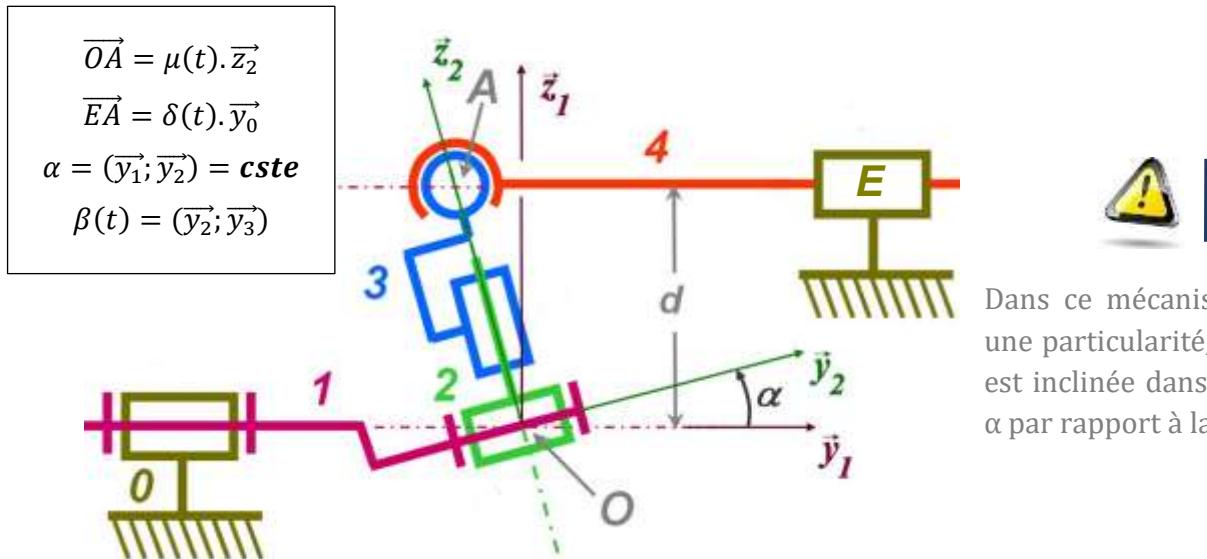


1. Mécanisme de transformation de mouvement



Figures de projections :

Classiques : définition directe de tous les paramètres indépendamment du schéma cinématique. Les figures de rotations donnent accès aux $\vec{\Omega}_{i/j}$.

Attention, il faut représenter $\overrightarrow{EA} = \delta(t) \cdot \overrightarrow{y_0}$ de façon directe ($\delta(t) > 0$)



Mouvement de 2/3

Torseur associé :

Pivot glissant d'axe $(O, \overrightarrow{z_2})$

$$\{\mathcal{V}2/3\} : \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\dot{\beta} & -\dot{\mu} \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}_2}$$

Il est plus simple de déterminer $\{\mathcal{V}(3/2)\}$

Par exemple,

$$\overrightarrow{V(A \in 3/2)} = \frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_2} = \dot{\mu}(t) \cdot \overrightarrow{z_2}$$

Puis d'écrire $\{\mathcal{V}(2/3)\} = -\{\mathcal{V}(3/2)\}$

(astuce classique)

Mouvement de 4/3

Torseur associé :

Rotule de centre A

$$\{\mathcal{V}4/3\} : \begin{Bmatrix} \omega_{x43} & 0 \\ \omega_{y43} & 0 \\ \omega_{z43} & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}_0}$$

ω_{x43}, \dots car ces paramètres ne sont pas définis dans l'énoncé.

Mais ils ne seront grâce à l'écriture d'équations scalaires issues de la composition des vitesses (voir l'exemple suivant)

Mouvement de 4/0

Torseur associé :

Glissière de direction $\overrightarrow{y_0}$

$$\{\mathcal{V}4/0\} : \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dot{\delta} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}_0}$$

Le mouvement de 4/0 est une translation donc $\overrightarrow{\Omega_{4/0}} = \overrightarrow{0}$ et

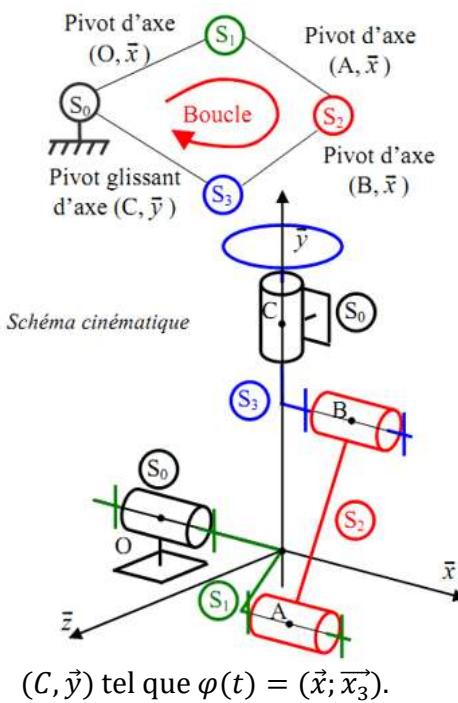
$$\overrightarrow{V(A \in 4/0)} = \frac{d\overrightarrow{EA}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_0} = \dot{\delta}(t) \cdot \overrightarrow{y_0}$$

Et,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V(M \in 4/0)} &= \overrightarrow{V(A \in 4/0)} + \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{4/0}} \\ &= \overrightarrow{V(A \in 4/0)} \end{aligned}$$

2. Système bielle-manivelle (compresseur d'air entraîné par un moteur électrique et un système poulie-courroie)

Graphes des liaisons (chaîne fermée)



Objectif : Calculer la vitesse $\vec{V}(C \in 3/0)$ par composition.



C7 - Exemple
Compresseur.mp4

Description des mouvements :

Le vilebrequin 1 a un mouvement de rotation d'axe (O, \vec{x}) par rapport au carter 0 et $\alpha(t) = (\vec{y}; \vec{y}_1)$.

La bielle 2 a un mouvement de rotation d'axe (A, \vec{x}_1) par rapport au vilebrequin 1 et $\beta(t) = (\vec{y}_1; \vec{y}_2)$.

Le piston 3 a un mouvement de rotation d'axe (B, \vec{x}_2) par rapport à la bielle 2 et $\theta(t) = (\vec{y}_2; \vec{y}_3)$.

Le piston 3 a un mouvement de translation selon \vec{y} par rapport au carter 0 et $\vec{OC} = a \cdot \vec{x} + \lambda(t) \cdot \vec{y}$ et un mouvement de rotation d'axe (C, \vec{y}) tel que $\varphi(t) = (\vec{x}; \vec{x}_3)$.

Q1. Réaliser les figures planes et écrire les torseurs cinématiques de la chaîne cinématique.

C'est toujours une bonne idée de faire le graphe même s'il n'est pas demandé. C'est un outil simple qui montre bien les chaînes cinématiques fermées ou /et ouvertes.

| | |
|--|---|
| Pivot d'axe (O, \vec{x}) (1 ddl) : | Pivot d'axe (B, \vec{x}) (1 ddl) : |
| $\{V(1/0)\} : \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\alpha} \cdot \vec{x} \\ \vec{V}(O \in 1/0) = \vec{0} \end{array} \right\}$ | $\{V(3/2)\} : \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{3/2} = \dot{\theta} \cdot \vec{x} \\ \vec{V}(B \in 3/2) = \vec{0} \end{array} \right\}$ |
| Pivot d'axe (A, \vec{x}) (1 ddl) : | Pivot glissant (C, \vec{y}) (2 ddl) : |
| $\{V(2/1)\} : \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{2/1} = \dot{\beta} \cdot \vec{x} \\ \vec{V}(A \in 2/1) = \vec{0} \end{array} \right\}$ | $\{V(3/0)\} : \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{3/0} = \dot{\varphi} \cdot \vec{y} \\ \vec{V}(C \in 3/0) = \vec{\lambda} \cdot \vec{y} \end{array} \right\}$ |

Q2. Grâce à la composition des vitesses de rotation montrer que $\dot{\varphi} = 0$.

La composition des vecteurs rotations permet d'écrire une équation vectorielle :

$$\vec{\Omega}_{3/0} = \vec{\Omega}_{3/2} + \vec{\Omega}_{2/1} + \vec{\Omega}_{1/0} \Leftrightarrow \dot{\varphi} \cdot \vec{y} = (\dot{\theta} + \dot{\beta} + \dot{\alpha}) \cdot \vec{x} \quad (1)$$

D'où les deux équations scalaires, $\dot{\varphi} = 0$ et $\dot{\theta} + \dot{\beta} + \dot{\alpha} = 0$

(obtenues en multipliant scalairement (1). \vec{y} et (1). \vec{x})

En intégrant de 0 à t , $\dot{\theta} + \dot{\beta} + \dot{\alpha} = 0$, on obtient :

$$\alpha(t) + \beta(t) + \theta(t) = \alpha(0) + \beta(0) + \theta(0) \text{ et si à } t = 0, A, B \text{ et } C \text{ sont alignés,}$$

$$\text{on a } \alpha(0) + \beta(0) + \theta(0) = -\frac{\pi}{2} + 0 + 0 \text{ et } \lambda(0) = R + l. \text{ (issue de l'analyse des données l'énoncé).}$$

Q3. Calculer par dérivation $\overrightarrow{V(C \in 3/0)}$.

On l'a déjà fait, implicitement, $\overrightarrow{V(C \in 3/0)} = \frac{d\overrightarrow{KC}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}}$ K étant un point fixe de \mathcal{R}_0 . On choisit le point O évidemment. Donc, $\overrightarrow{V(C \in 3/0)} = \frac{d\overrightarrow{OC}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} = \frac{d(a.\vec{x} + \lambda(t).\vec{y})}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} = \dot{\lambda}.\vec{y}$

Q4. Calculer par composition $\overrightarrow{V(C \in 3/0)}$

(il faut utiliser les deux lois à connaître absolument : **composition des vitesses** et **relation de Varignon**). On donne $\overrightarrow{OA} = a.\vec{x} + R.\vec{z}_1$ et $\overrightarrow{AB} = l.\vec{z}_2$.

$$\overrightarrow{V(C \in 3/0)} = \overrightarrow{V(C \in 3/2)} + \overrightarrow{V(C \in 2/1)} + \overrightarrow{V(C \in 1/0)}$$

(une erreur classique, que vous ne ferez pas, est d'oublier d'écrire ces vitesses au même point)

$$\overrightarrow{V(C \in 3/0)} = \underbrace{(\overrightarrow{V(B \in 3/2)} + \overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{3/2}})}_{\overrightarrow{V(C \in 3/2)}} + \underbrace{(\overrightarrow{V(A \in 2/1)} + \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/1}})}_{\overrightarrow{V(C \in 2/1)}} + \underbrace{(\overrightarrow{V(O \in 1/0)} + \overrightarrow{CO} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}})}_{\overrightarrow{V(C \in 1/0)}}$$

$$\overrightarrow{V(C \in 3/0)} = (-\lambda(t).\vec{y} + R.\vec{z}_1 + l.\vec{z}_2) \wedge \dot{\theta}.\vec{x} + (-\lambda(t).\vec{y} + R.\vec{z}_1) \wedge \dot{\beta}.\vec{x} - (a.\vec{x} + \lambda(t).\vec{y}) \wedge \dot{\alpha}.\vec{x}$$

$$\overrightarrow{V(C \in 3/0)} = \lambda(t). \underbrace{(\dot{\theta} + \dot{\beta} + \dot{\alpha})}_{=0 \text{ d'après Q2}} \cdot \vec{z} + R. \underbrace{(\dot{\theta} + \dot{\beta})}_{=-\dot{\alpha}} \cdot \vec{y}_1 + l. \dot{\theta} \cdot \vec{y}_2$$

$$\text{Et finalement, } \overrightarrow{V(C \in 3/0)} = -R.\dot{\alpha}.\vec{y}_1 + l.\dot{\theta}.\vec{y}_2$$

$$\text{Or, on a aussi } \overrightarrow{V(C \in 3/0)} = \dot{\lambda}.\vec{y}$$

$$\text{D'où l'équation vectorielle } -R.\dot{\alpha}.\vec{y}_1 + l.\dot{\theta}.\vec{y}_2 = \dot{\lambda}.\vec{y} \quad (2)$$

Pour aller plus loin, (non demandé) :

En projetant cette équation dans la base 0, on obtient 3 équations scalaires,

$$(2).\vec{x} \Rightarrow 0 = 0$$

$$(2).\vec{y} \Rightarrow -R.\dot{\alpha}.\cos(\alpha) + l.\dot{\theta}.\cos(\alpha + \beta) = \dot{\lambda}$$

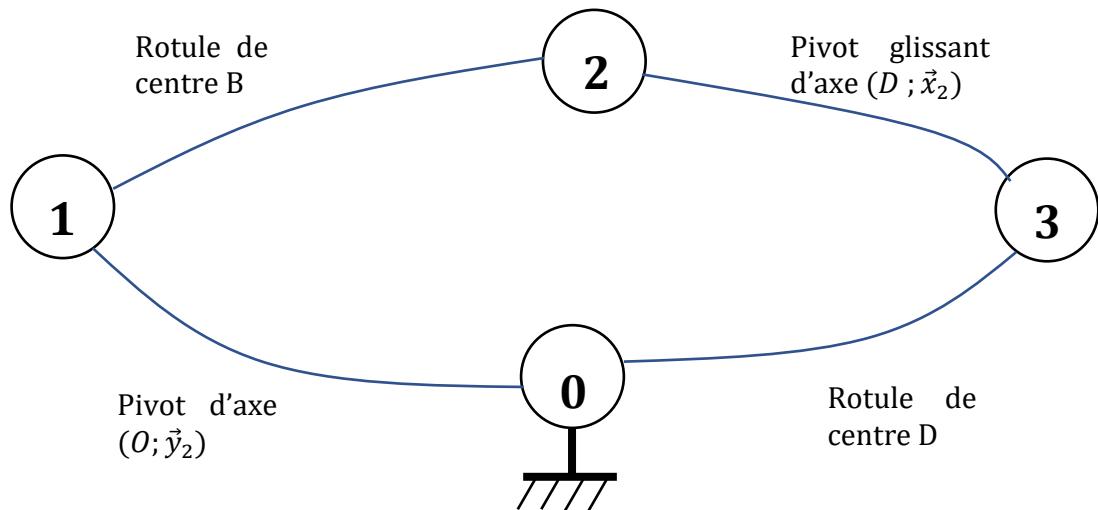
$$(2).\vec{z} \Rightarrow -R.\dot{\alpha}.\sin(\alpha) + l.\dot{\theta}.\sin(\alpha + \beta) = 0$$

La manipulation des quatre équations scalaires obtenues entre les paramètres de mouvements permettra de tous les exprimer en fonction de l'un d'eux (à choisir par nous selon le besoin).

Remarque : le comportement du gaz (p, T) est régi par la thermodynamique (cours de Physique ou E. Ing). La connaissance de l'évolution de la pression dans le cylindre du compresseur en fonction de la rotation du vilebrequin est une information qui permet de dimensionner le moteur (actionneur) nécessaire à l'entraînement du dispositif.

3. Trappe de désenfumage

Q.1 Construire le graphe de liaisons.



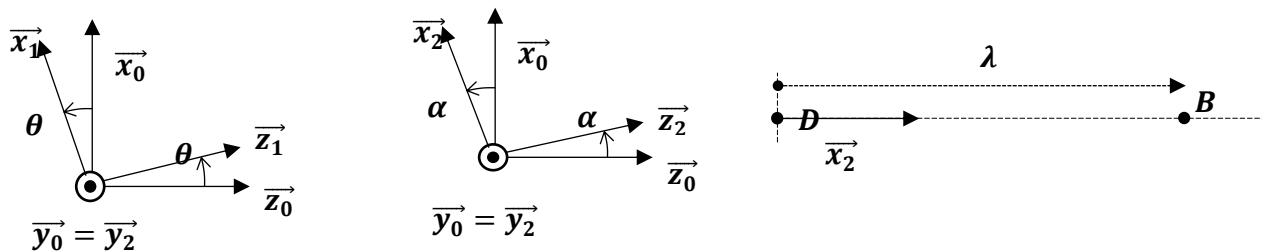
On peut choisir de privilégier la base \mathcal{B}_2 pour faciliter l'écriture des relations cinématiques.

Q.2 Donner les paramètres d'entrée et de sortie du système de transformation de mouvement.

Le paramètre de sortie, celui de l'effecteur, est θ ou **coordonnée opérationnelle**.

Le paramètre d'entrée, celui de l'actionneur, est λ ou **coordonnée articulaire**.

Q3. Construire les figures planes permettant de représenter les 3 paramètres de mouvements.



Q4. Exprimer $\vec{\Omega}_{2/0}$.

D'après la figure plane, $\vec{\Omega}_{2/0} = \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_2$

Q5. Donner l'expression, en fonction des paramètres de mouvement, des torseurs cinématiques de chacune des liaisons en fonction des paramètres de mouvements donnés dans l'énoncé.

NB : si certains paramètres de mouvements sont manquants, on les introduira en utilisant la notation de torseur suivante :

$$\{\mathcal{V}(S_j/S_i)\} = \begin{cases} \omega_{xji} \cdot \vec{x} + \omega_{yji} \cdot \vec{y} + \omega_{zji} \cdot \vec{z} \\ V_{xji} \cdot \vec{x} + V_{yji} \cdot \vec{y} + V_{zji} \cdot \vec{z} \end{cases}$$

| | |
|--|---|
| $\{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\theta} \cdot \vec{y}_2 \\ \overrightarrow{V(O \in 1/0)} = \vec{0} \end{array} \right\}$ | $\{\mathcal{V}(2/1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{2/1} = \omega_{x21} \cdot \vec{x}_2 + \omega_{y21} \cdot \vec{y}_2 + \omega_{z21} \cdot \vec{z}_2 \\ \overrightarrow{V(B \in 2/1)} = \vec{0} \end{array} \right\}$ |
| $\{\mathcal{V}(3/2)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{3/2} = \omega_{x32} \cdot \vec{x}_2 \\ \overrightarrow{V(B \in 3/2)} = -\dot{\lambda} \cdot \vec{x}_2 \end{array} \right\}$ | $\{\mathcal{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{3/0} = \omega_{x30} \cdot \vec{x}_2 + \omega_{y30} \cdot \vec{y}_2 + \omega_{z30} \cdot \vec{z}_2 \\ \overrightarrow{V(D \in 3/0)} = \vec{0} \end{array} \right\}$ |

Remarque : $\overrightarrow{V(B \in 3/2)} = \frac{d(\vec{KB})}{dt} \Big|_2$ où K est un point fixe de \mathcal{R}_2 .

Seul B convient. Ce qui donne : $\overrightarrow{V(B \in 3/2)} = \frac{d(\vec{BB})}{dt} \Big|_2$. Dans cette écriture, le premier point $B \in \mathcal{R}_2$ (**point matériel**) et le second point $B \in \mathcal{R}_3$ mais c'est alors un **point coïncident** qui se déplace avec \mathcal{R}_3 . Dans ce cadre, comme pour une fonction f , il s'agit de calculer la dérivée de f à une abscisse x_0 où $f(x_0) = 0$. Cela ne pose pas de problème.

Dans notre cas, on va ruser.

On va écrire $\overrightarrow{V(B \in 3/2)} = -\overrightarrow{V(B \in 2/3)} = -\frac{d(\vec{DB})}{dt} \Big|_3$. D est alors un **point matériel** de \mathcal{R}_3 et B un **point matériel** de \mathcal{R}_2 . Le calcul donne $\overrightarrow{V(B \in 2/3)} = \frac{d(\lambda \cdot \vec{x}_2)}{dt} \Big|_3$ et $\vec{x}_2 = \vec{x}_3$

D'où, $\overrightarrow{V(B \in 2/3)} = \dot{\lambda} \cdot \vec{x}_2$ et $\overrightarrow{V(B \in 3/2)} = -\dot{\lambda} \cdot \vec{x}_2$

Q6. Quelles sont les deux lois, à connaître absolument, pour le calcul des vitesses par les torseurs ?

La composition des torseurs cinématiques et la relation fondamentale des torseurs (ou Varignon ou « BABAR »).

Q7. Ecrire la fermeture des torseurs cinématiques.

Composition : $\{\mathcal{V}(3/0)\} = \{\mathcal{V}(3/2)\} + \{\mathcal{V}(2/1)\} + \{\mathcal{V}(1/0)\}$

C'est une relation entre fonctions. Pour les calculs, il faut utiliser la même abscisse, c-à-d le même point.

Q8. Grâce, entre autre, à la fermeture des vecteurs rotations écrire 6 équations scalaires liant les paramètres de rotations. Pourquoi une inconnue de rotation n'est-elle pas résolue ?

$$\vec{\Omega}_{3/0} = \vec{\Omega}_{3/2} + \vec{\Omega}_{2/1} + \vec{\Omega}_{1/0} \text{ tous écrits dans } \mathcal{B}_2$$

Ce qui donne les 3 équations scalaires : $\begin{cases} \omega_{x30} = \omega_{x32} + \omega_{x21} \\ \omega_{y30} = \omega_{y21} + \dot{\theta} \\ \omega_{z30} = \omega_{z21} \end{cases}$

Par ailleurs, $\vec{\Omega}_{2/0} = \vec{\Omega}_{2/1} + \vec{\Omega}_{1/0}$

Ce qui donne les 3 équations scalaires :
$$\begin{cases} 0 = \omega_{x21} \\ \dot{\alpha} = \omega_{y21} + \dot{\theta} \\ 0 = \omega_{z21} \end{cases}$$

On en déduit $\omega_{z30} = \omega_{z21} = 0$; $\omega_{x21} = 0$; $\omega_{y21} = \dot{\alpha} - \dot{\theta}$; $\omega_{y30} = \dot{\alpha}$

L'équation $\omega_{x30} = \omega_{x32}$ n'est pas résoluble. Elle correspond à des **mobilités dites internes** du mécanisme. C'est deux rotations autour de \vec{x}_2 (voir le schéma cinématique) sont effectivement non contraintes. Mais elles n'interfèreront pas dans nos calculs pour trouver la loi E/S.

Q9. Donner la nouvelle forme des torseurs cinématiques.

| | |
|--|--|
| $\{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\theta} \cdot \vec{y}_2 \\ \overrightarrow{V(O \in 1/0)} = \vec{0} \end{array} \right\}$ | $\{\mathcal{V}(2/1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{2/1} = (\dot{\alpha} - \dot{\theta}) \cdot \vec{y}_2 \\ \overrightarrow{V(B \in 2/1)} = \vec{0} \end{array} \right\}$ |
| $\{\mathcal{V}(3/2)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{3/2} = \omega_{x30} \cdot \vec{x}_2 \\ \overrightarrow{V(B \in 3/2)} = -\lambda \cdot \vec{x}_2 \end{array} \right\}$ | $\{\mathcal{V}(3/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{3/0} = \omega_{x30} \cdot \vec{x}_2 + \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_2 \\ \overrightarrow{V(D \in 3/0)} = \vec{0} \end{array} \right\}$ |

Q10. Ecrire la fermeture des vecteurs vitesses au point B.

$$\text{La fermeture ou la composition donne, } \overrightarrow{V(B \in 3/0)} = \underbrace{\overrightarrow{V(B \in 3/2)}}_{=-\lambda \cdot \vec{x}_2} + \underbrace{\overrightarrow{V(B \in 2/1)}}_{=\vec{0}} + \overrightarrow{V(B \in 1/0)}$$

(articulation)

Q11. En déduire une relation entre les paramètres de mouvements.

Et d'après la relation fondamentale des torseurs,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V(B \in 3/0)} &= \underbrace{\overrightarrow{V(D \in 3/0)}}_{=\vec{0}} + \overrightarrow{BD} \wedge \vec{\Omega}_{3/0} = -\lambda \cdot \vec{x}_2 \wedge (\omega_{x30} \cdot \vec{x}_2 + \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_2) = -\lambda \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_2 \\ \overrightarrow{V(B \in 1/0)} &= \underbrace{\overrightarrow{V(O \in 1/0)}}_{=\vec{0}} + \overrightarrow{BO} \wedge \vec{\Omega}_{1/0} = (-2 \cdot a \cdot \vec{y}_1 + d \cdot \vec{x}_1 - h \cdot \vec{z}_1) \wedge (\dot{\theta} \cdot \vec{y}_1) \\ \overrightarrow{V(B \in 1/0)} &= \dot{\theta} \cdot (d \cdot \vec{z}_1 + h \cdot \vec{x}_1) \end{aligned}$$

On aboutit à la relation :

$$-\lambda \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_2 + \lambda \cdot \vec{x}_2 = \dot{\theta} \cdot (d \cdot \vec{z}_1 + h \cdot \vec{x}_1) \quad (1)$$

Pour aller plus loin, (non demandé) :

$$(1) \cdot \vec{x}_0 \Rightarrow -\lambda \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin(\alpha) + \lambda \cdot \cos(\alpha) = \dot{\theta} \cdot (d \cdot \sin(\theta) + h \cdot \cos(\theta)) \quad (2)$$

$$(1) \cdot \vec{z}_0 \Rightarrow -\lambda \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos(\alpha) - \lambda \cdot \sin(\alpha) = \dot{\theta} \cdot (d \cdot \cos(\theta) - h \cdot \sin(\theta)) \quad (3)$$

Remarquons que :

$$\begin{aligned}
-\lambda \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin(\alpha) + \dot{\lambda} \cdot \cos(\alpha) &= \frac{d}{dt}(\lambda \cdot \cos(\alpha)) \quad \text{et} \quad -\lambda \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos(\alpha) - \dot{\lambda} \cdot \sin(\alpha) = -\frac{d}{dt}(\lambda \cdot \sin(\alpha)) \\
\dot{\theta} \cdot \sin(\theta) &= -\frac{d}{dt}(\cos(\theta)) \quad \text{et} \quad \dot{\theta} \cdot \cos(\theta) = \frac{d}{dt}(\sin(\theta))
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\int_0^t \textcircled{2}.du \Rightarrow \lambda \cdot \cos(\alpha) = -d \cdot \cos(\theta) + h \cdot \sin(\theta) + cste_4 \quad \textcircled{4}$$

Or pour $t = 0$ s, posons $\theta(0) = 0$ (fenêtre fermée) alors $\alpha(0) < 0$ et $\lambda(0) > 0$

d'où, $d + \lambda(0) \cdot \cos(\alpha(0)) = cste_4$ et la configuration donne $cste_4 = e$

$$\int_0^t \textcircled{3}.du \Rightarrow -\lambda \cdot \sin(\alpha) = d \cdot \sin(\theta) + h \cdot \cos(\theta) + cste_5 \quad \textcircled{5}$$

Or pour $t = 0$ s, $\theta(0) = 0$ (fenêtre fermée) alors $\alpha(0) < 0$ et $\lambda(0) > 0$

d'où, $-\lambda(0) \cdot \sin(\alpha(0)) = h + cste_5$ et la configuration donne $cste_5 = 0$

$$\text{et, } \textcircled{4}^2 + \textcircled{5}^2 \Rightarrow \lambda^2 = (-d \cdot \cos(\theta) + h \cdot \sin(\theta) + e)^2 + (d \cdot \sin(\theta) + h \cdot \cos(\theta))^2$$

$$\lambda = [d^2 + h^2 + e^2 + 2 \cdot e \cdot (-d \cdot \cos(\theta) + h \cdot \sin(\theta))]^{1/2} \quad \textcircled{10}$$

On a écrit λ (coord. articulaire) en fonction de θ (coord. opérationnelle).

Cela constitue le **modèle géométrique inverse** : $\lambda = f^{-1}(\theta)$

Le **modèle géométrique direct** donne la sortie en fonction de l'entrée soit : $\theta = f(\lambda)$

Inversons la relation précédente.

Remarquons que (calcul classique)

$$h \cdot \sin(\theta) - d \cdot \cos(\theta) = \sqrt{d^2 + h^2} \cdot \left(\frac{h}{\sqrt{d^2 + h^2}} \cdot \sin(\theta) + \frac{-d}{\sqrt{d^2 + h^2}} \cdot \cos(\theta) \right) \text{ avec } \tan(\varphi) = \frac{-d}{h}$$

$$\text{donc } h \cdot \sin(\theta) - d \cdot \cos(\theta) = \sqrt{d^2 + h^2} \cdot \sin(\theta + \varphi)$$

$$\textcircled{10} \Leftrightarrow \lambda^2 = d^2 + h^2 + e^2 + 2 \cdot e \cdot \sqrt{d^2 + h^2} \cdot \sin(\theta + \varphi)$$

$$\Leftrightarrow \sin(\theta + \varphi) = \frac{\lambda^2 - (d^2 + h^2 + e^2)}{2 \cdot e \cdot \sqrt{d^2 + h^2}}$$

Pour prendre l'arcsin, il faudra vérifier que $\theta + \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ qui est le domaine de définition de l'arcsin.

$$\text{Finalement, } \theta = \arcsin\left(\frac{\lambda^2 - (d^2 + h^2 + e^2)}{2 \cdot e \cdot \sqrt{d^2 + h^2}}\right) - \varphi \text{ et } \tan(\varphi) = \frac{-d}{h}$$

C'est le **modèle géométrique direct** (coord. opérationnelle en fonction de coord. articulaire) :

$$\theta = f(\lambda)$$

Mais à quoi correspond l'angle φ ?

L'analyse du schéma montre que $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. $\theta = 0$ lorsque la fenêtre est fermée et $\theta = \frac{\pi}{2}$ lorsque la fenêtre est ouverte à 90°, ce qui n'arrive pas dans la réalité. Pour ce fonctionnement, la tige du vérin sort.

En revanche, si la tige du vérin continue de rentrer à partir de la position fermée ($\theta = 0$) alors θ évolue dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$. Dans cette phase (non réaliste) de fonctionnement, la relation $\theta = f(\lambda)$ n'est valide que si $0 > \theta + \varphi > -\frac{\pi}{2}$.

Autrement dit, il faut $-\varphi > \theta > -\frac{\pi}{2} - \varphi$ (et on sait que $\varphi < 0$ car $\tan(\varphi) = \frac{-d}{h}$). En analysant le sens physique de d et h , on déduit que la configuration où $\theta = -\frac{\pi}{2} - \varphi < -\frac{\pi}{2}$ correspond à **l'alignement (dans l'ordre) des points C, B et D**. La tige du vérin ne peut pas rentrer davantage. Le mécanisme est bloqué. Par ailleurs, si la tige sort, on ne sait pas dans quel sens va tourner la fenêtre. C'est cette singularité réelle qu'exprime l'angle φ issu du modèle mathématique.

On a d'ailleurs une **autre singularité** si on veut ouvrir la fenêtre de plus que $\frac{\pi}{2}$. Dans ce cas, on a **l'alignement (dans l'ordre) des points B, C et D** et $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi > \frac{\pi}{2}$.

La relation ⑩ peut aussi être trouvée par une **fermeture géométrique**.

En effet, on a la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DO} = \vec{0} &\Leftrightarrow 2.a.\vec{y}_1 - d.\vec{x}_1 + h.\vec{z}_1 - \lambda.\vec{x}_2 - 2.a.\vec{y}_1 + e.\vec{x}_0 = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow -d.\vec{x}_1 + h.\vec{z}_1 + e.\vec{x}_0 = \lambda.\vec{x}_2 \quad ⑥ \end{aligned}$$

$$⑥.\vec{x}_0 \Rightarrow -d.\cos(\theta) + h.\sin(\theta) + e = \lambda.\cos(\alpha) \quad ⑦$$

$$⑥.\vec{z}_0 \Rightarrow d.\sin(\theta) + h.\cos(\theta) = -\lambda.\sin(\alpha) \quad ⑧$$

$$⑦^2 + ⑧^2 \Rightarrow \lambda = [d^2 + h^2 + e^2 + 2.e.(-d.\cos(\theta) + h.\sin(\theta))]^{1/2}$$

Conclusion :

Par dérivation des équations de la fermeture géométrique, on obtient celles de la fermeture cinématique.

Par intégration des équations de la fermeture cinématique, on obtient celles de la fermeture géométrique.

Q12. Calculer le vecteur accélération $\overrightarrow{\Gamma(B \in 2/0)}$. Préciser le sens des termes de ce vecteur.

$\overrightarrow{\Gamma(B \in 2/0)}$ n'est pas décrit par un champ de torseur. Il faut dériver $\overrightarrow{V(B \in 2/0)}$

$$\overrightarrow{\Gamma(B \in 2/0)} = \left. \frac{d(\overrightarrow{V(B \in 2/0)})}{dt} \right|_0$$

$$\overrightarrow{V(B \in 2/0)} = \underbrace{\overrightarrow{V(B \in 2/1)}}_{= \vec{0}} + \overrightarrow{V(B \in 1/0)} = -\lambda.\dot{\alpha}.\vec{z}_2 + \dot{\lambda}.\vec{x}_2 = \dot{\theta}.(d.\vec{z}_1 + h.\vec{x}_1) \text{ d'après la question 10.}$$

(articulation)

$$\overrightarrow{\Gamma(B \in 2/0)} = \left. \frac{d(\dot{\theta}.(d.\vec{z}_1 + h.\vec{x}_1))}{dt} \right|_0 = \left. \frac{d(\dot{\theta}.(d.\vec{z}_1 + h.\vec{x}_1))}{dt} \right|_1 + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge (\dot{\theta}.(d.\vec{z}_1 + h.\vec{x}_1))$$

$$\overrightarrow{\Gamma(B \in 2/0)} = \underbrace{\ddot{\theta}.(d.\vec{z}_1 + h.\vec{x}_1)}_{\substack{\text{Accélération} \\ \text{tangentielle} \\ \text{à la trajectoire}}} + \underbrace{\dot{\theta}^2.(d.\vec{x}_1 - h.\vec{z}_1)}_{\substack{\text{Accélération} \\ \text{normale} \\ \text{à la trajectoire}}}$$