{ième} cas : les vecteurs ne sont :
ni exprimés dans la même base
ni définis dans la même figure plane</td><td colspan="2">Il est nécessaire de projeter l'un des 2 vecteurs pour se rapporter à un des 2 cas précédents.

NB : c'est la SEULE et UNIQUE situation où il est nécessaire d'effectuer des projections</td></tr>
</table>

1.4. Produit mixte

Définition : le produit mixte des 3 vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$ est un scalaire noté $(\vec{A},\vec{B},\vec{C})$, tel que :

$$(\vec{A},\vec{B},\vec{C}) = \vec{A}.(\vec{B}\wedge\vec{C})$$

Propriétés :

- permutation non circulaire de 2 vecteurs = changement de signe : $(\vec{A},\vec{B},\vec{C}) = -(\vec{B},\vec{A},\vec{C})$
- permutation circulaire de 2 vecteurs = pas de changement : $(\vec{A},\vec{B},\vec{C}) = (\vec{B},\vec{C},\vec{A}) = (\vec{C},\vec{A},\vec{B})$